

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

par David Blottière, le 17 novembre 2023 à 06h06

CHAPITRE

6

SOMMAIRE

§ 1. NORME SUR UN ESPACE VECTORIEL	2
1. DÉFINITION D'UNE NORME ET EXEMPLES FONDAMENTAUX	2
2. DISTANCE ASSOCIÉE À UNE NORME	3
3. BOULES	4
4. SEGMENTS	5
5. PARTIE CONVEXE D'UN \mathbf{R} -ESPACE VECTORIEL	6
6. PARTIES ET SUITES BORNÉES	7
7. NORME DE LA CONVERGENCE UNIFORME SUR UN ESPACE DE FONCTIONS BORNÉES	8
8. PRODUIT D'UN NOMBRE FINI D'ESPACES VECTORIELS NORMÉS	9
§ 2. SUITE D'ÉLÉMENTS D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ	10
1. DÉFINITION ET EXEMPLES	10
2. CONVERGENCE DANS UN ESPACE PRODUIT	12
3. SUITES EXTRAITES ET VALEURS D'ADHÉRENCE	12
§ 3. COMPARAISON DE NORMES	14
§ 4. TOPOLOGIE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ	17
1. OUVERTS ET FERMÉS	17
2. VOISINAGES D'UN POINT	19
3. ADHÉRENCE D'UNE PARTIE	20
4. DENSITÉ D'UNE PARTIE	22
5. INTÉRIEUR D'UNE PARTIE	23
6. FRONTIÈRE D'UNE PARTIE	25
7. PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES INVARIANTES POUR DES NORMES ÉQUIVALENTES	25
8. TOPOLOGIE INDUITE	26
§ 5. ÉTUDE LOCALE D'UNE APPLICATION, CONTINUITÉ	27
1. NOTION DE LIMITE DE FONCTION	27
2. CONTINUITÉ D'UNE FONCTION	28
3. APPLICATIONS UNIFORMÉMENT CONTINUES	30
4. APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES	30
§ 6. APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES	31
1. CARACTÉRISATION DES APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES	31
2. OPÉRATIONS SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES	32
3. NORME SUBORDONNÉE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE CONTINUE	32
4. NORME SUBORDONNÉE D'UNE MATRICE CARRÉE	33
5. INÉGALITÉS POUR LES NORMES SUBORDONNÉES	33
6. APPLICATIONS MULTILINÉAIRES CONTINUES	33
§ 7. COMPACTITÉ	35
1. PROPRIÉTÉ DE BOLZANO-WEIERSTRASSET DÉFINITION DE LA COMPACTITÉ	35
2. CARACTÈRE COMPACT VERSUS CARACTÈRES FERMÉ ET BORNÉ	35
3. CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE DE CONVERGENCE DANS UN COMPACT	36
4. PRODUIT D'UN NOMBRE FINI DE COMPACTS	36
§ 8. APPLICATIONS CONTINUES SUR UNE PARTIE COMPACTE	36
§ 9. CONNEXITÉ PAR ARCS	37
1. ARC JOIGNANT DEUX POINTS ET PARTIE CONNEXE PAR ARCS	37
2. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES	38
§ 10. ESPACES VECTORIELS NORMÉS DE DIMENSION FINIE	39
1. ÉQUIVALENCE DES NORMES ET INVARIANCE DES NOTIONS TOPOLOGIQUES	39
2. CONVERGENCE DES SUITES EN DIMENSION FINIE	40
3. COMPACTITÉ EN DIMENSION FINIE	41
4. CARACTÈRE FERMÉ D'UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE	41
5. APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE	41
6. APPLICATIONS MULTILINÉAIRES EN DIMENSION FINIE	42

§ 1. NORME SUR UN ESPACE VECTORIEL

1. DÉFINITION D'UNE NORME ET EXEMPLES FONDAMENTAUX

NOTATION. — \mathbf{K} désigne le corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} . ■

DÉFINITION

DÉFINITION 1 (NORME SUR UN ESPACE VECTORIEL). — Une norme sur un \mathbf{K} -espace vectoriel E est une application

$$\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbf{R}_+$$

vérifiant les propriétés suivantes.

1. *Séparation*

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

2. *Propriété d'homogénéité*

$$\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$$

3. *Inégalité triangulaire*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

On dit alors que $(E, \| \cdot \|)$ est un *espace vectoriel normé* (evn en abrégé).

Remarque 2 (deuxième inégalité triangulaire). — L'inégalité triangulaire implique l'inégalité suivante, appelée deuxième inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Remarque 3 (une autre notation usuelle pour une norme). — Une norme est parfois aussi notée N . Le réel $N(x)$ désigne alors la norme du vecteur x . ■

PROPOSITION 4 (NORME ASSOCIÉE À UN PRODUIT SCALAIRE). — Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien (réel). L'application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme sur E .

Exemple 5 (normes usuelles sur \mathbf{R} et \mathbf{C}). — La valeur absolue est une norme sur \mathbf{R} . Le module est une norme sur \mathbf{C} . ■

Exemple 6 (normes usuelles sur \mathbf{R}^n). — Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Les applications :

$$\| \cdot \|_1 \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i| \end{array} \right. \quad \| \cdot \|_2 \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{array} \right. \quad \| \cdot \|_\infty \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| \end{array} \right.$$

sont des normes sur \mathbf{R}^n . La norme $\| \cdot \|_2$ est associée au produit scalaire canonique sur \mathbf{R}^n , défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Exemple 7 (normes usuelles sur $\mathbf{R}[X]$). — Les applications :

$$\| \cdot \|_1 \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i| \end{array} \right. \quad \| \cdot \|_2 \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ P \mapsto \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} [P]_i^2} \end{array} \right. \quad \| \cdot \|_\infty \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ P \mapsto \max_{i \in \mathbf{N}} |[P]_i| \end{array} \right.$$

sont des normes sur $\mathbf{R}[X]$. La norme $\|\cdot\|_2$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini sur $\mathbf{R}[X]$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle := \sum_{i=0}^{+\infty} [P]_i [Q]_i.$$

Exemple 8 (normes usuelles sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$). — Soient a, b des réels tels que $a < b$ et $E := \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ le \mathbf{R} -espace vectoriel des fonctions définie sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbf{R} , qui sont continues sur le segment $[a, b]$. Les applications :

$$\|\cdot\|_1 \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ f \longmapsto \int_a^b |f(t)| dt \end{array} \right. \quad \|\cdot\|_2 \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ f \longmapsto \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \end{array} \right. \quad \|\cdot\|_\infty \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ P \longmapsto \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \end{array} \right.$$

sont des normes sur E . La norme $\|\cdot\|_2$ est associée au produit scalaire canonique sur E , défini par :

$$\forall (f, g) \in E \times E, \quad \langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt.$$

et le caractère bien défini de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est assuré par le théorème des bornes atteintes.

EXERCICE 9. — Soit la fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbf{R})$ définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto x \cdot e^{-2x}. \end{array} \right.$$

Calculer $\|f\|_1, \|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$.

EXERCICE 10 (UNE NORME SUR UN ESPACE DE FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES). — Soient a, b des réels tels que $a < b$. Démontrer que l'application :

$$\|\cdot\|_2 \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ f \longmapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \end{array} \right.$$

où $|\cdot|$ désigne le module, est une norme sur le \mathbf{C} -espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{C})$.

DÉFINITION 11 (VECTEUR UNITAIRE, VECTEUR UNITAIRE ASSOCIÉ À UN VECTEUR NON NUL). — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Un vecteur x de E est dit unitaire si $\|x\| = 1$.
2. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Le vecteur $\frac{1}{\|x\|} \cdot x$ est unitaire. On l'appelle vecteur unitaire associé à x .

2. DISTANCE ASSOCIÉE À UNE NORME

DÉFINITION 12 (DISTANCE ASSOCIÉE À UNE NORME). — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. La distance associée à la norme $\|\cdot\|$ est l'application :

$$d \left| \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x, y) \longmapsto d(x, y) := \|x - y\|. \end{array} \right.$$

PROPOSITION 13 (PROPRIÉTÉS D'UNE DISTANCE). — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. La distance d vérifie les propriétés suivantes :

1. *Symétrie*

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad d(x, y) = d(y, x)$$

2. *Séparation*

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

3. *Inégalité triangulaire*

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

DÉMONSTRATION. —

1. Soit $(x, y) \in E^2$. D'après l'homogénéité de la norme :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

2. Conséquence immédiate de la séparation de la norme.

3. Soit $(x, y, z) \in E^3$. D'après l'inégalité triangulaire de la norme :

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$



3. BOULES

DÉFINITION 14 (BOULES OUVERTES, BOULES FERMÉES, SPHÈRE). — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Notons d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$ et fixons $(a, E) \in E \times \mathbf{R}_{>0}$.

1. La boule ouverte de centre a et de rayon r , notée $B(a, r)$, est l'ensemble des éléments de E dont la distance à a est strictement inférieure à r , soit :

$$B(a, r) := \{x \in E : \|x - a\| < r\} = \{x \in E : d(x, a) < r\}.$$

2. La boule fermée de centre a et de rayon r , notée $B_f(a, r)$, est l'ensemble des éléments de E dont la distance à a est inférieure ou égale à r , soit :

$$B_f(a, r) := \{x \in E : \|x - a\| \leq r\} = \{x \in E : d(x, a) \leq r\}.$$

3. La sphère de centre a et de rayon r , notée $S(a, r)$, est l'ensemble des éléments de E dont la distance à a est égale à r , soit :

$$S(a, r) := \{x \in E : \|x - a\| = r\} = \{x \in E : d(x, a) = r\}.$$

On a donc $B_f(a, r) = B(a, r) \sqcup S(a, r)$.

Remarque 15 (boule unité, sphère unité). — La boule unité ouverte (resp. fermée) est la boule ouverte (resp. fermée) de centre le vecteur nul et de rayon 1. La sphère unité est la sphère de centre le vecteur nul et de rayon 1. ■

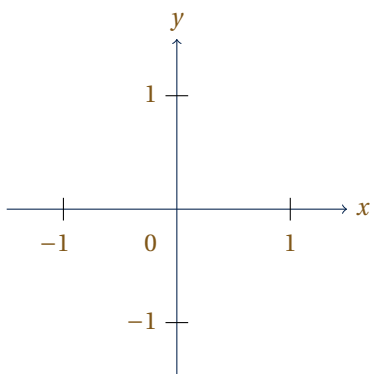
Exemple 16 (boules dans \mathbf{R} muni de la valeur absolue). — Dans l'espace vectoriel \mathbf{R} muni de la valeur absolue $|\cdot|$, pour $a \in \mathbf{R}$ et $r > 0$, on a :

$$B(a, r) =]a - r, a + r[\quad \text{et} \quad B_f(a, r) = [a - r, a + r].$$

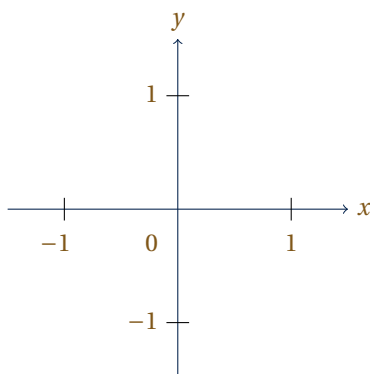


EXERCICE 17 (BOULES UNITÉ FERMÉES DANS \mathbf{R}^2 POUR LES TROIS NORMES USUELLES). — Dans l'espace vectoriel \mathbf{R}^2 , l'allure des boules dépend de la norme. Déterminer, puis représenter, la boule unité fermée pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

