Intégration sur un intervalle quelconque

Chapitre 7

par David Blottière, le 29 novembre 2023 à 20h06

Sommaire

§ 1. Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Notation. — Dans cette partie, la lettre I désigne un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et la lettre $\mathbf{K}$ l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

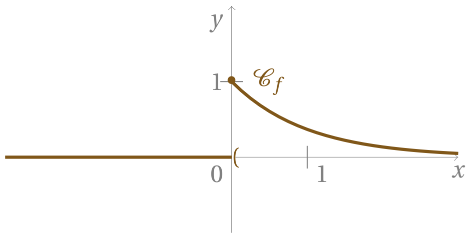
> **Définition 1 (fonction continue par morceaux sur l'intervalle I). —** *Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$. est dite continue par morceaux sur I si et seulement si pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, la restriction de la fonction f au segment $[a,b]$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$.*

***Exemple 2.* —** Toute fonction continue sur I est continue par morceaux sur I. ■

***Exemple 3.* —** La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$. ■

***Exemple 4.* —** La fonction f définie par :

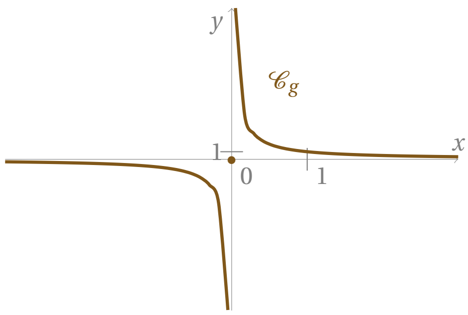
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \right.$$



est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$. ■

***Exemple 5.* —** La fonction g définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\,; \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$



n'est pas continue par morceaux sur $\mathbf{R}$. ■

> **Proposition 6 (structure de l'ensemble des fonctions c.p.m. sur un intervalle). —** *L'ensemble :*
>
> $$\mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{K}) := \left\{ f \in \mathbf{K}^I \;:\; f \text{ est continue par morceaux sur } I \right\}.$$
>
> *est une sous-$\mathbf{K}$-algèbre de la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{K}^I$ des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$.*

***Remarque 7.* —** L'ensemble :

$$\mathscr{C}(I,\mathbf{K}) := \left\{ f \in \mathbf{K}^I \;:\; f \text{ est continue sur } I \right\}$$

est une sous-$\mathbf{K}$-algèbre de la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}(I,\mathbf{K})$. ■

Exercice 8. — Justifier que les fonctions :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\,; \\ x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

sont continues par morceaux sur $\mathbf{R}$, mais que la fonction $f \circ g$ ne l'est pas. □

§ 2. ÉTUDES ASYMPTOTIQUES D'INTÉGRALES PARTIELLES

EXERCICE 9. — Justifier que, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, l'intégrale :

$$I(\varepsilon) := \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I(\varepsilon)$ lorsque A tend vers $+\infty$. □

EXERCICE 10. — Justifier que, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, l'intégrale :

$$I(\varepsilon) := \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I(\varepsilon)$ lorsque A tend vers $+\infty$. □

EXERCICE 11. — Justifier que, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, l'intégrale :

$$I(\varepsilon) := \int_{\varepsilon}^{1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I(\varepsilon)$ lorsque A tend vers $+\infty$. □

EXERCICE 12. — Soit a un réel fixé. Justifier que, pour tout $A \in \mathbf{R}_{>0}$, l'intégrale :

$$I_a(A) := \int_{0}^{A} e^{-at}\,\mathrm{d}t$$

est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I_a(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. □

EXERCICE 13. — Soit α un nombre réel fixé. Justifier que, pour tout $A \in \mathbf{R}_{>0}$, l'intégrale :

$$I_\alpha(A) := \int_{1}^{A} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I_\alpha(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. □

EXERCICE 14. — Soit β un nombre réel fixé. Justifier que, pour tout $A \in \mathbf{R}_{>0}$, l'intégrale :

$$I_\beta(A) := \int_{2}^{A} \frac{1}{x\ln^\beta(x)}\,\mathrm{d}x$$

est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I_\beta(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. □

EXERCICE 15. — Justifier que, pour tout $A \in \mathbf{R}_{>0}$, l'intégrale :

$$I(A) := \int_{0}^{A} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. □

EXERCICE 16. — Soit λ un nombre réel strictement positif fixé. Justifier que, pour tout $A \in \mathbf{R}_{>0}$, l'intégrale :

$$I_\lambda(A) := \int_{0}^{A} \sin(t)\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I_\lambda(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. □

EXERCICE 17. — Justifier que, pour tout $A \in \mathbf{R}_{>0}$, l'intégrale :

$$I(A) := \int_{0}^{A} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. □

EXERCICE 18. — Soit α un nombre réel fixé. Justifier que, pour tout $A \in \mathbf{R}_{>0}$, l'intégrale :

$$I_\alpha(A) := \int_{2}^{A} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)}\,\mathrm{d}x$$

est bien définie, puis étudier le comportement asymptotique de $I_\alpha(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. □

§ 3. Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Notation. — La lettre a désigne un nombre réel.

1. Définition d'une intégrale convergente sur $[a,+\infty[$

Définition 19 (intégrale convergente en $+\infty$). — *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,+\infty, \mathbf{K})$.*

1. *L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si la fonction :*

$$x \longmapsto I(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad [\textit{intégrale sur le segment } [a,x]]$$

admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

2. *Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors on pose :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 20 (déplacement de la borne non singulière). — Soient $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,+\infty, \mathbf{K})$ et $b \in [a,+\infty[$. Comme :

$$\forall\, x \in [b,+\infty[, \quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{constante}} + \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad [\text{relation de Chasles pour l'intégrale sur un segment}]$$

les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature. ■

Exemple 21. — L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. ■

Exemple 22. — L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. En effet, la fonction cosinus n'admet pas de limite en $+\infty$. ■

Exemple 23. — L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$. ■

Exercice 24. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et préciser sa valeur. □

2. Deux intégrales de références sur $[a,+\infty[$

Proposition 25 (intégrales de référence). — *Soient $(a,\alpha) \in \mathbf{R}^2$.*

1. *L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
2. *L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$.*

3. QUEUE D'UNE INTÉGRALE CONVERGENTE SUR $[a,+\infty[$

PROPOSITION 26 (QUEUE D'UNE INTÉGRALE CONVERGENTE). — *Soit $f \in \mathscr{C}([a,+\infty, \mathbf{K})$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. La fonction :*

$$Q \left| \begin{array}{ccc} [a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de la fonction $-f$ sur $[a,+\infty[$ de limite nulle en $+\infty$.