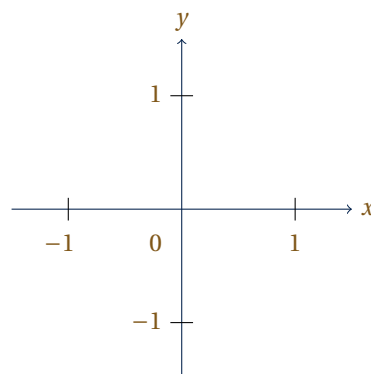
$B_f(0, 1)$ pour $\|\cdot\|_1$



$B_f(0, 1)$ pour $\|\cdot\|_2$



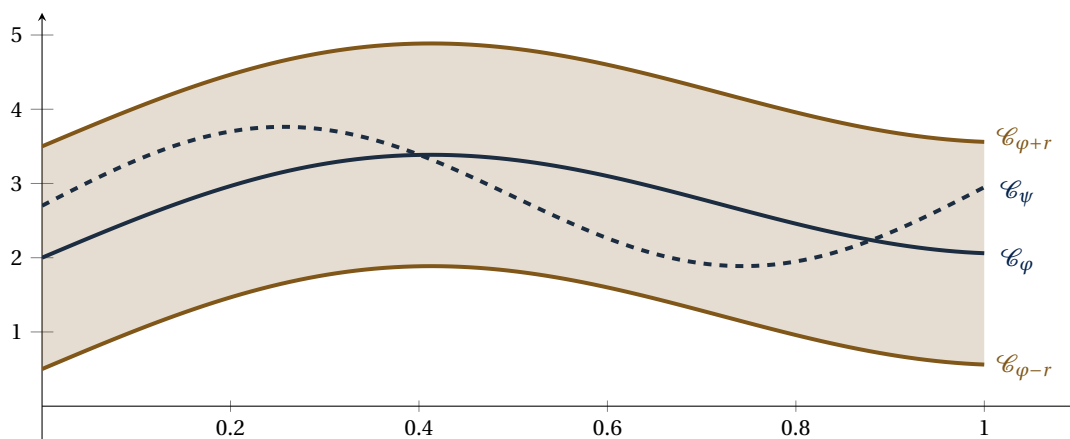
$B_f(0, 1)$ pour $\|\cdot\|_\infty$



Exemple 18 (boule pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans un espace de fonctions). — Soit $(\varphi, r) \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}) \times \mathbf{R}_{>0}$. Alors, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} \psi \in B_f(\varphi, r) &\iff \|\varphi - \psi\|_\infty \leq r \\ &\iff \forall x \in [0, 1], \quad |\varphi(x) - \psi(x)| \leq r \\ &\iff \forall x \in [0, 1], \quad \varphi(x) - r \leq \psi(x) \leq \varphi(x) + r \\ &\iff \varphi - r \leq \psi \leq \varphi + r \end{aligned}$$

Les fonctions ψ de $B_f(\varphi, r)$ sont donc celles qui ont leur courbe représentative dans le « tube » ci-dessous.



EXERCICE 19 (BOULES IDENTIQUES). — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé tel que $E \neq \{0_E\}$. Soit $(a_1, a_2, r_1, r_2) \in E \times E \times \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}_{>0}$ tel que $B(a_1, r_1) = B(a_2, r_2)$. Démontrer : $a_1 = a_2$ et $r_1 = r_2$. □

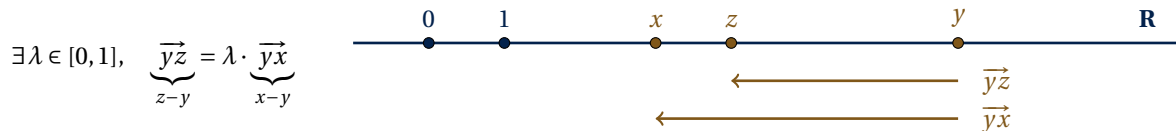
4. SEGMENTS

NOTATION. — La lettre E désigne un \mathbf{R} -espace vectoriel.

HEURISTIQUE. — Nous avons déjà rencontré la notion de segment dans le contexte des nombres réels. Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors le segment $[x, y]$ est défini par :

$$[x, y] := \{z \in \mathbf{R} : x \leq z \leq y\}.$$

Nous ne pouvons étendre immédiatement cette définition au \mathbf{R} -espace vectoriel E , puisque nous ne disposons pas *a priori* de relation d'ordre sur E . Nous pouvons observer, au moyen d'une figure qu'un réel z appartient au segment $[x, y]$ si et seulement si :



i.e. si et seulement si il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $z = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y$. Ces considérations conduisent à formuler l'énoncé suivant.

LEMME 20 (DESCRIPTION EN EXTENSION D'UN SEGMENT RÉEL). — Soient x, y des nombres réels tels que $x < y$. Alors :

$$\{z \in \mathbf{R} : x \leq z \leq y\} = \{\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y : \lambda \in [0, 1]\}.$$

DÉMONSTRATION. — \square Soit $z \in \{\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y : \lambda \in [0, 1]\}$.

- Comme $x \leq y$ et $\lambda \geq 0$, $\lambda x \leq \lambda y$, d'où $z = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \leq \lambda \cdot y + (1 - \lambda) \cdot y = y$.
- Comme $x \leq y$ et $1 - \lambda \geq 0$, $(1 - \lambda) \cdot x \leq (1 - \lambda) \cdot y$, d'où $x = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot x \leq \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y = z$.

Ainsi $x \leq z \leq y$.

☐ Soit $z \in \mathbf{R}$ tel que $x \leq z \leq y$. Nous devons déterminer un $\lambda \in [0, 1]$ tel que $z = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y$. Une rapide analyse nous invite à poser $\lambda := \frac{z-y}{x-y} = \frac{y-z}{y-x}$. Vérifions que ce choix convient.

- Comme $y - z \geq 0$ et $y - x > 0$, $\lambda = \frac{y-z}{y-x} \geq 0$.
- Comme $x \leq z$, $-z \leq -x$ et donc $y - z \leq y - x$. Puisque $y - x > 0$, il vient $\lambda = \frac{y-z}{y-x} \leq 1$.
- $\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y = \frac{z-y}{x-y} \cdot x + \left(1 - \frac{z-y}{x-y}\right) \cdot y = \frac{z-y}{x-y} \cdot x + \frac{x-z}{x-y} \cdot y = \frac{zx - yx + xy - zy}{x-y} = z$.

SUITE DE L'HEURISTIQUE. — Nous en déduisons que si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors :

$$[x, y] = \{\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y : \lambda \in [0, 1]\}.$$

On peut à présent étendre la notion de segment de \mathbf{R} au \mathbf{R} -espace vectoriel E .

DÉFINITION 21 (SEGMENT). — Soit $(x, y) \in E^2$. On définit le segment d'extrémités x et y , noté $[x, y]$, par :

$$[x, y] := \{\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y : \lambda \in [0, 1]\}.$$

$z = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y$ où $\lambda \in [0, 1]$

$z - y =: \vec{yz} = \lambda \cdot \vec{yx} = \lambda \cdot (x - y)$

$x - y =: \vec{yx}$

Remarque 22 (un segment n'est pas orienté). — Soient $x, y \in E$. En raisonnant par double inclusion, on démontre :

$$\{\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y : \lambda \in [0, 1]\} = \{\mu \cdot y + (1 - \mu) \cdot x : \mu \in [0, 1]\}.$$

Ainsi les segments $[x, y]$ et $[y, x]$ sont égaux.

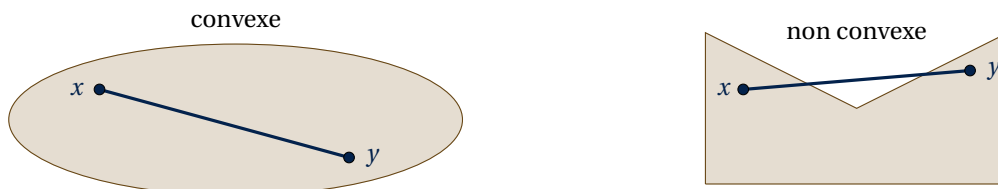
5. PARTIE CONVEXE D'UN \mathbf{R} -ESPACE VECTORIEL

NOTATION. — La lettre E désigne un \mathbf{R} -espace vectoriel.

DÉFINITION 23 (PARTIE CONVEXE DE E). — Une partie C de E est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \quad [x, y] \subset C.$$

Remarque 24 (illustration de la notion de convexité). — Nous représentons ci-dessous une partie convexe et une partie non convexe de \mathbf{R}^2 .



EXERCICE 25 (PARTIES CONVEXES DE \mathbf{R}). — On rappelle qu'une partie I de \mathbf{R} est un intervalle si :

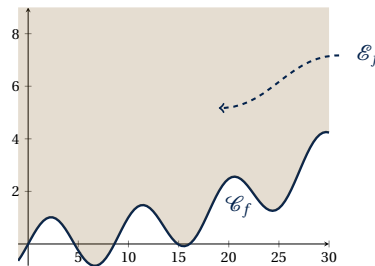
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall z \in \mathbf{R}, \quad x \leq z \leq y \implies z \in I.$$

Démontrer qu'une partie C de \mathbf{R} est convexe si et seulement si C est un intervalle.

EXERCICE 26 (FONCTION CONVEXE VERSUS ÉPIGRAPHE CONVEXE). — Soient I un intervalle de \mathbf{R} et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. L'épigraphe de la fonction f est la partie du plan définie par

$$\mathcal{E}_f := \{(x, y) \in I \times \mathbf{R} : f(x) \leq y\}.$$

La partie \mathcal{E}_f du plan est donc la réunion du graphe \mathcal{C}_f de f et de la partie du plan située au-dessus \mathcal{C}_f .



Démontrer que :

$$\text{la fonction } f \text{ est convexe} \iff \text{la partie } \mathcal{E}_f \text{ de } \mathbf{R}^2 \text{ est convexe}$$

□

PROPOSITION 27 (LES BOULES D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ SONT CONVEXES). — Soient (E, N) un \mathbf{R} -espace vectoriel normé, $(a, r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}$. Les boules :

$$B(a, r) := \{x \in E : N(x - a) < r\} \quad \text{et} \quad B_f(a, r) := \{x \in E : N(x - a) \leq r\}$$

sont des parties convexes de E .

EXERCICE 28 (ENVELOPPE CONVEXE D'UNE SPHÈRE). — Soient (E, N) un \mathbf{R} -espace vectoriel normé, $(a, r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}$. On considère la sphère de centre a et de rayon r :

$$S(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^2 : N(x - a) = r\}.$$

Déterminer la plus petite partie convexe de E qui contient $S(a, r)$.

□

EXERCICE 29 (UNE CARACTÉRISATION DE LA CONVEXITÉ À LA MANIÈRE DE JENSEN). — Démontrer qu'une partie C de E est convexe si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbf{N}_{\geq 2}, \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^n, \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbf{R}_+)^n \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \implies \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k \in C.$$

□

6. PARTIES ET SUITES BORNÉES

DÉFINITION 30 (PARTIE BORNÉE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ). — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $X \in \mathcal{P}(E)$. On dit que X est une partie bornée de E pour la norme $\|\cdot\|$ si :

$$\exists M \in \mathbf{R}_+, \quad \forall x \in X, \quad \|x\| \leq M.$$

EXERCICE 31. — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $X \in \mathcal{P}(E)$. Démontrer que la partie X est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule fermée.

□

EXERCICE 32. — On munit \mathbf{R}^2 de la norme $\|\cdot\|_2$. Les parties :

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\} \quad \text{et} \quad B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - 2y^2 \leq 1\}$$

sont-elles bornées?

□

EXERCICE 33 (DIAMÈTRE D'UNE PARTIE NON VIDE BORNÉE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ). — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1 Soit A une partie non vide et bornée de E . Justifier que le diamètre de A , défini par :

$$\delta(A) := \sup_{(a_1, a_2) \in A^2} \|a_1 - a_2\|$$

est bien défini.

2 Soit $(a, r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}$. Calculer le diamètre de la boule ouverte $B(a, r)$.

□

DÉFINITION 34 (SUITE BORNÉE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ). — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que x est une suite bornée de E pour la norme $\|\cdot\|$ si :

$$\exists M \in \mathbf{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| \leq M$$

i.e. si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E pour la norme $\|\cdot\|$.