4. THÉORÈME DE DOMINATION SUR UN INTERVALLE $[a,+\infty[$

THÉORÈME 27 (CRITÈRE DE CONVERGENCE POUR LES INTÉGRALES DE FONCTIONS POSITIVES). — *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,+\infty, \mathbf{R})$ telle que $f \geqslant 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction :*

$$x \longmapsto I(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est majorée.

THÉORÈME 28 (DOMINATION POUR LES FONCTIONS POSITIVES). — *Soient $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,+\infty, \mathbf{R})$ et $g \in \mathscr{C}_{pm}([a,+\infty, \mathbf{R})$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$.*

1. *Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*
2. *Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.*

EXERCICE 29. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. □

EXERCICE 30. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t^2)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ est convergente. □

EXERCICE 31. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. □

§ 4. INTÉGRABILITÉ SUR UN INTERVALLE DE LA FORME $[a,+\infty[$

NOTATION. — La lettre a désigne un nombre réel.

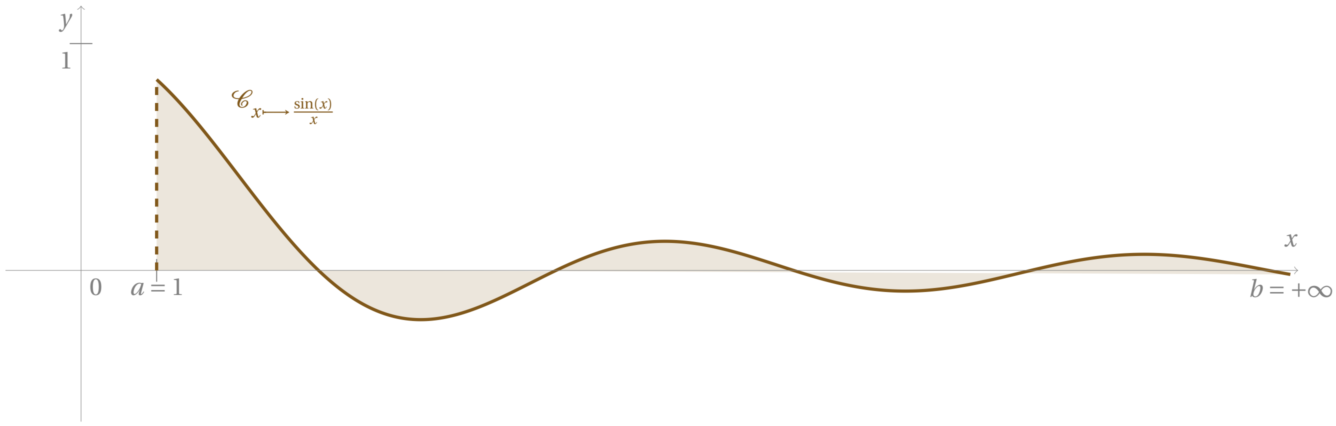
1. DÉFINITION D'UNE FONCTION INTÉGRABLE SUR $[a,+\infty[$

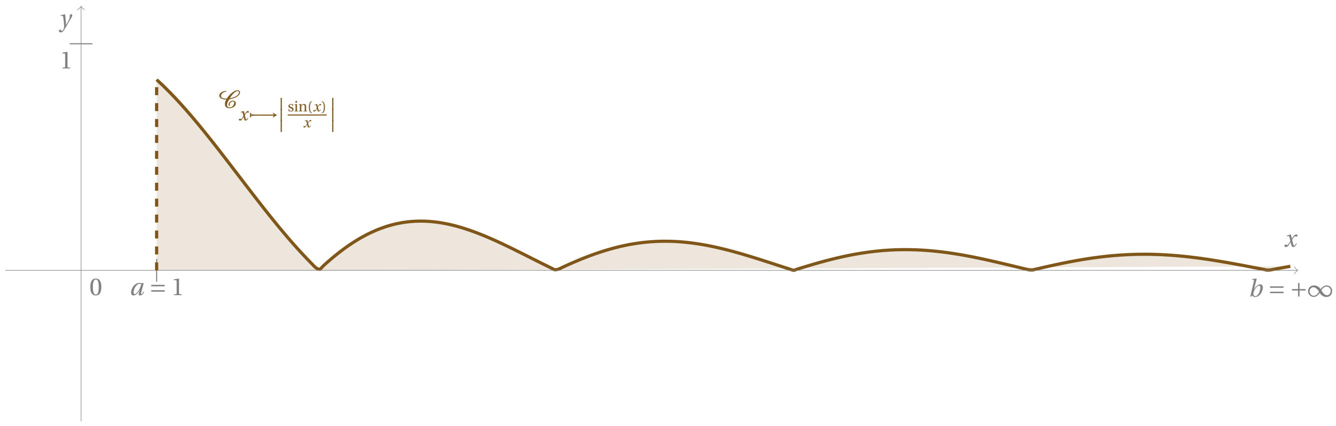
DÉFINITION 32 (FONCTION INTÉGRABLE SUR L'INTERVALLE $[a,+\infty[$). — *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,+\infty, \mathbf{K})$. On dit que la fonction f est intégrable sur $[a,+\infty[$ ou que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.*

Remarque 33 (intégrabilité d'une fonction de signe constant). — Soit $f \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,+\infty, \mathbf{K})$ une fonction de signe constant. La fonction f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. ■

> **THÉORÈME 34 (LA CONVERGENCE ABSOLUE IMPLIQUE LA CONVERGENCE).** — *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,+\infty, \mathbf{K})$. Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*

Exemple 35 (une intégrale semi-convergente). — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais non-absolument convergente.