EXERCICE 35 (LE CARACTÈRE BORNÉ PEUT DÉPENDRE DE LA NORME). — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \sqrt{n} \cdot x^n. \end{array} \right.$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle bornée pour la norme $\|\cdot\|_1$? pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$?

□

7. NORME DE LA CONVERGENCE UNIFORME SUR UN ESPACE DE FONCTIONS BORNÉES

DÉFINITION 36 (FONCTION BORNÉE). — Soient X un ensemble non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une fonction $f: X \longrightarrow E$ est bornée si :

$$\exists M \in \mathbf{R}_+, \quad \forall x \in X, \quad \|f(x)\| \leq M$$

i.e. si $\{f(x) : x \in X\}$ est une partie bornée de E pour la norme $\|\cdot\|$.

THÉORÈME 37 (ESPACE VECTORIEL NORMÉ DES FONCTIONS BORNÉES). — Soient X un ensemble non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On pose :

$$\mathcal{B}(X, E) := \{f \in E^X : f \text{ est bornée}\}.$$

1. L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ est un sous-espace vectoriel de E^X .
2. L'application :

$$\|\cdot\|_{\infty} \left| \begin{array}{l} \mathcal{B}(X, E) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ f \longmapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\| \end{array} \right.$$

est bien définie et est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$, appelée norme de la convergence uniforme sur E .

DÉMONSTRATION. —

1. Démontrons d'abord que $\mathcal{B}(X, E)$ est un sous-espace vectoriel de E^X .

- L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ est non vide. La fonction nulle sur X , i.e. l'application :

$$O_{E^X} \left| \begin{array}{l} X \longrightarrow E \\ x \longmapsto 0_E \end{array} \right.$$

est bornée, donc $O_{E^X} \in \mathcal{B}(X, E)$.

- L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ est stable par combinaison linéaire. Soient $(f, g) \in \mathcal{B}(X, E)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Il existe $(M_f, M_g) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ tels que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leq M_f$ et $\|g(x)\| \leq M_g$. Soit alors $x \in X$. D'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité :

$$\|\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)\| \leq |\lambda| \cdot \|f(x)\| + |\mu| \cdot \|g(x)\| \leq \underbrace{|\lambda| M_f + |\mu| M_g}_{\text{indépendant de } x}.$$

On en déduit que $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est bornée, donc que $\lambda \cdot f + \mu \cdot g \in \mathcal{B}(X, E)$.

2. Démontrons ensuite que l'application $\|\cdot\|_{\infty}$ est bien définie et est une norme.

- **Caractère bien défini.** Soit $f \in \mathcal{B}(X, E)$. Il existe donc $M \in \mathbf{R}_+$ tel que, pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leq M$. L'ensemble :

$$\{\|f(x)\| : x \in X\}$$

est une partie non vide ($X \neq \emptyset$) et bornée (incluse dans $[0, M]$), la propriété de la borne supérieure assure l'existence de $\|f\|_\infty$.

- **Positivité.** Soit $f \in \mathcal{B}(X, E)$. Fixons un élément x_0 de X . Alors :

$$0 \leq \|f(x_0)\| \leq \|f\|_\infty.$$

donc $\|f\|_\infty \geq 0$.

- **Séparation.** D'autre part, si $\|f\|_\infty = 0$, alors, pour tout $x \in X$:

$$0 \leq \|f(x)\| \leq \|f\|_\infty = 0$$

donc $f(x) = 0_E$ (séparation de la norme $\|\cdot\|$), d'où $f = 0_{E^X}$.

- **Homogénéité.** Soit $(\lambda, f) \in \mathbf{K} \times \mathcal{B}(X, E)$. Si $\lambda = 0$, alors $\|\lambda \cdot f\|_\infty = 0 = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$. Supposons désormais $\lambda \neq 0$.

Pour tout $x \in X$:

$$\|\lambda \cdot f(x)\| = |\lambda| \|f(x)\| \leq \underbrace{|\lambda| \|f\|_\infty}_{\text{indépendant de } x \in X}$$

Par passage à la borne supérieure :

$$(\star) \quad \|\lambda \cdot f\|_\infty \leq |\lambda| \|f\|_\infty.$$

L'inégalité (\star) vaut pour tout $\lambda \neq 0$ et pour tout $f \in \mathcal{B}(X, E)$. En effectuant les substitutions :

$$\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad f \leftarrow \lambda \cdot f.$$

il vient :

$$\|f\|_\infty \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \|\lambda \cdot f\|_\infty$$

d'où :

$$(\star\star) \quad |\lambda| \|f\|_\infty \leq \|\lambda \cdot f\|_\infty.$$

De (\star) et $(\star\star)$, on déduit : $\|\lambda \cdot f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$.

- **Inégalité triangulaire.** Soit $(f, g) \in \mathcal{B}(X, E)^2$. Pour tout $x \in X$, l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|$ implique :

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \underbrace{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty}_{\text{indépendant de } x \in X}$$

Par passage à la borne supérieure, il vient $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ■

8. PRODUIT D'UN NOMBRE FINI D'ESPACES VECTORIELS NORMÉS

PROPOSITION 38 (PRODUIT D'UN NOMBRE FINI D'ESPACES VECTORIELS NORMÉS). — Soient un entier $n \geq 2$ et une famille de n espaces vectoriels normés $(E_i, N_i)_{1 \leq i \leq n}$. L'application :

$$N \left| \begin{array}{l} \prod_{i=1}^n E_i \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}_+ \\ x = (x_1, \dots, x_n) \quad \longmapsto \quad N(x) = \max_{1 \leq i \leq n} N_i(x_i) \end{array} \right.$$

est une norme sur $\prod_{i=1}^n E_i$, appelée norme produit.

DÉMONSTRATION. — Montrons que N vérifie les propriétés pour être une norme.

- **Positivité et séparation.** Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $N_i(x_i) \geq 0$, alors $N(x) \geq 0$. Par ailleurs, si $N(x) = 0$, alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $N_i(x_i) = 0$, donc $x_i = 0$. D'où $x = 0$.
- **Homogénéité.** Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Si $\lambda = 0$ alors $N(\lambda \cdot x) = 0 = |\lambda| N(x)$. Supposons désormais $\lambda \neq 0$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$N_i(\lambda \cdot x_i) = |\lambda| N_i(x_i) \leq \underbrace{|\lambda| N(x)}_{\text{indépendant de } i \in \llbracket 1, n \rrbracket}.$$

Par passage au max :

$$(\star) \quad N(\lambda \cdot x) \leq |\lambda| N(x)$$

L'inégalité (\star) vaut pour tout $\lambda \neq 0$ et pour tout $x \in E$. En effectuant les substitutions :

$$\lambda \leftarrow \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad x \leftarrow \lambda \cdot x$$

il vient

$$N(x) \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| N(\lambda \cdot x)$$

d'où :

$$(\star\star) \quad |\lambda| N(x) \leq N(\lambda x).$$

De (\star) et $(\star\star)$, on déduit : $N(\lambda \cdot x) = |\lambda| N(x)$.

- **Inégalité triangulaire.** Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in E$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'inégalité triangulaire pour la norme N_i donne :

$$N_i(x_i + y_i) \leq N_i(x_i) + N_i(y_i) \leq \underbrace{N(x) + N(y)}_{\text{indépendant de } i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

d'où, en passant au maximum, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$. ■

§ 2. SUITE D'ÉLÉMENTS D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

1. DÉFINITION ET EXEMPLES

DÉFINITION 39 (CONVERGENCE D'UNE SUITE). — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de vecteurs de E .

1. Soit $a \in E$ un vecteur. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers a dans $(E, \|\cdot\|)$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad \|u_n - a\| \leq \varepsilon.$$

Si c'est le cas, on écrit :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} a.$$

2. Si la suite (u_n) ne converge vers aucun point, on dit qu'elle diverge.

Remarque 40 (reformulation de la notion de convergence). — Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ et $a \in E$, alors :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} a \quad \iff \quad \|u_n - a\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbf{R}} 0.$$

PROPOSITION 41 (UNICITÉ DE LA LIMITE). — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de E . Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un vecteur a de E , alors ce vecteur a est unique. On le nomme limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et on le note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. ■

DÉMONSTRATION. — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite convergente, soient $a_1, a_2 \in E$ tels que :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} a_1 \quad \text{et} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} a_2.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons $a_1 \neq a_2$, i.e. $\varepsilon := \|a_1 - a_2\| > 0$.

Il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1 : \|u_n - a_1\| \leq \varepsilon/3$ et il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2, \|u_n - a_2\| \leq \varepsilon/3$. En particulier pour $n = \max(N_1, N_2), \|u_n - a_1\| \leq \varepsilon/3$ et $\|u_n - a_2\| \leq \varepsilon/3$. Par suite :

$$\varepsilon = \|a_1 - a_2\| = \|a_1 - u_n + u_n - a_2\| \leq \|a_1 - u_n\| + \|u_n - a_2\| = \|u_n - a_1\| + \|u_n - a_2\| \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Comme $\varepsilon > 0$, nous en déduisons $1 \leq \frac{2}{3}$, ce qui est faux. ■

PROPOSITION 42 (UNE SUITE CONVERGENTE EST BORNÉE). — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de E . Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, alors elle est bornée, i.e. :

$$\exists M \in \mathbf{R}_{>0}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \|u_n\| \leq M.$$

THÉORÈME 43 (ESPACE DES SUITES CONVERGENTES). — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé.

1. L'ensemble $\mathcal{C}(E, \|\cdot\|)$ des suites convergentes dans $(E, \|\cdot\|)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $E^{\mathbf{N}}$ des suites d'éléments de E .
2. De plus, l'application :

$$\left| \begin{array}{ll} \mathcal{C}(E, \|\cdot\|) & \longrightarrow E \\ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} & \longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \end{array} \right.$$

est linéaire.

DÉMONSTRATION. — Remarquons d'abord que la suite nulle converge vers 0 et donc $\mathcal{C}(E, \|\cdot\|)$ est non vide.

Soient maintenant $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites convergentes, de limites respectives a et b . Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Nous allons montrer que la suite $(\lambda \cdot u_n + \mu \cdot v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\lambda \cdot a + \mu \cdot b$, ce qui d'une part achèvera de montrer que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbf{N}}$ et, d'autre part, établira que l'application qui à une suite convergente associe sa limite est linéaire.

Supposons que $|\lambda| + |\mu| \neq 0$ (dans le cas contraire, $\lambda = \mu = 0$ et le résultat voulu est immédiat). Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} > 0$.

Il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1, \|u_n - a\| \leq \varepsilon'$, et il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2, \|v_n - b\| \leq \varepsilon'$. Posons alors $N_3 = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N_3$.

$$\begin{aligned} \left\| (\lambda \cdot u_n + \mu \cdot v_n) - (\lambda \cdot a + \mu \cdot b) \right\| &= \left\| \lambda \cdot (u_n - a) + \mu \cdot (v_n - b) \right\| \\ &\leq |\lambda| \|u_n - a\| + |\mu| \|v_n - b\| \\ &\leq (|\lambda| + |\mu|) \varepsilon' = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda \cdot u_n + \mu \cdot v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda \cdot a + \mu \cdot b$. ■

Exemple 44 (suites convergentes dans \mathbf{R}^2 pour une des trois normes usuelles). — Si $E = \mathbf{R}^2$ et $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\infty}, \|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_2$, alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de terme général $u_n = (x_n, y_n)$ converge vers un vecteur $a = (x, y)$ si et seulement si $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent respectivement vers x et y dans \mathbf{R} . ■

EXERCICE 45. — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et $x \in E$.

1. Démontrer que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} \cdot x$ converge vers 0.
2. Si $x \neq 0$, démontrer que la suite de terme général $n \cdot x$ diverge. □

EXERCICE 46. — On munit $\mathbf{R}[X]$ est muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. Démontrer que la suite de terme général $P_n = X^n$ diverge. □

EXERCICE 47. — On considère le \mathbf{R} -espace vectoriel $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ et on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longrightarrow x^n. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge pour la norme $\|\cdot\|_1$ sur E .
2. Démontrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ diverge pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur E .