■

2. THÉORÈME DE COMPARAISON SUR $[a,+\infty[$

> **THÉORÈME 36 (DE COMPARAISON EN $+\infty$).** — *Soient $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,+\infty, \mathbf{K})$ et $g \in \mathscr{C}_{pm}([a,+\infty, \mathbf{K})$.*
>
> 1. *Supposons $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}(g(x))$. Alors :*
> $$g \text{ intégrable sur } [a,+\infty[\quad\Longrightarrow\quad f \text{ intégrable sur } [a,+\infty[.$$
> 2. *Supposons $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$. Alors :*
> $$f \text{ intégrable sur } [a,+\infty[\quad\Longleftrightarrow\quad g \text{ intégrable sur } [a,+\infty[.$$

EXERCICE 37. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{R}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{R}}$ deux suites de nombres réels. On définies deux fonctions f et g sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall\, n\in\mathbf{N},\quad \forall\, x\in[n,n+1[,\quad f(x)=a_n \text{ et } g(x)=b_n$$

de sorte que, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=a_{\lfloor x\rfloor}$ et $g(x)=b_{\lfloor x\rfloor}$.

1. Démontrer que la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.
2. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.
3. Démontrer que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ si et seulement si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.
4. Donner alors deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{R}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{R}}$ telles que :
   (a) $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$;
   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge ;
   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ diverge.

□

EXERCICE 38 (RÈGLE t^α). — Soit $f\in\mathscr{C}_{\text{pm}}([a,+\infty,\mathbf{K})$ telle que $f\geqslant 0$. Démontrer les deux assertions suivantes.

1. S'il existe $\alpha>1$ tel que $t^\alpha f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. S'il existe $\alpha\leqslant 1$ tel que $t^\alpha f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

□

EXERCICE 39. — Étudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ □

EXERCICE 40. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$ □

EXERCICE 41. — Soit $\alpha\in\mathbf{R}$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)\mathrm{d}x.$ □

EXERCICE 42 (INTÉGRALES DE BERTRAND). — Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha\ln^\beta(x)}\,\mathrm{d}x.$ □

EXERCICE 43. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln(x))^{\ln(\ln(x))}}\,\mathrm{d}x.$ □

§ 5. DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE FONCTION INTÉGRABLE EN $+\infty$

Soit $f\in\mathscr{C}_{\text{pm}}([0,+\infty,\mathbf{K})$ telle que $f\geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors :

$f(t)$ ne tend pas nécessairement vers 0, lorsque t tend vers $+\infty$.

comme le montre l'exemple ci-dessous.

DÉFINITION DE LA FONCTION f. — On vérifie que pour tout $k\in\mathbf{N}_{\geqslant 2}$:

$$k+\frac{1}{k^2}<(k+1)-\frac{1}{(k+1)^2}$$

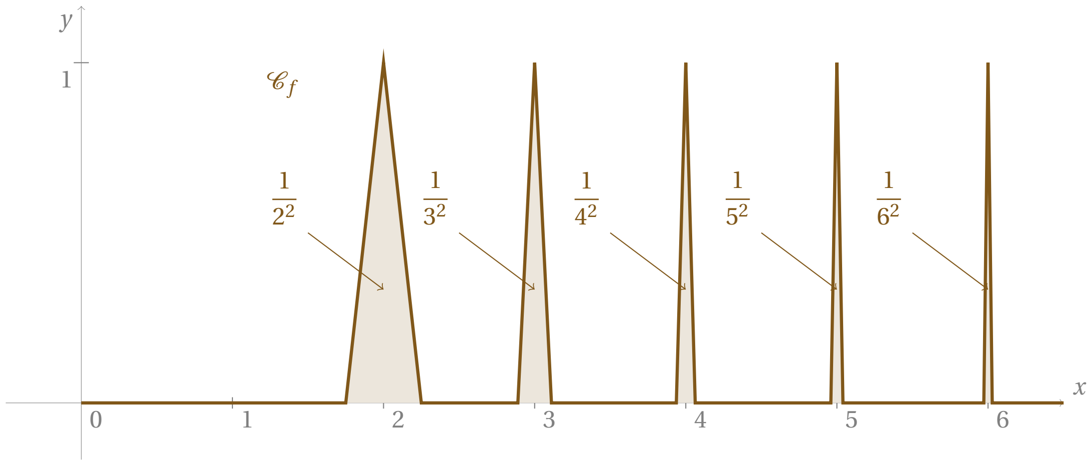
et on en déduit que les intervalles $\left[k-\dfrac{1}{k^2},k+\dfrac{1}{k^2}\right]$, où $k\in\mathbf{N}$, sont deux-à-deux disjoints. On peut alors définir la fonction $f\colon [0,+\infty[\to\mathbf{R}_+$ par :

- pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, la restriction de f au segment $\left[k - \frac{1}{k^2}, k\right]$ coïncide avec la fonction affine définie par $f\left(k - \frac{1}{k^2}\right) = 0$ et $f(k) = 1$;
- pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, la restriction de f au segment $\left[k, k + \frac{1}{k^2}\right]$ coïncide avec la fonction affine définie par $f(k) = 1$ et $f\left(k + \frac{1}{k^2}\right) = 0$;
- la fonction f est nulle sur l'ensemble $[0, +\infty[\setminus \bigcup_{k=2}^{+\infty} \left[k - \frac{1}{k^2}, k + \frac{1}{k^2}\right]$.

On a donc, pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$:

$$\forall x \in \left[k - \frac{1}{k^2}, k\right] \quad f(x) = k^2\left(x - k + \frac{1}{k^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left[k, k + \frac{1}{k^2}\right] \quad f(x) = k^2\left(k + \frac{1}{k^2} - x\right).$$

Représentation graphique de la fonction f. — Le graphe de la fonction f a l'allure d'une « chaîne de montagnes ».



Convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. — On vérifie que la fonction f est continue par morceaux et positive ou nulle sur $[0, +\infty[$. D'autre part, pour tout $x > 2$, si on pose $n := E(x)$:

$$I(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{n+\frac{1}{n^2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-\frac{1}{k^2}}^{k+\frac{1}{k^2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \underbrace{\frac{\pi^2}{6}}_{\text{indépendant de } x}.$$

Comme la fonction I majorée, $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

La fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$. — Supposons qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ tel que :

$$f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \ell.$$

On en déduit que $1 = f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, d'où $\ell = 1$. Comme $n + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, on en déduit $0 = f\left(n + \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, d'où $\ell = 0$. Contradiction.

Exercice 44. — Construire une fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux, positive ou nulle telle que :

(a) l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;

(b) $f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

□

EXERCICE 45. — Soit une fonction $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux, telle que :

(a) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;

(b) il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$.

Démontrer que $\ell = 0$. □

EXERCICE 46. — Soit une fonction $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue par morceaux, telle que :

(a) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;

(b) la fonction f est décroissante sur $[0,+\infty[$.

1. Démontrer $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
2. Démontrer $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$. On pourra considérer les intégrales $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$, où $x \geqslant 0$.

□

§ 6. INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

1. DÉFINITION D'UNE INTÉGRALE CONVERGENTE SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

DÉFINITION 47 (INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE). — *Soient a et b des points de $\overline{\mathbf{R}}$ tels que $a < b$.*

1. *Intervalle semi-ouvert, ouvert à droite. Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b[\,,\mathbf{K})$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si la fonction :*

$$I \left|\begin{array}{ccc} [a,b[& \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

admet une limite finie lorsque x tend vers b^-. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. *Intervalle semi-ouvert, ouvert à gauche. Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(]a,b]\,,\mathbf{K})$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si la fonction :*

$$I \left|\begin{array}{ccc}]a,b] & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

admet une limite finie lorsque x tend vers a^+. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. *Intervalle ouvert. Soient $f \in \mathscr{C}_{pm}(]a,b[\,,\mathbf{K})$ et c un point quelconque de $]a,b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (au sens de 2.) et l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (au sens de 1.). Dans ce cas, on pose :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+} \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{y\to b^-} \int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La définition de la notion de convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et sa valeur éventuelle ne dépendent pas du choix du point c.

Exemple 48. — L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente en 0 et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$. ■

EXERCICE 49. — Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ □

EXERCICE 50. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. □

EXERCICE 51. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. □

Bien que :

$$\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t = 0 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ diverge. En effet :

$$\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

EXERCICE 52. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\,\mathrm{d}t$. □

2. PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

THÉORÈME 53 (PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES). — *Soit I un intervalle d'intérieur non vide.*

1. *Linéarité. Soient $(f,g) \in \mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{K})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$. Si les intégrales $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors :*
   (a) *l'intégrale $\displaystyle\int_I \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t$ converge*
   (b) $\displaystyle\int_I \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.
2. *Positivité. Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{R})$ telle que $f \geqslant 0$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors :*
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$
3. *Croissance. Soient $(f,g) \in \mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{R})^2$ tel que $f \leqslant g$. Si les intégrales $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors :*
$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$
4. *Relation de Chasles. Soient $a := \inf(I) \in \overline{R}$, $b := \sup(I) \in \overline{R}$ et $c \in]a,b[$. Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{K})$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors :*
   (a) *les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent;*
   (b) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
5. *Séparation pour les fonctions continues. Soit $f \in \mathbf{R}^I$. Alors :*
$$\left.\begin{array}{ll} (a) & f \text{ est continue sur } I \\ (b) & f \geqslant 0 \\ (c) & \displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge et } \int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f = 0.$$

On veillera à appliquer la linéarité avec soin, en vérifiant les hypothèses de convergence au préalable. Bien que :

$$\forall x \in [2,+\infty[,\qquad \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t$ converge, l'identité :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t - \int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

n'a aucun sens. En effet, les deux intégrales $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ divergent.

Remarque 54 (somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente). — Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ d'intérieur non vide et $(f,g) \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}(I,\mathbf{K})^2$. Alors :

$$\left(\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge et } \int_I g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}\right) \implies \int_I f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}$$

■

Exercice 55. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. □

3. Deux intégrales de référence sur $]0,1]$

Proposition 56 (intégrales de référence). — *Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.*

1. *L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*
2. *L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.*

4. Le faux problème de convergence en une extrémité réelle

Proposition 57 (prolongement par continuité en une extrémité réelle). — *Soient a et b des réels tels que $a < b$.*

1. *Soit $f \in \mathscr{C}([a,b[\,,\mathbf{K})$. Si f admet une limite finie en b^- alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*
2. *Soit $f \in \mathscr{C}(]a,b]\,,\mathbf{K})$. Si f admet une limite finie en a^+ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*

Exercice 58. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. □

Exercice 59. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2\ln(t)}{2+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ est convergente. □

5. Théorème de domination sur un intervalle quelconque

Théorème 60 (domination). — *Soient I un intervalle non vide et $f \in \mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{K})$, $g \in \mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{K})$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$.*

1. *Si $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*
2. *Si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.*

Exercice 61. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. □

6. Intégration par parties sur un intervalle quelconque

Théorème 62 (intégration par parties). — *Soient I un intervalle d'intérieur non vide, $a = \inf(I) \in \overline{\mathbf{R}}$ et $b = \sup(I) \in \overline{\mathbf{R}}$. Soit $(f, g) \in \mathrm{C}^1(I, \mathbf{K})^2$ tel que le produit fg possède des limites finies en a et b.*

1. *Les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature.*
2. *Si l'une des deux intégrale converge, alors :*

$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t$$

où $[fg]_a^b := \lim\limits_{x\to b^-} f(x)g(x) - \lim\limits_{x\to a^+} f(x)g(x)$.

Exercice 63. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur. □

Exercice 64. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur. □

Exercice 65. — Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur. □

7. Théorème de changement de variable sur un intervalle ouvert

Lemme 66 (des limites de la réciproque d'une bijection strictement croissante). — *Soit $(\alpha, \beta, a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^4$ tel que $\alpha < \beta$ et $a < b$ et :*

$$\varphi\colon\ ]\alpha, \beta[\longrightarrow]a, b[$$

une bijection strictement croissante. Alors :

$$\varphi^{-1}(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \alpha^+ \qquad \text{et} \qquad \varphi^{-1}(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} \beta^-.$$

Démonstration. — Nous démontrons uniquement le résultat pour la limite de φ^{-1} en b^-, lorsque b et β sont réels.

Nous voulons établir que :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\quad \exists\,r > 0,\quad \forall\,x \in]a, b[,\quad b - r < x < b \Longrightarrow \beta - \varepsilon < \varphi^{-1}(x) < \beta$$

ou encore :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\quad \exists\,r > 0,\quad \forall\,x \in]a, b[,\quad b - r < x \Longrightarrow \beta - \varepsilon < \varphi^{-1}(x)$$

puisque les inégalités (fondamentales) ôtées sont nécessairement vérifiées.

Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \beta - \alpha$. Ainsi, $\beta - \varepsilon \in]\alpha, \beta[$ et :

$$r := b - \varphi(\beta - \varepsilon)$$

est un nombre réel strictement positif bien défini. Soit $x \in]a, b[$ tel que $b - r < x$. Comme $b - r = \varphi(\beta - \varepsilon)$ et comme φ^{-1} est strictement croissante, il vient :

$$\beta - \varepsilon < \varphi^{-1}(x).$$

■

THÉORÈME 67 (CHANGEMENT DE VARIABLE). — *Soit* $(\alpha, \beta, a, b) \in \overline{\mathbf{R}}^4$.

1. *Soient* $f \in \mathscr{C}(\,]a,b[\,,\mathbf{K})$ *et* $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ *une bijection strictement croissante et de classe* $\mathscr{C}^1$. *Alors les intégrales :*
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_\alpha^\beta f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$
ont même nature et sont égales si elles convergent.
2. *Soient* $f \in \mathscr{C}(\,]a,b[\,,\mathbf{K})$ *et* $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ *une bijection strictement décroissante et de classe* $\mathscr{C}^1$. *Alors les intégrales :*
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_\alpha^\beta f((\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$
ont même nature et sont opposées si elles convergent.

DÉMONSTRATION. — Nous nous concentrons sur le premier cas et fixons $\gamma \in]\alpha,\beta[$.

- Plan de l'étude. L'assertion est conséquence des six résultats suivants.

(a) Si $\displaystyle\int_{\varphi(\gamma)}^b f$ converge, alors $\displaystyle\int_\gamma^\beta (f\circ\varphi)\,\varphi'$ converge.

(b) Si $\displaystyle\int_\gamma^\beta (f\circ\varphi)\,\varphi'$ converge, alors $\displaystyle\int_{\varphi(\gamma)}^b f$ converge.

(c) Si $\displaystyle\int_{\varphi(\gamma)}^b f$ et $\displaystyle\int_\gamma^\beta (f\circ\varphi)\,\varphi'$ convergent, alors $\displaystyle\int_{\varphi(\gamma)}^b f = \int_\gamma^\beta (f\circ\varphi)\,\varphi'$.

(d) Si $\displaystyle\int_a^{\varphi(\gamma)} f$ converge, alors $\displaystyle\int_\alpha^\gamma (f\circ\varphi)\,\varphi'$ converge.

(e) Si $\displaystyle\int_\alpha^\gamma (f\circ\varphi)\,\varphi'$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{\varphi(\gamma)} f$ converge.

(f) Si $\displaystyle\int_a^{\varphi(\gamma)} f$ et $\displaystyle\int_\alpha^\gamma (f\circ\varphi)\,\varphi'$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^{\varphi(\gamma)} f = \int_\alpha^\gamma (f\circ\varphi)\,\varphi'$.

En effet, de (a), (b), (d) et (e), nous déduisons que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\,\varphi'$ ont même nature et, dans le cas où les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\,\varphi'$ convergent, les propriétés (c) et (f) apportent l'identité :
$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\,\varphi'.$$

Nous établissons (a), (b) et (c), les propriétés (d), (e) et (f) pouvant être démontrées de manière analogue.

- Limites de φ en α^+ et β^-. Comme φ est strictement croissante, les limites $\lim\limits_{\delta\to\alpha^+}\varphi(\delta)$ et $\lim\limits_{\delta\to\beta^-}\varphi(\delta)$ existent dans $\overline{\mathbf{R}}$. La fonction φ étant de plus continue, il vient :
$$\varphi(\,]\alpha,\beta[\,) = \left]\lim_{\delta\to\alpha^+}\varphi(\delta), \lim_{\delta\to\beta^-}\varphi(\delta)\right[.$$
La surjectivité de φ livre alors :
$$\varphi(\delta) \xrightarrow[\delta\to\alpha^+]{} a \qquad \text{et} \qquad \varphi(\delta) \xrightarrow[\delta\to\beta^-]{} b.$$

- (a) et (c). Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_{\varphi(\gamma)}^b f$ converge, i.e. que $\displaystyle\int_{\varphi(\gamma)}^x f$ possède une limite finie, notée $\displaystyle\int_{\varphi(\gamma)}^b f$, lorsque x tend vers b^-. Nous démontrons qu'alors $\displaystyle\int_\gamma^\delta (f\circ\varphi)\,\varphi'$ possède une limite finie lorsque δ tend vers β^-.