□



D'après l'exercice précédent, la notion de convergence d'une suite de vecteurs d'un espace vectoriel E peut dépendre de la norme. Nous verrons plus tard que, si E est de dimension finie, alors la notion de convergence est indépendante du choix de la norme (résultat profond), mais lorsque E est de dimension infinie, on veillera à toujours préciser la norme que l'on considère.

2. CONVERGENCE DANS UN ESPACE PRODUIT

THÉORÈME 48 (CONVERGENCE ET ESPACES PRODUITS). — Soient $(E_i, N_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ une famille de p espaces vectoriels normés, (E, N) leur espace produit et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E de terme général :

$$u_n = (u_{1,n}, \dots, u_{p,n})$$

où pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $(u_{i,n})_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de E_i . Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un vecteur $a = (a_1, \dots, a_p) \in E$ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la suite $(u_{i,n})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers a_i .

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — On démontre le résultat en raisonnant par double implication, grâce à l'observation suivante. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$, pour tout $i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$N_{i_0}(x_{i_0}) \leq N(x) := \max_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} N_i(x_i) \leq N_1(x_1) + \dots + N_p(x_p).$$

□

3. SUITES EXTRAITES ET VALEURS D'ADHÉRENCE

DÉFINITION 49 (SUITES EXTRAITES). — Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites d'éléments d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E . On dit que $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ s'il existe une application $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Remarque 50 (suite extraite d'une suite extraite). — Si $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et si $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$, alors $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$. En effet, il existe deux applications $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ et $\psi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissantes telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n = v_{\psi(n)}$. Nous en déduisons que :

$$w_n = u_{\varphi \circ \psi(n)} \quad [\text{prendre garde à la manière de composer } \varphi \text{ et } \psi]$$

et l'application $\varphi \circ \psi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ est strictement croissante. ■

DÉFINITION 51 (VALEUR D'ADHÉRENCE). — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé. Un vecteur $a \in E$ est valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de E , s'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant vers a .

Remarque 52. — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ telle que $(\|u_n\|)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ n'a pas de valeur d'adhérence. ■

LEMME 53 (CLÉ POUR LES SUITES EXTRAITES). — Soit $\varphi: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ une application strictement croissante. Alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \varphi(n) \geq n.$$

DÉMONSTRATION. — On raisonne par récurrence sur l'entier naturel n .

- Initialisation à $n = 0$. Comme $\varphi(0) \in \mathbf{N}$, $\varphi(0) = 0$.
- Hérédité. Soit un entier naturel n tel que $\varphi(n) \geq n$. Comme φ est strictement croissante, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. Comme $\varphi(n+1)$ et $\varphi(n)$ sont entiers, il vient :

$$\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1 \geq n+1.$$

Remarque 54. — La proposition est un puissant outil pour prouver la divergence d'une suite. ■

PROPOSITION 55 (UNE SUITE CONVERGENTE POSSÈDE UNE UNIQUE VALEUR D'ADHÉRENCE). — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E .

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $a \in E$, alors toute sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers a , donc a est l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
2. En particulier, si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ possède deux valeurs d'adhérence, alors elle diverge.

DÉMONSTRATION. — L'assertion 2 est conséquence de la première, qui est la seule que nous considérons.

Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $a \in E$. Soit $\varphi: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ une application strictement croissante. Nous avons établi, plus tôt dans l'année, en raisonnant par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \varphi(n) \geq n.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \|u_n - a\| \leq \varepsilon.$$

Soit alors $n \geq N$. Comme $\varphi(n) \geq n \geq N$, alors $\|u_{\varphi(n)} - a\| \leq \varepsilon$. Ainsi, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$. ■

Exemple 56. — La suite réelle de terme général $(-1)^n$ admet deux valeurs d'adhérence distinctes, 1 et -1 . Elle est donc divergente. ■

EXERCICE 57. — Donner un exemple de suite bornée d'un espace vectoriel normé n'ayant aucune valeur d'adhérence. □

EXERCICE 58. — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée et possède une unique valeur d'adhérence. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.
2. Si on suppose seulement que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence, la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge-t-elle nécessairement? □

EXERCICE 59. — Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n \left| \begin{array}{l} [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \cos(nx). \end{array} \right.$$

Supposons que (f_n) admette une valeur d'adhérence f dans $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$. On dispose alors d'une fonction $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que :

$$\|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left| f_{\varphi(n)}(0) - f_{\varphi(n)}\left(\frac{\pi}{2\varphi(n)}\right) \right| \leq 2 \|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty + \left| f(0) - f\left(\frac{\pi}{2\varphi(n)}\right) \right|.$$

Que peut-on en déduire? □

EXERCICE 60. — Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - 1/n \\ 2n \left(x - 1 + \frac{1}{n} \right) & \text{si } 1 - \frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{2n} \\ -2n(x - 1) & \text{si } 1 - \frac{1}{2n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Faire un dessin, puis montrer que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Est-ce que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers 0 dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$?

□

§ 3. COMPARAISON DE NORMES

DÉFINITION 61 (NORMES ÉQUIVALENTES). — Soient N_1 et N_2 deux normes sur un \mathbf{K} -espace vectoriel E . On dit que N_1 est équivalente à N_2 si :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}_{>0} \quad \forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

PROPOSITION 62 (L'ÉQUIVALENCE ENTRE NORMES EST UNE RELATION D'ÉQUIVALENCE). — Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel E . La relation \mathcal{R} définie sur l'ensemble des normes sur E par :

$$N_1 \mathcal{R} N_2 \iff N_1 \text{ est équivalente à } N_2$$

est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION. — Démontrons que la relation \mathcal{R} est réflexive, symétrique et transitive.

- **Réflexivité.** Soit N un norme sur E , comme $N \leq N \leq N$, $N \mathcal{R} N$, donc \mathcal{R} est réflexive.
- **Symétrie.** Soient N_1, N_2 deux normes sur E telles que $N_1 \mathcal{R} N_2$. Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que : $\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$, donc :

$$\frac{1}{\beta} N_2 \leq N_1 \leq \frac{1}{\alpha} N_2.$$

Ainsi $N_2 \mathcal{R} N_1$. La relation \mathcal{R} est symétrique.

- **Transitivité.** Soient N_1, N_2, N_3 trois normes sur E telles que $N_1 \mathcal{R} N_2$ et $N_2 \mathcal{R} N_3$. Il existe $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$ tels que :

$$\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1 \quad \text{et} \quad \gamma N_2 \leq N_3 \leq \delta N_2$$

donc $\alpha \gamma N_1 \leq N_3 \leq \beta \delta N_1$. Ainsi $N_1 \mathcal{R} N_3$. La relation \mathcal{R} est transitive. ■

Exemple 63 (équivalence des trois normes usuelles sur \mathbf{R}^n). — On considère les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies précédemment sur \mathbf{R}^n , où n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Comparaison des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur \mathbf{R}^n . Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Nous calculons :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i| \cdot |x_j| \geq \sum_{i=1}^n x_i^2$$

et en déduisons que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel sur \mathbf{R}^n :

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot 1 = \langle (|x_1|, \dots, |x_n|), (1, \dots, 1) \rangle \leq \|x\|_2 \cdot \|(1, \dots, 1)\|_2 = \sqrt{n} \|x\|_2.$$

Ainsi :

$$\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq \sqrt{n} \|\cdot\|_2 \quad [\text{inégalités optimales}].$$

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont donc équivalentes sur \mathbf{R}^n .

2. Comparaison des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbf{R}^n . Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$0 \leq |x_i| \leq \|x\|_\infty$$

et donc :

$$\|x\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \|x\|_\infty.$$

Ainsi :

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \leq n \|\cdot\|_\infty \quad [\text{inégalités optimales}].$$

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont donc équivalentes sur \mathbf{R}^n .

3. Comparaison des normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbf{R}^n . Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$0 \leq x_i^2 \leq \|x\|_\infty^2$$

et donc :

$$\|x\|_\infty^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq n \|x\|_\infty^2.$$

Ainsi :

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{n} \|\cdot\|_\infty \quad [\text{inégalités optimales}].$$

Les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont donc équivalentes sur \mathbf{R}^n , ce que l'on pouvait déduire des points 1 et 2. ■

EXERCICE 64 (CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE ENTRE NORMES VIA LES BOULES). — Démontrer que deux normes N_1 et N_2 sur un \mathbf{K} -espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si toute boule ouverte (respectivement fermée) pour la norme N_1 est contenue dans une boule ouverte (respectivement fermée) pour la norme N_2 , et réciproquement. □

Remarque 65 (d'une boule centrée en un point quelconque à une boule centrée en l'origine). — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie A de E est bornée si et seulement si :

$$\exists r > 0, \quad A \subset B_f(0, r).$$

PROPOSITION 66 (INVARIANCE DU CARACTÈRE BORNÉ POUR DEUX NORMES ÉQUIVALENTES). — Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E . Alors, pour toute $A \in \mathcal{P}(E)$, A est bornée pour N_1 si et seulement si A est bornée pour N_2 .

DÉMONSTRATION. — Par symétrie des rôles joués par les normes N_1 et N_2 , il suffit de prouver que toute partie de E bornée pour la norme N_1 est bornée pour la norme N_2 .

Soit A une partie de E bornée pour la norme N_1 . Alors :

$$\exists M \in \mathbf{R}_+, \quad \forall x \in A, \quad N_1(x) \leq M.$$

Comme les normes N_1 et N_2 sont équivalentes :

$$\exists \alpha \in \mathbf{R}_{>0}, \quad \forall x \in A, \quad \alpha N_2(x) \leq N_1(x).$$

Nous en déduisons que :

$$\forall x \in A, \quad N_2(x) \leq \frac{M}{\alpha}.$$

La partie A de E est donc bornée pour la norme N_2 . ■

Remarque 67. — Le théorème suivant est un outil puissant pour comparer des normes. ■

THÉORÈME 68 (CRITÈRE SÉQUENTIEL DE COMPARAISON DES NORMES). — Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel et soient N_1 et N_2 deux normes sur E .

Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. Toute suite d'éléments de E qui converge vers 0 au sens de N_1 , converge vers 0 au sens de N_2 .
2. $\exists \alpha \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que $N_2 \leq \alpha N_1$.

DÉMONSTRATION. — Procédons par double implication.

• (2) \Rightarrow (1). Soit $\alpha > 0$ tel que $N_2 \leq \alpha N_1$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite convergeant vers 0 au sens de N_1 , i.e. telle que $N_1(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 \leq N_2(u_n) \leq \alpha N_1(u_n)$$

le théorème d'encadrement pour les suites réelles implique $(N_2(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 0, i.e. que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0 au sens de N_2 .

• (1) \Rightarrow (2). Raisonnons par contraposée. Supposons donc que :

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in E, N_2(x) > \alpha N_1(x).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $x_n \in E$ tel que $N_2(x_n) > n N_1(x_n)$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n \neq 0_E$, et on peut considérer $y_n := \frac{x_n}{N_2(x_n)}$ d'après la propriété de séparation de la norme N_2 . On observe :

- pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $N_2(y_n) = 1$, et donc $(y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ ne tend pas vers 0 pour la norme N_2 ;
- pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq N_1(y_n) < \frac{1}{n} N_2(y_n) = \frac{1}{n}$, donc par théorème d'encadrement, $N_1(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge donc vers 0 pour la norme N_1 .