Soit $\delta \in]\gamma,\beta[$. Par théorème de changement de variable sur un segment :
$$\int_\gamma^\delta (f\circ\varphi)\,\varphi' = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\delta)} f.$$
Comme :
$$\int_{\varphi(\gamma)}^x f \xrightarrow[x\to b^-]{} \int_{\varphi(\gamma)}^b f \in \mathbf{R} \qquad \text{et} \qquad \varphi(\delta) \xrightarrow[\delta\to\beta^-]{} b^-$$

il vient :

$$\int_{\gamma}^{\delta}(f\circ\varphi)\,\varphi' = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\delta)} f \xrightarrow[\delta\to\beta^-]{} \int_{\varphi(\gamma)}^{b} f \in \mathbf{R} \qquad [\text{composition de limites}].$$

Nous en déduisons que l'intégrale $\int_{\gamma}^{\beta}(f\circ\varphi)\,\varphi'$ converge et que $\int_{\gamma}^{\beta}(f\circ\varphi)\,\varphi' = \int_{\varphi(\gamma)}^{b} f$, ce qui prouve (a) et (c).

- (b). Supposons que l'intégrale $\int_{\gamma}^{\beta}(f\circ\varphi)\,\varphi'$ converge, i.e. que $\int_{\gamma}^{\delta}(f\circ\varphi)\,\varphi'$ possède une limite finie, notée $\int_{\gamma}^{\beta}(f\circ\varphi)\,\varphi'$, lorsque δ tend vers β^-. Nous démontrons qu'alors $\int_{\varphi(\gamma)}^{x} f$ possède une limite finie lorsque x tend vers b^-.

Soit $x\in]\varphi(\gamma),b[$. Par théorème de changement de variable sur un segment :

$$\int_{\varphi(\gamma)}^{x} f = \int_{\varphi(\gamma)}^{\varphi(\varphi^{-1}(x))} f = \int_{\gamma}^{\varphi^{-1}(x)}(f\circ\varphi)\,\varphi'.$$

Comme :

$$\int_{\gamma}^{\delta}(f\circ\varphi)\,\varphi' \xrightarrow[\delta\to\beta^-]{} \int_{\gamma}^{\beta}(f\circ\varphi)\,\varphi' \in \mathbf{R} \qquad \text{et} \qquad \varphi^{-1}(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} \beta^- \qquad [\text{lemme 66}]$$

il vient :

$$\int_{\varphi(\gamma)}^{x} f = \int_{\gamma}^{\varphi^{-1}(x)}(f\circ\varphi)\,\varphi' \xrightarrow[x\to b^-]{} \int_{\gamma}^{\beta}(f\circ\varphi)\,\varphi' \in \mathbf{R} \qquad [\text{composition de limites}].$$

Nous en déduisons que l'intégrale $\int_{\varphi(\gamma)}^{b} f$ converge ce qui prouve (a) (et donne une deuxième démonstration de (c)).

■

EXERCICE 68. — Soit $\alpha\in\mathbf{R}$. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(2-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$. □

EXERCICE 69. — Établir la convergence et calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. □

EXERCICE 70. — Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et qu'elle est nulle. □

EXERCICE 71. — Soient $m\in\mathbf{R}$ et $\sigma\in\mathbf{R}_+^*$. Sachant que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$, démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}x$ et préciser sa valeur. □

§ 7. INTÉGRABILITÉ SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

1. DÉFINITION D'UNE FONCTION INTÉGRABLE SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

> **DÉFINITION 72 (FONCTION INTÉGRABLE SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE).** — *Soient I un intervalle d'intérieur non vide. et $f\in\mathscr{C}_{pm}([a,+\infty,\mathbf{K})$. On dit que la fonction f est intégrable sur I ou que l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.*

Remarque 73 (intégrabilité d'une fonction de signe constant). — Soient I un intervalle d'intérieur non vide. et $f\in\mathscr{C}_{pm}([a,+\infty,\mathbf{K})$ une fonction de signe constant. La fonction f est intégrable sur I si et seulement si l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. ■

THÉORÈME 74 (LA CONVERGENCE ABSOLUE IMPLIQUE LA CONVERGENCE). — *Soit $f \in \mathscr{C}_{pm}([I,\mathbf{K})$. Si f est intégrable sur I, alors l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*

***Exemple 75.* —** L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais non-absolument convergente. Elle est alors dite semi-convergente. ■

EXERCICE 76. — Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t^2)\,e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais non-absolument convergente. Elle est alors dite semi-convergente. □

2. L'ESPACE $L^1(I,\mathbf{K})$ DES FONCTIONS INTÉGRABLES DE I DANS $\mathbf{K}$

DÉFINITION 77 (ESPACE $L^1(I,\mathbf{K})$ DES FONCTIONS INTÉGRABLES DE I DANS $\mathbf{K}$). — *Soit I un intervalle d'intérieur non vide. L'ensemble :*

$$L^1(I,\mathbf{K}) := \left\{ f \in \mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{K}) \ : \ \int_I |f| \text{ converge} \right\}$$

des fonctions intégrales de I dans $\mathbf{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_{pm}(I,\mathbf{K})$.

PROPOSITION 78 (INÉGALITÉ TRIANGULAIRE). — *Soit I un intervalle d'intérieur non vide. Alors :*

$$\forall f \in L^1(I,\mathbf{K}), \qquad \left| \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

EXERCICE 79. — Soit I un intervalle d'intérieur non vide. Démontrer que l'application :

$$\|\cdot\|_1 \ \left| \begin{array}{ccc} L^1(I,\mathbf{K}) \cap \mathscr{C}(I,\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \longmapsto & \int_I |f| \end{array} \right.$$

définie une norme sur le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $L^1(I,\mathbf{K}) \cap \mathscr{C}(I,\mathbf{K})$. □

3. THÉORÈME DE COMPARAISON EN UNE BORNE QUELCONQUE

THÉORÈME 80 (DE COMPARAISON EN UNE BORNE QUELCONQUE). — *Soient $a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $b \in \overline{\mathbf{R}}$ tels que $a < b$.*