On a exhibé une suite de vecteurs de E qui converge vers 0 au sens de N_1 , mais pas au sens de N_2 . ■

COROLLAIRE 69 (CONVERGENCE ET ÉQUIVALENCE DES NORMES). — Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel et soient N_1 et N_2 deux normes sur E . Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de E :

$$(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge vers } 0 \text{ au sens de } N_1 \iff (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge vers } 0 \text{ au sens de } N_2.$$

DÉMONSTRATION. — Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème précédent. ■

Remarque 70. — Ce corollaire peut être utilisé pour démontré que deux normes sur un même espace vectoriel ne sont pas équivalentes. ■

EXERCICE 71 (NORMES NON ÉQUIVALENTES SUR $\mathbf{R}[X]$). — Démontrer que sur $\mathbf{R}[X]$:

1. les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes ;
2. les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes ;
3. les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

□

EXERCICE 72 (NORMES NON ÉQUIVALENTES SUR $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$). — Soient a et b des réels tels que $a < b$. Démontrer que sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$:

1. les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas équivalentes ;
2. les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes ;
3. les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

□

§ 4. TOPOLOGIE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

NOTATION. — Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1. OUVERTS ET FERMÉS

DÉFINITION 73 (PARTIE OUVERTE, PARTIE FERMÉE). —

1. Une partie $U \subset E$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$ si :

$$\forall x \in U, \exists r_x \in \mathbf{R}_{>0}, B(x, r_x) \subset U.$$

2. Une partie $F \subset E$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$ si son complémentaire $E \setminus F$ est un ouvert.

Exemple 74 (propriétés topologiques de \emptyset et de E). — Les parties E et \emptyset sont des ouverts et des fermés de $(E, \|\cdot\|)$. ■

Exemple 75 (un singleton est un fermé). — Si $a \in E$, $\{a\}$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$. ■

Exemple 76 (propriétés topologiques de parties de \mathbf{R}). — Si $E = \mathbf{R}$ alors :

1. l'ensemble $]0, 1[$ est un ouvert ;
2. l'ensemble $[0, 1]$ est un fermé ;
3. l'ensemble $]0, 1[$ n'est ni ouvert, ni fermé.



Une partie de E peut n'être ni ouverte, ni fermée, telle $] -1, 2[$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.

PROPOSITION 77 (PROPRIÉTÉ TOPOLOGIQUE DES BOULES). — Une boule ouverte est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$, une boule fermée est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$.

DÉMONSTRATION. — Soient $(a, r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}$.

• $B(a, r)$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$. Considérons $x \in B(a, r)$ et démontrons qu'il existe une boule ouverte centrée en x contenue dans $B(a, r)$. Posons :

$$r_x := r - \|a - x\| > 0 \quad \text{[faire une figure pour comprendre ce choix]}$$

et démontrons que $B(x, r_x) \subset B(a, r)$. Soit $y \in B(x, r_x)$. Par l'inégalité triangulaire :

$$\|y - a\| = \|y - x + x - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < r_x + \|a - x\| = r$$

donc $y \in B(a, r)$ et $B(x, r_x) \subset B(a, r)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in B(a, r)$, la boule $B(a, r)$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$.

• $B_f(a, r)$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$.

Démontrons que $E \setminus B_f(a, r)$ est un ouvert. Considérons $x \in E \setminus B_f(a, r)$ et démontrons qu'il existe une boule ouverte de centre x contenue dans $E \setminus B_f(a, r)$. Posons :

$$r_x = \|x - a\| - r > 0 \quad \text{[faire une figure pour comprendre ce choix]}$$

et démontrons que $B(x, r_x) \subset E \setminus B_f(a, r)$. Soit $y \in B(x, r_x)$. Par la deuxième inégalité triangulaire :

$$\|y - a\| = \|y - x + x - a\| \geq \|x - a\| - \|y - x\| > \|x - a\| - r_x = r.$$

donc $y \in E \setminus B_f(a, r)$. Ainsi, $B(x, r_x) \subset E \setminus B_f(a, r)$. et $E \setminus B_f(a, r)$ est bien un voisinage de x .

Ceci étant vrai pour tout $x \in E \setminus B_f(a, r)$, la boule $E \setminus B_f(a, r)$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$. ■

PROPOSITION 78 (UNION QUELCONQUE ET INTERSECTION FINIE D'OUVERTS). —

1. Une réunion quelconque d'ouverts de $(E, \|\cdot\|)$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$.
2. Une intersection finie d'ouverts de $(E, \|\cdot\|)$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$.

DÉMONSTRATION. —

1. Soient $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $(E, \|\cdot\|)$ et $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Par définition d'une réunion, il existe $i_x \in I$ tel que $x \in U_{i_x}$. Comme U_{i_x} est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$ contenant x , il existe $r_x \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que :

$$B(x, r_x) \subset U_{i_x} \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$.

2. Soient un entier $p \geq 2$ et U_1, \dots, U_p des ouverts de $(E, \|\cdot\|)$. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^p U_i$. Comme, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, U_i est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$ contenant x , il existe $r_{x,i} \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que $B(x, r_{x,i}) \subset U_i$. Si l'on pose :

$$r_x := \min \{r_{x,1}, \dots, r_{x,p}\} \in \mathbf{R}_{>0} \quad [\text{le minimum d'une partie finie non vide de } \mathbf{R} \text{ est bien défini}]$$

alors, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$B(x, r_x) \subset B(x, r_{x,i}) \subset U_i$$

donc :

$$B(x, r_x) \subset \bigcap_{i=1}^p U_i.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \bigcap_{i=1}^p U_i$, $\bigcap_{i=1}^p U_i$ est bien un ouvert. ■

COROLLAIRE 79 (UNION FINIE ET INTERSECTION QUELCONQUE DE FERMÉS). —

1. Une réunion finie de fermés de $(E, \|\cdot\|)$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$.
2. Une intersection de fermés de $(E, \|\cdot\|)$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$.

DÉMONSTRATION. —

1. Soient un entier $p \geq 2$ et F_1, \dots, F_p des fermés de $(E, \|\cdot\|)$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $E \setminus F_i$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$. Donc d'après la proposition précédente :

$$\bigcap_{i=1}^p (E \setminus F_i) = E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^p F_i \right)$$

est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$. Donc :

$$E \setminus \left(E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^p F_i \right) \right) = \bigcup_{i=1}^p F_i.$$

est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$.

2. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de $(E, \|\cdot\|)$. Alors pour tout $i \in I$, $E \setminus F_i$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$. Donc, d'après la proposition précédente :

$$\bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i) = E \setminus \bigcap_{i \in I} F_i$$

est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$. Donc :

$$E \setminus \left(E \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) \right) = \bigcap_{i \in I} F_i.$$

est un fermé de $(E, \|\cdot\|)$. ■

Remarque 80 (importance de l'hypothèse de finitude). —

1. Une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Par exemple :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$$

n'est pas une partie ouverte de \mathbf{R} .

2. Une réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement un fermé. Par exemple :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] =] -1, 1[$$

n'est pas une partie fermée de \mathbf{R} .



PROPOSITION 81 (PROPRIÉTÉ TOPOLOGIQUE D'UNE SPHÈRE). — Une sphère de $(E, \| \cdot \|)$ est une partie fermée de $(E, \| \cdot \|)$.

DÉMONSTRATION. — Si $(a, r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}$ alors :

$$S(a, r) = B_f(a, r) \cap (E \setminus B(a, r))$$

est une partie fermée de $(E, \| \cdot \|)$ comme intersection de deux fermés de $(E, \| \cdot \|)$.



PROPOSITION 82 (PRODUIT FINI D'OUVERTS ET PRODUIT FINI DE FERMÉS). — Soient un entier $n \geq 2$ et une famille de n espaces vectoriels normés $(E_i, N_i)_{1 \leq i \leq n}$. Nous avons déjà établi que l'application :

$$N \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=1}^n E_i \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto N(x) = \max_{1 \leq i \leq n} N_i(x_i) \end{array} \right. \quad [norme produit]$$

est une norme sur $\prod_{i=1}^n E_i$.

1. Considérons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, un ouvert U_i de (E_i, N_i) . Alors $\prod_{i=1}^n U_i$ est un ouvert de $\left(\prod_{i=1}^n E_i, N \right)$.
2. Considérons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, un fermé F_i de (E_i, N_i) . Alors $\prod_{i=1}^n F_i$ est un fermé de $\left(\prod_{i=1}^n E_i, N \right)$.

2. VOISINAGES D'UN POINT

DÉFINITION 83 (VOISINAGE D'UN POINT). — Soit $a \in E$. Une partie \mathcal{V} de E est appelé voisinage de a dans $(E, \| \cdot \|)$ si :

$$\exists r_x \in \mathbf{R}_{>0}, \quad B(x, r_x) \subset \mathcal{V}.$$

Exemple 84 (voisinsages d'un point de \mathbf{R}). — Soient des réels x, y, z tels que $x < z < y$. Les intervalles $]x, y[, [x, y],]x, y]$ sont des voisinages de z dans \mathbf{R} .



Exemple 85 (un singleton n'est pas un voisinage du point qu'il contient). — Supposons que $E \neq \{0_E\}$ et considérons $a \in E$. Alors, l'ensemble $\{a\}$ n'est pas un voisinage de a dans $(E, \| \cdot \|)$, puisque pour tout $r > 0$, $B(a, r) \not\subset \{a\}$.



Remarque 86 (partie contenant un voisinage). — Soit $a \in E$. Un ensemble contenant un voisinage de a dans $(E, \| \cdot \|)$ est un voisinage de a dans $(E, \| \cdot \|)$.



PROPOSITION 87 (CARACTÉRISATION DES OUVERTS PAR LE CONCEPT DE VOISINAGE). — Une partie U de E est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si la partie U est un voisinage de chacun de ses points dans $(E, \|\cdot\|)$.

PROPOSITION 88 (UNION QUELCONQUE ET INTERSECTION FINIE DE VOISINAGES D'UN POINT). — Soit $a \in E$.

1. Une réunion quelconque de voisinages de a dans $(E, \|\cdot\|)$ est un voisinage de a dans $(E, \|\cdot\|)$.
2. Une intersection finie de voisinages de a dans $(E, \|\cdot\|)$ est un voisinage de a dans $(E, \|\cdot\|)$.

DÉMONSTRATION. —

1. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille de voisinages de a dans $(E, \|\cdot\|)$. Soit $i_0 \in I$. Comme V_{i_0} est un voisinage de a dans $(E, \|\cdot\|)$, il existe $r \in \mathbf{R}_{>0}$ tel que $B(a, r) \subset V_{i_0}$. Alors :

$$B(a, r) \subset \bigcup_{i \in I} V_i.$$

Donc $\bigcup_{i \in I} V_i$ est un voisinage de a dans $(E, \|\cdot\|)$.

2. Soient un entier $p \geq 2$ et V_1, \dots, V_p des voisinages de a dans $(E, \|\cdot\|)$. Alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \exists r_i > 0, \quad B(a, r_i) \subset V_i.$$

Si l'on pose :

$$r := \min \{r_1, \dots, r_p\} \in \mathbf{R}_{>0} \quad [\text{le minimum d'une partie finie non vide de } \mathbf{R} \text{ est bien défini}]$$

alors, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset V_i$$

donc :

$$B(a, r) \subset \bigcap_{i=1}^p V_i.$$

Ainsi $\bigcap_{i=1}^p V_i$ est un voisinage de a dans $(E, \|\cdot\|)$. ■

Remarque 89 (importance de l'hypothèse de finitude). — Une intersection infinie de voisinages peut ne pas être un voisinage. Par exemple, posons $E = \mathbf{R}$, $a = 0$, et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $V_n = \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$B\left(0, \frac{1}{n}\right) = \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[\subset V_n$$

donc V_n est un voisinage de 0. Or, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} V_n = \{0\}$ n'est pas un voisinage de 0. ■

3. ADHÉRENCE D'UNE PARTIE

DÉFINITION 90 (POINT ADHÉRENT ET ADHÉRENCE D'UNE PARTIE). — Soit A une partie non vide de E .

1. Soit $x \in E$. On dit que x est adhérent à A dans $(E, \|\cdot\|)$, si tout voisinage de x dans $(E, \|\cdot\|)$ rencontre A , i.e. si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

2. L'ensemble des points adhérents à A est appelé adhérence de A , et noté \bar{A} .

L'adhérence de l'ensemble vide est l'ensemble vide lui-même, i.e. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Remarque 91 (une partie est contenue dans son adhérence). — Une partie A de E est contenue dans son adhérence dans $(E, \|\cdot\|)$, i.e. $A \subset \bar{A}$. ■

Exemple 92 (adhérence d'une partie de \mathbf{R}). — L'adhérence de $]0, 1]$ est $[0, 1]$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. ■

Exemple 93 (adhérence d'une boule ouverte). — L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon, i.e. :

$$\forall (a, r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}, \quad \overline{B(a, r)} = B_f(a, r).$$

THÉORÈME 94 (PROPRIÉTÉ DE MINIMALITÉ DE L'ADHÉRENCE). — Soit A une partie non vide de E . Son adhérence \overline{A} est le plus petit fermé de $(E, \|\cdot\|)$ contenant A , d'où :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F.$$

DÉMONSTRATION. — • **Étape 1 : \overline{A} est un fermé.** Nous démontrons que $E \setminus \overline{A}$ est un ouvert. Soit $x \in E \setminus \overline{A}$. Comme $x \notin \overline{A}$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Démontrons que $B(x, r) \subset E \setminus \overline{A}$. Soit $y \in B(x, r)$, posons :

$$r' = r - \|y - x\| > 0 \quad [\text{faire une figure pour comprendre ce choix}].$$

Alors $B(y, r') \subset B(x, r)$. En effet, pour tout $z \in B(y, r')$:

$$\|z - x\| = \|z - y + y - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < r' + \|y - x\| = r.$$

Ainsi $B(y, r') \subset E \setminus A$, d'où $y \notin \overline{A}$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in B(x, r)$, alors $B(x, r) \cap \overline{A} = \emptyset$, soit encore $B(x, r) \subset E \setminus \overline{A}$. Donc $E \setminus \overline{A}$ est un ouvert.

• **Étape 2 : \overline{A} est le plus petit fermé contenant A .** Nous savons déjà que \overline{A} est un fermé qui contient A . Considérons un fermé F qui contient A et démontrons que $\overline{A} \subset F$ ou plutôt $E \setminus F \subset E \setminus \overline{A}$ qui lui est équivalente.

Soit $x \in E \setminus F$, comme F est un fermé, $E \setminus F$ est un ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E \setminus F$. Comme $A \subset F$, $E \setminus F \subset E \setminus A$ et donc $B(x, r) \subset E \setminus A$. Ainsi $B(x, r) \cap A = \emptyset$, ce qui livre $x \in E \setminus \overline{A}$.

Nous venons de montrer que $E \setminus F \subset E \setminus \overline{A}$, d'où $\overline{A} \subset F$.

• **Étape 3 : \overline{A} est l'intersection de tous les fermés contenant A .** Comme \overline{A} est un fermé contenant A :

$$\bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F \subset \overline{A}.$$

Or $\bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F$ est un fermé (comme intersection quelconque de fermés) contenant A . Comme tout fermé contenant A contient aussi \overline{A} (étape 2), il vient :

$$\overline{A} \subset \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ fermé}}} F.$$

COROLLAIRE 95 (CARACTÉRISATION DES FERMÉS VIA L'ADHÉRENCE). — Soit A une partie non vide de E . L'ensemble A est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si $\overline{A} = A$.

DÉMONSTRATION. — • **Implication directe.** Supposons que A est fermé. alors A est un fermé contenant A , donc $\overline{A} \subset A$. Comme $A \subset \overline{A}$ dans tous les cas, il vient $\overline{A} = A$.

• **Implication réciproque.** Supposons $A = \overline{A}$. Comme \overline{A} est un fermé, A est un fermé. ■

THÉORÈME 96 (CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE L'ADHÉRENCE). — Soit A une partie non vide de E .

1. Un élément $x \in E$ est adhérent à A si et seulement si x est limite d'une suite d'éléments de A , i.e. :

$$x \in \overline{A} \iff \exists (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} x.$$

2. L'ensemble A est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge dans E a sa limite dans A .

DÉMONSTRATION. —

1. Posons A' l'ensemble des points $x \in E$ tels qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de A convergeant vers x et démontrons que $\overline{A} = A'$.

• Inclusion directe. Soit $x \in \overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap A \neq \emptyset$, donc il existe $a_n \in A$ tel que :

$$0 \leq \|x - a_n\| \leq \frac{1}{n+1}.$$

D'après le théorème d'encadrement pour les suites réelles, $\|x - a_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge donc vers x . Ainsi $x \in A'$.

• Inclusion réciproque. Soit $x \in A'$. Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x . Soit alors $r > 0$. D'après la définition de la convergence d'une suite, il existe un $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|x - a_n\| < r$. Ainsi :

$$\forall n \geq N, \quad a_n \in B(x, r).$$

en particulier $a_N \in B(x, r)$ et donc $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Ceci étant vrai pour un réel $r > 0$ quelconque, il vient $x \in \overline{A}$.

2. Cette assertion découle du fait que A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$. ■

EXERCICE 97 (PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DE PARTIES DE \mathbf{R}^2). — On munit \mathbf{R}^2 de la norme $\|\cdot\|_2$. Démontrer que :

$$F := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = y\} \quad [\text{première bissectrice}]$$

est une partie fermée de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$ et que :

$$U := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\} \quad [\text{quart de plan nord est}]$$

est une partie ouverte de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$. □

EXERCICE 98 (PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DE PARTIES DE $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$). — Soit un entier $n \geq 2$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme :

$$\|\cdot\|_\infty \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ A \longrightarrow \max_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |[A]_{i,j}|. \end{array} \right.$$

Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est une partie fermée de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ et que $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ est une partie ouverte de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$. □

EXERCICE 99 (PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DE PARTIES DE $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$). — On considère :

$$A := \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}) : f(1) = 1\}.$$

Démontrer que A est une partie fermée de $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ mais que A n'est pas une partie fermée de $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_1)$. □

4. DENSITÉ D'UNE PARTIE

DÉFINITION 100 (PARTIE DENSE). — Une partie A de E est dite dense dans E si $\overline{A} = E$, i.e. si :

$$\forall x \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a_\varepsilon \in A \cap B(x, \varepsilon).$$

Exemple 101 (l'ensemble des nombres rationnels est dense de \mathbf{R}). — \mathbf{Q} est dense dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. ■

EXERCICE 102 (L'ENSEMBLE DES NOMBRES DYADIQUES EST DENSE DE \mathbf{R}). — Démontrer que l'ensemble :

$$\mathcal{D} := \left\{ \frac{p}{2^q} : (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \right\} \quad [\text{ensemble des nombres dyadiques}]$$

est dense dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. □

EXERCICE 103. — Démontrer que \mathbf{Q}^n est dense dans $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. □

COROLLAIRE 104 (CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA DENSITÉ). — Une partie $A \subset E$ est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A , i.e. si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad \exists (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} x.$$

DÉMONSTRATION. — Cette assertion découle de la définition d'une partie dense dans E et de la caractérisation séquentielle de l'adhérence. ■

EXERCICE 105 (UNE PARTIE DENSE DANS UN ESPACE DE POLYNÔMES). — Munissons $E = \mathbf{R}[X]$ de la norme N définie par :

$$N \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ P \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n+1}. \end{array} \right.$$

Démontrer que l'ensemble $A = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in \mathbf{R}[X] : \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0 \right\}$ est dense dans (E, N) . □

EXERCICE 106 (DENSITÉ DE L'ENSEMBLE DES MATRICES INVERSIBLES). — Soit un entier $n \geq 2$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme :

$$\|\cdot\|_\infty \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ A \longmapsto \max_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} |[A]_{i,j}|. \end{array} \right.$$

Démontrer que $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ est une partie dense de $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$. □

EXERCICE 107 (PROPRIÉTÉ TOPOLOGIQUE D'UN HYPERPLAN). —

1. Démontrer que l'adhérence \overline{F} d'un sous-espace vectoriel F de E est encore un sous-espace vectoriel de E .
 2. En déduire qu'un hyperplan H de E est soit fermé dans E , soit dense dans E .
-

EXERCICE 108 (PROPRIÉTÉ TOPOLOGIQUE D'UN HYPERPLAN DE $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$). — Soient $E := \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ et :

$$A := \{f \in E : f(0) = 0\}.$$

1. Démontrer que A est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_1$.
 2. Démontrer que A est fermé dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
-

5. INTÉRIEUR D'UNE PARTIE

DÉFINITION 109 (POINT INTÉRIEUR À UN ENSEMBLE, INTÉRIEUR D'UN ENSEMBLE). — Soit A une partie non vide de E , soit $a \in E$.

1. Le point a est intérieur à A si A est un voisinage de a . De manière équivalente, a est intérieur à A si :

$$\exists r_a > 0, \quad B(a, r) \subset A.$$

2. L'ensemble des points intérieurs à A est appelé intérieur de A et noté $\overset{\circ}{A}$.

Par convention, l'intérieur de l'ensemble vide est l'ensemble vide lui-même, i.e. $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$.

Remarque 110 (une partie contient son intérieur). — Pour toute partie A de E , $\overset{\circ}{A} \subset A$. ■

THÉORÈME 111 (PROPRIÉTÉ DE MAXIMALITÉ DE L'INTÉRIEUR). — Soit A une partie non vide de E . Son intérieur $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A , de sorte que :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \subset A, U \text{ ouvert}} U.$$

DÉMONSTRATION. — Étape 1 : $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert. Soit $a \in \overset{\circ}{A}$. Comme A est un voisinage de a , il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Pour tout $x \in B(a, r)$, $B(a, r)$ est un voisinage de x , donc A est un voisinage de x , donc $x \in \overset{\circ}{A}$. Ainsi, $B(a, r) \subset \overset{\circ}{A}$. Donc $\overset{\circ}{A}$ est un voisinage de tous ses points, c'est donc un ouvert.

Étape 2 : $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A . Soit U un ouvert contenu dans A . Soit $a \in U$. Comme U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$, donc $B(a, r) \subset A$, donc $a \in \overset{\circ}{A}$. Ainsi, $U \subset \overset{\circ}{A}$.

Étape 3 : $\overset{\circ}{A}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A . $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenu dans A , donc $\overset{\circ}{A} \subset \bigcup_{U \subset A, U \text{ ouvert}} U$.

Or, $\bigcup_{U \subset A, U \text{ ouvert}} U$ est un ouvert (comme réunion quelconque d'ouverts) qui est contenu dans A . Comme tout ouvert contenu dans A est contenu dans $\overset{\circ}{A}$, $\bigcup_{U \subset A, U \text{ ouvert}} U \subset \overset{\circ}{A}$. ■

COROLLAIRE 112 (CARACTÉRISATION DES OUVERTS). — Soit A une partie de E . A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.

DÉMONSTRATION. — Implication directe. Si A est un ouvert, A est un ouvert contenu dans A , donc $A \subset \overset{\circ}{A}$. Comme par ailleurs $\overset{\circ}{A} \subset A$, on a égalité.

Implication réciproque. Si $A = \overset{\circ}{A}$, comme $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, alors A est un ouvert. ■

THÉORÈME 113 (ADHÉRENCE, INTÉRIEUR ET COMPLÉMENTAIRE). — Soit A une partie non vide de E .

1. Le complémentaire de l'intérieur de A est égal à l'adhérence du complémentaire de A , i.e. :

$$E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}.$$

2. Le complémentaire de l'adhérence de A est égal à l'intérieur du complémentaire de A , i.e. :

$$E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{E \setminus A}.$$

DÉMONSTRATION. —

1. Remarquons d'abord que $E \setminus \overset{\circ}{A}$ est un fermé contenant $E \setminus A$, donc $\overline{E \setminus A} \subset E \setminus \overset{\circ}{A}$.