1. *Soient $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b[\,,\mathbf{K})$ et $g \in \mathscr{C}_{pm}([a,b[\,,\mathbf{K})$*
   (a) *Supposons $f(x) \underset{x\to b^-}{=} \mathrm{O}(g(x))$. Alors :*
   $$g \text{ intégrable sur } [a,b[\quad \Longrightarrow \quad f \text{ intégrable sur } [a,b[.$$
   (b) *Supposons $f(x) \underset{x\to b^-}{\sim} g(x)$. Alors :*
   $$f \text{ intégrable sur } [a,b[\quad \Longleftrightarrow \quad g \text{ intégrable sur } [a,b[.$$
2. *Soient $f \in \mathscr{C}_{pm}(\,]a,b]\,,\mathbf{K})$ et $g \in \mathscr{C}_{pm}(\,]a,b]\,,\mathbf{K})$*
   (a) *Supposons $f(x) \underset{x\to a^+}{=} \mathrm{O}(g(x))$. Alors :*
   $$g \text{ intégrable sur }]a,b] \quad \Longrightarrow \quad f \text{ intégrable sur }]a,b].$$
   (b) *Supposons $f(x) \underset{x\to a^+}{\sim} g(x)$. Alors :*
   $$f \text{ intégrable sur }]a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad g \text{ intégrable sur }]a,b].$$

EXERCICE 81 (FONCTION Γ). — Déterminer les réels x tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$. □

EXERCICE 82. — Démontrer que les intégrales :

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t$$

convergent et sont égales. En déduire leur valeur commune. □

4. INTÉGRALES DE RIEMANN SINGULIÈRES EN UN POINT RÉEL

PROPOSITION 83 (INTÉGRALES DE RIEMANN SINGULIÈRES EN UN POINT RÉEL). — *Soit $(a,b,\alpha)\in\mathbf{R}^3$ tel que $a<b$. Alors :*

$$\left(\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \iff \alpha<1\right) \quad \text{et} \quad \left(\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ converge} \iff \alpha<1\right).$$

EXERCICE 84. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$. □

EXERCICE 85. — Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$. □

§ 8. INTÉGRATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

THÉORÈME 86 (INTÉGRATION DES o). — *On énonce deux versions, suivant l'emplacement de la singularité.*

Soient $(a,b)\in\overline{\mathbf{R}}^2$ tel que $-\infty<a<b\leqslant+\infty$. Soient $f\in\mathscr{C}_{pm}([a,b[\,,\mathbf{R})$ et $g\in\mathscr{C}_{pm}([a,b[\,,\mathbf{R}_+)$ telles que $f(t)\underset{t\to b^-}{=}\mathrm{o}(g(t))$.

(a) Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge et :

$$\int_x^b f \underset{x\to b^-}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^b g\right).$$

(b) Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors

$$\int_a^x f \underset{x\to b^-}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g\right).$$

Soient $(a,b)\in\overline{\mathbf{R}}^2$ tel que $-\infty\leqslant a<b<+\infty$. Soient $f\in\mathscr{C}_{pm}(]a,b]\,,\mathbf{R})$ et $g\in\mathscr{C}_{pm}(]a,b]\,,\mathbf{R}_+)$ telles que $f(t)\underset{t\to b}{=}\mathrm{o}(g(t))$.

(a) Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge et :

$$\int_a^x f \underset{x\to a^+}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g\right).$$

(b) Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors

$$\int_x^b f \underset{x\to a^+}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^b g\right).$$

DÉMONSTRATION. — Nous établissons les résultats de la colonne de gauche, lorsque $a\in\mathbf{R}$ et $b=+\infty$. Soient donc $f\in\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,+\infty[\,,\mathbf{R})$ et $g\in\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,+\infty[\,,\mathbf{R}_+)$ telles que $f(t)\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{o}(g(t))$.

(a) Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge.

- Intégrabilité de f sur $[a,+\infty[$. Comme $f(t)\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{O}(g(t))$, l'intégrabilité de f sur $[a,+\infty[$ se déduit du théorème 36.
- Les queues des intégrales de f sont négligeables devant les queues des intégrales de g au voisinage de $+\infty$.

L'assertion $\displaystyle\int_x^{+\infty} f \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} g\right)$, à démontrer, peut se formuler comme suit :

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,a_\varepsilon\geqslant a,\quad \forall\,x\geqslant a_\varepsilon,\quad \left|\int_x^{+\infty} f\right|\leqslant\varepsilon\int_x^{+\infty} g.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(g(t)\big)$:

$$\exists\, a_\varepsilon \geqslant a, \quad \forall\, t \geqslant a_\varepsilon, \quad \big|f(t)\big| \leqslant \varepsilon\, g(t).$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant a_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \left|\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_x^{+\infty} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t && \big[\text{inégalité triangulaire}\big] \\ &\leqslant \varepsilon \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t && \big[|f| \leqslant \varepsilon\, g \text{ sur } [x,+\infty[\text{ et croissance de l'intégrale}\big]. \end{aligned}$$

(b) Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge.

- Comportement asymptotique des intégrales partielles de g. Comme la fonction g est positive, la fonction :

$$I \left| \begin{array}{ccc} [a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x g \end{array}\right.$$

est croissante. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge, la fonction I n'admet pas de limite finie en $+\infty$. Par théorème de la limite monotone :

$$(\star) \qquad \int_a^x g \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

- Les intégrales partielles de f sont négligeables devant les intégrales partielles de g au voisinage de $+\infty$.

L'assertion $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g\right)$, à démontrer, peut se formuler comme suit :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, a_\varepsilon \geqslant a, \quad \forall\, x \geqslant a_\varepsilon, \quad \left|\int_a^x f\right| \leqslant \varepsilon \int_a^x g.$$

Pour établir ce résultat, nous adaptons la démonstration du théorème de Cesàro que nous avons rédigée auparavant.
Soit $\varepsilon > 0$.

(i) Comme $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(g(t)\big)$:

$$\exists\, a_{1,\varepsilon} \geqslant a, \quad \forall\, t \geqslant a_{1,\varepsilon}, \quad \big|f(t)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, g(t).$$

Ainsi, pour tout $x \geqslant a_{1,\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \left|\int_{a_{1,\varepsilon}}^x f\right| &\leqslant \int_{a_{1,\varepsilon}}^x |f| && \big[\text{inégalité triangulaire}\big] \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{a_{1,\varepsilon}}^x g && \Big[|f| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, g \text{ sur } [a_{1,\varepsilon}, x] \text{ et croissance de l'intégrale}\Big] \\ &\underset{(\star\star)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g && \big[g \geqslant 0 \text{ et relation de Chasles}\big]. \end{aligned}$$

(ii) D'après $(\star)$, la quantité $\displaystyle\int_a^x g$ est non nulle sur un voisinage de $+\infty$ et, comme $\displaystyle\left|\int_a^{a_{1,\varepsilon}} f\right|$ est une constante :

$$\frac{\left|\displaystyle\int_a^{a_{1,\varepsilon}} f\right|}{\displaystyle\int_a^x g} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi :

$$(\star\star\star) \qquad \exists\, a_{2,\varepsilon} \geqslant a, \quad \forall\, x \geqslant a_{2,\varepsilon}, \quad \left|\int_a^{a_{1,\varepsilon}} f\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g.$$

Posons $a_\varepsilon := \max\{a_{1,\varepsilon}, a_{2,\varepsilon}\}$. Pour tout $x \geqslant a_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^x f\right| &= \left|\int_a^{a_{1,\varepsilon}} f + \int_{a_{1,\varepsilon}}^x f\right| && \text{[relation de Chasles]}\\
&\leqslant \left|\int_a^{a_{1,\varepsilon}} f\right| + \left|\int_{a_{1,\varepsilon}}^x f\right| && \text{[inégalité triangulaire]}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g + \frac{\varepsilon}{2}\int_a^x g && [(\star\star) \text{ et } (\star\star\star)]\\
&= \varepsilon\int_a^x g.
\end{aligned}$$

■

Théorème 87 (intégration des O). — *On énonce deux versions, suivant l'emplacement de la singularité.*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ tel que $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Soient $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b[, \mathbf{R})$ et $g \in \mathscr{C}_{pm}([a,b[, \mathbf{R}_+)$ telles que $f(t) \underset{t\to b^-}{=} \mathrm{O}(g(t))$.

(a) Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b |f|$ converge et :

$$\int_x^b f \underset{x\to b^-}{=} \mathrm{O}\left(\int_x^b g\right).$$

(b) Si $\int_a^b g$ diverge, alors

$$\int_a^x f \underset{x\to b^-}{=} \mathrm{O}\left(\int_a^x g\right).$$

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ tel que $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. Soient $f \in \mathscr{C}_{pm}(]a,b], \mathbf{R})$ et $g \in \mathscr{C}_{pm}(]a,b], \mathbf{R}_+)$ telles que $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{O}(g(t))$.

(a) Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b |f|$ converge et :

$$\int_a^x f \underset{x\to a^+}{=} \mathrm{O}\left(\int_a^x g\right).$$

(b) Si $\int_a^b g$ diverge, alors

$$\int_x^b f \underset{x\to a^+}{=} \mathrm{O}\left(\int_x^b g\right).$$

Éléments de démonstration. — Adapter la démonstration rédigée du théorème 86. □

Corollaire 88 (intégration des équivalents). — *On énonce deux versions, suivant l'emplacement de la singularité.*

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ tel que $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Soient $f \in \mathscr{C}_{pm}([a,b[, \mathbf{R})$ et $g \in \mathscr{C}_{pm}([a,b[, \mathbf{R}_+)$ telles que $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$.

(a) Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b |f|$ converge et :

$$\int_x^b f \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g.$$

(b) Si $\int_a^b g$ diverge, alors

$$\int_a^x f \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g.$$

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ tel que $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. Soient $f \in \mathscr{C}_{pm}(]a,b], \mathbf{R})$ et $g \in \mathscr{C}_{pm}(]a,b], \mathbf{R}_+)$ telles que $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$.

(a) Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b |f|$ converge et :

$$\int_a^x f \underset{x\to a^+}{\sim} \int_a^x g.$$

(b) Si $\int_a^b g$ diverge, alors

$$\int_x^b f \underset{x\to a^+}{\sim} \int_x^b g.$$

DÉMONSTRATION. — Nous établissons les résultats de la colonne de gauche, lorsque $a \in \mathbf{R}$ et $b = +\infty$. Soient donc $f \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,+\infty[\,,\mathbf{R})$ et $g \in \mathscr{C}_{\text{pm}}([a,+\infty[\,,\mathbf{R}_+)$ telles que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$. Cette dernière hypothèse se reformule :

$$f(t) - g(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(g(t)\big).$$

Cette observation va nous permettre de déduire aisément le corollaire du théorème 86.

(a) Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge.

- Intégrabilité de f sur $[a,+\infty[$. Comme $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, l'intégrabilité de f sur $[a,+\infty[$ se déduit du théorème 36.
- Les queues des intégrales de f sont équivalentes aux queues des intégrales de g au voisinage de $+\infty$. D'après le théorème 86 :

$$\int_x^{+\infty} f - \int_x^{+\infty} g = \int_x^{+\infty} (f-g) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} g\right)$$

d'où $\displaystyle\int_x^{+\infty} f \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g$.

(b) Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge. D'après le théorème 86 :

$$\int_a^{x} f - \int_a^{x} g = \int_a^{x} (f-g) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^{x} g\right)$$

d'où $\displaystyle\int_a^{x} f \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_a^{x} g$.

■

EXERCICE 89. — Soit la fonction :

$$\varphi\colon x \longmapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition I de la fonction φ.
2. Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et donner sa dérivée.
3. En considérant $\varphi(x) - \varphi(1)$, démontrer $\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.
4. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer :

$$\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{e^{-x}}{x} + \mathrm{O}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)$$

   et en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de $+\infty$.
5. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

□