Ensuite, soit $x \in E \setminus \overline{E \setminus A}$. Comme $x \notin \overline{E \setminus A}$, pour tout $r > 0$, $B(x, r) \not\subset E \setminus A$, donc $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Ainsi, $x \in \overline{E \setminus A}$. D'où $E \setminus \overset{\circ}{A} \subset \overline{E \setminus A}$.

D'où l'égalité.

2. Remarquons d'abord que $E \setminus \overline{A}$ est un ouvert contenu dans $E \setminus A$, donc $E \setminus \overline{A} \subset \overset{\circ}{E \setminus A}$.

Réciproquement, soit $x \in \overset{\circ}{E \setminus A}$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E \setminus A$. Donc $B(x, r) \cap A = \emptyset$, et $x \notin \overline{A}$, i.e. $x \in E \setminus \overline{A}$. D'où l'inclusion réciproque, puis l'égalité. ■

EXERCICE 114 (INTÉRIEUR D'UNE BOULE FERMÉE). — Soit $(a, r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}$. Démontrer que $\overset{\circ}{\widehat{B}_f(a, r)} = B(a, r)$. □

EXERCICE 115. — Soit A une partie de E d'intérieur non vide. Démontrer que $\text{Vect}(A) = E$. □

EXERCICE 116 (ADHÉRENCE ET INTÉRIEUR DE PARTIES DE $\mathbf{R}[X]$). — On munit $E := \mathbf{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_1$.

1. Démontrer que $A = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k : \sum_{k=0}^{\infty} a_k > 0 \right\}$ est un ouvert. Déterminer \bar{A} .
2. Démontrer que $B = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k : \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0 \right\}$ est un fermé. Déterminer $\overset{\circ}{B}$.

□

EXERCICE 117 (ADHÉRENCE ET INTÉRIEUR DE PARTIES DE $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$). — On munit $E := \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ de la norme $\| \cdot \|_{\infty}$.

1. Montrer que $A = \{f \in E : f > 0\}$ est un ouvert. Déterminer \bar{A} .
2. Montrer que $B = \{f \in E : f(0) = 0\}$ est un fermé. Déterminer $\overset{\circ}{B}$.

□

6. FRONTIÈRE D'UNE PARTIE

DÉFINITION 118 (POINT FRONTIÈRE, FRONTIÈRE D'UN ENSEMBLE). — Soit A une partie non vide de E .

1. Soit $a \in E$. On dit que a est un point frontière à A si a appartient à l'adhérence de A mais pas à l'intérieur de A .
2. L'ensemble des points frontière de A est appelé frontière de A , et noté ∂A . Ainsi :

$$\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Exemple 119 (frontière d'un intervalle réel). — La frontière d'un intervalle $[a, b]$ vaut $\{a, b\}$. Idem pour la frontière de $]a, b[$, de $]a, b]$ ou de $[a, b[$. ■

Exemple 120. — Soit $(a, r) \in E \times \mathbf{R}_{>0}$. Soit A une partie de E telle que :

$$B(a, r) \subset A \subset B_f(a, r).$$

Alors $\partial A = S(a, r)$. ■

7. PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES INVARIANTES POUR DES NORMES ÉQUIVALENTES

PROPOSITION 121 (PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES INVARIANTES PAR ÉQUIVALENCE DE NORMES). — Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un \mathbf{K} -espace vectoriel E .

1. **Partie bornée.** Une partie A de E est bornée pour la norme N_1 si et seulement si elle est bornée pour la norme N_2 .
2. **Suite convergente.** Une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in E$ pour la norme N_1 si et seulement si elle converge vers ℓ pour la norme N_2 .
3. **Partie ouverte.** Une partie A de E est ouverte pour la norme N_1 si et seulement si elle est ouverte pour la norme N_2 .
4. **Partie fermée.** Une partie A de E est fermée pour la norme N_1 si et seulement si elle est fermée pour la norme N_2 .
5. **Adhérence d'une partie.** Si A est une partie de E , alors son adhérence pour la norme N_1 coïncide avec son adhérence pour la norme N_2 .
6. **Intérieur d'une partie.** Si A est une partie de E , alors son intérieur pour la norme N_1 coïncide avec son intérieur pour la norme N_2 .
7. **Frontière d'une partie.** Si A est une partie de E , alors sa frontière pour la norme N_1 coïncide avec sa frontière pour la norme N_2 .

8. TOPOLOGIE INDUITE

DÉFINITION 122 (TOPOLOGIE INDUITE). — Soit A une partie non vide de E .

1. Soit $a \in A$. Si V_a est un voisinage de a dans E , $V_a \cap A$ est un voisinage relatif de A dans a .
2. Si U est un ouvert de E , $U \cap A$ est un ouvert relatif de A .
3. Si F est un fermé de E , $F \cap A$ est un fermé relatif de A .

Exemple 123 (topologie induite sur des parties de \mathbf{R}). — Soient des réels a, b, c tels que $a < c < b$.

1. Si $A =]a, b[$ alors $[c, b[$ est un fermé relatif de A (mais n'est pas fermé dans \mathbf{R}), $]c, b[$ est un ouvert relatif de A , $]a, b[$ est un fermé relatif et un ouvert relatif de A .
2. Si $A = [a, b]$ alors $]c, b]$ est un ouvert relatif de A (mais n'est pas ouvert dans \mathbf{R}), $[c, b]$ est un fermé relatif de A , $[a, b]$ est un fermé relatif et un ouvert relatif de A .

■

§ 5. ÉTUDE LOCALE D'UNE APPLICATION, CONTINUITÉ

NOTATION. — $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ désignent deux espaces vectoriels normés et A une partie non vide de E .

1. NOTION DE LIMITE DE FONCTION

DÉFINITION 124 (LIMITE D'UNE FONCTION). — Soient a un point adhérent à A , $b \in F$ et une application $f \in \mathcal{F}(A, F)$. On dit que f a pour limite b en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A \cap B_E(a, \eta), f(x) \in B_F(b, \varepsilon).$$

On écrit alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$.

Remarque 125. — Avec les notations de la précédente définition, la fonction f a pour limite b en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E < \eta \implies \|f(x) - b\|_F < \varepsilon$$

ou encore si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f(A \cap B_E(a, \eta)) \subset B_F(b, \varepsilon).$$

PROPOSITION 126 (UNICITÉ DE LA LIMITE). — Soient a un point adhérent à A , $(b_1, b_2) \in F^2$ et une application $f \in \mathcal{F}(A, F)$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_1$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_2$, alors $b_1 = b_2$.

DÉMONSTRATION. — Raisonnons par l'absurde et supposons $b_1 \neq b_2$, i.e. $\varepsilon := \|b_1 - b_2\|_F > 0$.

Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $f(A \cap B_E(a, \eta_1)) \subset B_F(b_1, \varepsilon/3)$. De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $f(A \cap B_E(a, \eta_2)) \subset B_F(b_2, \varepsilon/3)$.

Posons alors $\eta := \min(\eta_1, \eta_2) > 0$. Comme $B(a, \eta) = B(a, \eta_1) \cap B(a, \eta_2)$, alors :

$$f(A \cap B_E(a, \eta)) \subset B_F(b_1, \varepsilon/3) \cap B_F(b_2, \varepsilon/3).$$

Soit alors $x \in B(a, \eta) \cap A$, qui est ensemble non vide car a est adhérent à A . On a par l'inégalité triangulaire :

$$\varepsilon = \|b_1 - b_2\|_F = \|b_1 - f(x) + f(x) - b_2\|_F \leq \|b_1 - f(x)\|_F + \|f(x) - b_2\|_F < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Comme $\varepsilon > 0$, il vient $1 < \frac{2}{3}$, ce qui est faux.

Remarque 127. — Si f a pour limite b en a , on dit que b est la limite de f en a , et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

PROPOSITION 128 (COMPOSITION DE LIMITES). — Soient $(G, \|\cdot\|_G)$ un espace vectoriel normé, $B \subset F$, $f \in \mathcal{F}(A, F)$ et $g \in \mathcal{F}(B, G)$.

Supposons que $f(A) \subset B$.

L'application $g \circ f$ est bien définie et, pour tout $a \in \bar{A}$, $b \in \bar{B}$ et $c \in G$:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \\ g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} c \end{array} \right\} \implies g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c.$$

DÉMONSTRATION. — Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} c$, il existe $\eta > 0$ tel que $g(B \cap B_F(b, \eta)) \subset B_G(c, \varepsilon)$.

Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$, il existe $\alpha > 0$ tel que $f(A \cap B_E(a, \alpha)) \subset B_F(b, \eta) \cap B$ (ici nous utilisons l'hypothèse $f(A) \subset B$).

Donc $g \circ f(A \cap B_E(a, \alpha)) \subset B_G(c, \varepsilon)$.

Ainsi $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$.

THÉORÈME 129 (CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA LIMITE). — Soient $a \in \overline{A}$, $b \in F$ et $f \in \mathcal{F}(A, F)$. Alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A :

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b.$$

DÉMONSTRATION. — Procédons par double implication.

• **Implication directe.** Soit (x_n) une suite d'éléments de A convergeant vers a . Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(A \cap B_E(a, \eta)) \subset B_F(b, \varepsilon)$.

Comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \|x_n - a\|_E < \eta$$

soit $x_n \in A \cap B_E(a, \eta)$. Alors pour tout $n \geq N$, $f(x_n) \in B_F(b, \varepsilon)$, soit $\|f(x_n) - b\|_F < \varepsilon$.

Donc $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$.

• **Implication réciproque.** Raisonnons par contraposée et supposons que $f(x)$ ne converge pas vers b quand x tend vers a .

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, $f(A \cap B_E(a, \eta)) \not\subset B_F(b, \varepsilon)$.

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $x_n \in A \cap B_E(a, 1/n)$ tel que $f(x_n) \notin B_F(b, \varepsilon)$, ie $\|f(x_n) - b\|_F \geq \varepsilon$.

— La suite (x_n) converge vers a , puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\|x_n - a\|_E < \frac{1}{n}$ (théorème d'encadrement pour les suites réelles).

— La suite $(f(x_n))$ ne converge pas vers b , car pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\|f(x_n) - b\|_F \geq \varepsilon$.

Remarque 130. — Si f a pour limite b en $a \in A$, alors pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant vers a :

$$(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge et } f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \quad \left[\text{échange des symboles } f \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \right].$$

2. CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

DÉFINITION 131 (CONTINUITÉ). — Soient $a \in A$ et une application $f \in \mathcal{F}(A, F)$.

1. On dit que f est continue en a si :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a).$$

2. On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A .

PROPOSITION 132 ((ESPACE VECTORIEL DES FONCTIONS CONTINUES)). — L'ensemble $\mathcal{C}^0(A, F)$ des fonctions continues sur A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.

DÉMONSTRATION. — (a) Remarquons tout d'abord que la fonction nulle est continue sur A .

(b) Soit alors $(f, g) \in \mathcal{C}^0(A, F)^2$, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, soit $a \in A$. Montrons que $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ est continue en a , en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite. Soit (a_n) une suite d'éléments de A convergeant vers a . Par continuité de f et g en a , il vient :

$$f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a) \quad \text{et} \quad g(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(a).$$

Par opération sur les limites de suites, nous en déduisons :

$$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(a_n) = \lambda \cdot f(a_n) + \mu \cdot g(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \cdot f(a) + \mu \cdot g(a) = (\lambda f + \mu g)(a).$$

Ceci étant vrai pour toute suite (a_n) d'éléments de A convergeant vers a :

$$(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} (\lambda f + \mu g)(a).$$

PROPOSITION 133 (D'AUTRES MODES DE CONSTRUCTION D'APPLICATIONS CONTINUES). —

1. *Composition.* Soient $(G, \|\cdot\|_G)$ un espace vectoriel normé, $B \subset F$, et $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$, $g \in \mathcal{C}^0(B, G)$ telles que $f(A) \subset B$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(A, G)$.
2. *Restriction.* Soient $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$ et A' une partie non vide de A . Alors $f \in \mathcal{C}^0(A', F)$.
3. *Uplet.* Soient $(F_1, \|\cdot\|_1), \dots, (F_n, \|\cdot\|_n)$ un nombre fini d'espaces vectoriels normés. Notons $(F, \|\cdot\|_F)$ l'espace vectoriel normé produit. Soit $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{F}(A, F)$. Alors :

$$f \in \mathcal{C}^0(A, F) \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_i \in \mathcal{C}^0(A, F_i).$$

DÉMONSTRATION. —

1. Conséquence immédiate de la proposition 128.
2. Immédiat.
3. S'obtient simplement par caractérisation séquentielle de la limite et par caractérisation de la convergence dans les espaces produits (théorème 48).

THÉORÈME 134 (CONTINUITÉ, DENSITÉ ET PROLONGEMENT D'IDENTITÉ). — Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(A, F)$ et B une partie de A qui est dense dans A . Si f et g coïncident sur B , i.e. si, pour tout $x \in B$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$, i.e. si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

DÉMONSTRATION. — Soit $x \in A$. Par densité de B dans A , il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de B telle que :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x.$$

Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = g(x_n)$. Mais, par ailleurs, par caractérisation séquentielle de la continuité :

$$f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x) \quad \text{et} \quad g(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g(x).$$

Donc par unicité de la limite, $f(x) = g(x)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, $f = g$.

THÉORÈME 135 (CARACTÉRISATION DES APPLICATIONS CONTINUES VIA LES OUVERTS). — Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$. Alors f est continue sur A si et seulement si pour tout ouvert U de F , $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A .

DÉMONSTRATION. — Procédons par double implication.

• *Implication directe.* Soit U un ouvert de F . Montrons que $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A .

Soit $x \in f^{-1}(U)$. Comme $f(x) \in U$ et U est un ouvert de F , il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$B(f(x), \varepsilon) \subset U.$$

Comme f est continue en x , il existe $\eta > 0$ tel que :

$$f(A \cap B(x, \eta)) \subset B(f(x), \varepsilon) \subset U$$

donc $A \cap B(x, \eta) \subset f^{-1}(U)$. On en déduit que $f^{-1}(U)$ est un voisinage relatif de x .

Ceci étant vrai pour tout $x \in f^{-1}(U)$, on en déduit que $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif.

• *Implication réciproque.* Soit $x \in A$, soit $\varepsilon > 0$. Posons $U = B(f(x), \varepsilon)$.

Comme U est un ouvert, $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A , donc il existe $\eta > 0$ tel que $B(x, \eta) \cap A \subset f^{-1}(U)$, d'où $f(A \cap B(x, \eta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Ainsi, f est continue en x .

Ceci étant vrai pour tout $x \in A$, f est continue sur A .

EXERCICE 136. — Si $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$, montrer que $\{x \in A : f(x) \neq 0\}$ est un ouvert relatif de A . □

COROLLAIRE 137 (CARACTÉRISATION DES APPLICATIONS CONTINUES VIA LES FERMÉS). — Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$. Alors f est continue sur A si et seulement si pour tout fermé B de F , $f^{-1}(B)$ est un fermé relatif de A .

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — Le résultat de se déduit de la proposition 135, en remarquant que, pour toute partie B de F :

$$f^{-1}(F \setminus B) = A \setminus f^{-1}(B).$$

□

3. APPLICATIONS UNIFORMÉMENT CONTINUES

DÉFINITION 138 (APPLICATION UNIFORMÉMENT CONTINUE). — Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$. L'application f est uniformément continue sur A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in A^2, \|x - y\|_E < \eta \implies \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon.$$

Remarque 139 (l'uniforme continuité implique la continuité). — Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$. Si f est uniformément continue sur A , alors elle est continue sur A (comparer les deux définitions en jeu). ■

Remarque 140 (la continuité, seule, n'implique pas l'uniforme continuité). — Démontrer que la fonction carrée :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longrightarrow x^2 \end{array} \right.$$

est continue sur \mathbf{R} , mais non-uniformément continue sur \mathbf{R} . ■

4. APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES

DÉFINITION 141 (APPLICATION LIPSCHITZIENNE). — Soient $f \in \mathcal{F}(A, F)$ et $k \in \mathbf{R}_{>0}$. L'application f est k -lipschitzienne sur A si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F < k \cdot \|x - y\|_E.$$

PROPOSITION 142 (UNE APPLICATION LIPSCHITZIENNE EST UNIFORMÉMENT CONTINUE). — Soient $f \in \mathcal{F}(A, F)$ et $k \in \mathbf{R}_{>0}$. Si f est k -lipschitzienne sur A , alors elle est uniformément continue sur A .

DÉMONSTRATION. — Supposons que f est k -lipschitzienne sur A . Fixons $\varepsilon > 0$ et posons $\eta := \frac{\varepsilon}{k} > 0$. Alors, pour tout $(x, y) \in A^2$ tel que $\|x - y\|_E < \eta$:

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k \cdot \|x - y\|_E < k \cdot \eta = \varepsilon.$$

La fonction f est donc uniformément continue sur A . ■

Remarque 143 (l'uniforme continuité n'implique pas le caractère lipschitzien). — Démontrer que la fonction :

$$f \left| \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longrightarrow \sqrt{x} \end{array} \right.$$

est uniformément continue sur le segment $[0, 1]$, mais non-lipschitzienne sur $[0, 1]$. ■

EXERCICE 144 (LA NORME EST 1-LIPSCHITZIENNE). — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Démontrer que l'application :

$$\|\cdot\| \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longrightarrow \|x\| \end{array} \right.$$

est 1-lipschitzienne. □

EXERCICE 145 (UNE APPLICATION 2-LIPSCHITZIENNE). — Soit $A := B_f(0, 1)$ la boule unité fermée dans $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Démontrer que l'application

$$f \left| \begin{array}{l} A \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x_1, x_2) \longmapsto (x_1^2, x_2^2) \end{array} \right.$$

est 2-lipschitzienne. □

EXERCICE 146 (L'APPLICATION DISTANCE À UNE PARTIE NON VIDE EST 1-LIPSCHITZIENNE). — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et $A \subset E$ une partie non vide. Pour tout $x \in E$, notons :

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\| \quad [\text{la distance de } x \text{ à l'ensemble } A].$$

Démontrer que l'application « distance à A » :

$$d(\cdot, A) \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto d(x, A) \end{array} \right.$$

est 1-lipschitzienne. □

EXERCICE 147 (CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE DE NORMES VIA L'APPLICATION IDENTITÉ). — Justifier que deux normes N_1 et N_2 sur un \mathbf{K} -espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si les applications :

$$i_{N_1, N_2} \left| \begin{array}{l} (E, N_1) \longrightarrow (E, N_2) \\ x \longmapsto x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad i_{N_2, N_1} \left| \begin{array}{l} (E, N_2) \longrightarrow (E, N_1) \\ x \longmapsto x \end{array} \right.$$

sont lipschitziennes. □

§ 6. APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

1. CARACTÉRISATION DES APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

THÉORÈME 148 (CARACTÉRISATION DES APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES). — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Les cinq propositions suivantes sont équivalentes.

1. u est continue sur E .
2. u est continue en 0.
3. La restriction de u à la boule unité fermée est bornée.
4. Il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq C \cdot \|x\|_E.$$

5. u est lipschitzienne.

Exemple 149. — Tout endomorphisme de \mathbf{R}^n est continu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. ■

Exemple 150. — Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un \mathbf{R} -espace vectoriel E , de norme associée $\|\cdot\|$. Alors, pour tout $x \in E$, l'application :

$$\langle x, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbf{R} \\ y \longmapsto \langle x, y \rangle \end{array} \right.$$

est continue. ■

Exemple 151. — L'application évaluation en 0 :

$$\text{ev}_0 \left| \begin{array}{l} \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \\ f \longmapsto f(0) \end{array} \right.$$

est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. En revanche, elle n'est pas continue pour la norme $\|\cdot\|_1$. ■

Exemple 152. — L'application évaluation en 2 :

$$\text{ev}_2 \left| \begin{array}{l} \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R} \\ P \longmapsto P(2) \end{array} \right.$$

n'est pas continue pour la norme $\|\cdot\|_1$. En effet, $\|X^n\|_1 = 1$ alors que $\varphi(X^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. ■

EXERCICE 153 (DE LA CONTINUITÉ D'UNE FORME LINÉAIRE). — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire.

1. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est fermé si et seulement si φ est continue.
2. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est dense dans E si et seulement si φ n'est pas continue.

□

THÉORÈME 154 (CARACTÉRISATION DE L'ÉQUIVALENCE DES NORMES). — Soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E . Les trois propositions suivantes sont équivalentes.

1. N_1 et N_2 sont équivalentes.
2. (E, N_1) et (E, N_2) ont les mêmes parties ouvertes.
3. L'application identité de E est continue en tant qu'application de (E, N_1) vers (E, N_2) et en tant qu'application de (E, N_2) vers (E, N_1) .

2. OPÉRATIONS SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

THÉORÈME 155 (ESPACE VECTORIEL DES APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES). — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Notons $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $(E, \|\cdot\|_E)$ vers $(F, \|\cdot\|_F)$, i.e. :

$$\mathcal{L}_c(E, F) := \{f \in \mathcal{L}(E, F) : f \text{ est continue sur } E\}.$$

Alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

THÉORÈME 156 (COMPOSITION DES APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES). — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés. Soient $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$. Alors :

$$v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G).$$

3. NORME SUBORDONNÉE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE CONTINUE

PROPOSITION 157 (NORME SUBORDONNÉE POUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES). — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle norme subordinnée de u à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ le réel :

$$\| \|u\| \| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F.$$

L'application :

$$\| \cdot \| \left| \begin{array}{l} \mathcal{L}_c(E, F) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ u \longmapsto \| \|u\| \| \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Remarque 158 (formule alternative pour la norme subordinnée). — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\| \|u\| \| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F.$$

■

EXERCICE 159. — Calculer la norme subordinnée de l'application linéaire continue :

$$u \left| \begin{array}{l} (\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \\ (x, y) \longmapsto (x + 2y, 3x + 4y) \end{array} \right.$$

et généraliser.

□

EXERCICE 160. — Calculer la norme subordonnée de l'application linéaire continue.

$$\text{ev}_0 \left| \begin{array}{l} (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ f \longmapsto f(0). \end{array} \right.$$

□

EXERCICE 161. — Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ un endomorphisme de matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans la base canonique. Justifier que les applications linéaires :

$$\left| \begin{array}{l} (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_1) \\ x \longmapsto u(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \\ x \longmapsto u(x) \end{array} \right.$$

sont continues, puis calculer, dans les deux cas, sa norme subordonnée.

□

4. NORME SUBORDONNÉE D'UNE MATRICE CARRÉE

PROPOSITION 162 (CONTINUITÉ DES APPLICATIONS LINÉAIRES ET DIMENSION FINIE). — Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors tout endomorphisme de E est continu sur E .

PROPOSITION 163 (NORME SUBORDONNÉE SUR L'ESPACE DES MATICES CARRÉES). — Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$.

1. L'application :

$$\|\cdot\| \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \|X\| := \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \right\|_E \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

2. L'application :

$$\|\cdot\| \left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ A \longmapsto \|A\| := \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\| \end{array} \right.$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

5. INÉGALITÉS POUR LES NORMES SUBORDONNÉES

PROPOSITION 164 (MAJORATION PAR LA NORME SUBORDONNÉE). — Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Alors :

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq \|u\| \cdot \|x\|_E.$$

PROPOSITION 165 (SOUS-MULTIPLICATIVITÉ DE LA NORME SUBORDONNÉE). — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Alors :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}_c(E)^2, \quad \|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

6. APPLICATIONS MULTILINÉAIRES CONTINUES

PROPOSITION 166 (CARACTÉRISATION DES APPLICATIONS BILINÉAIRES CONTINUES). — Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés et :

$$B: E \times F \longrightarrow G$$

une application bilinéaire. L'application B est continue si et seulement si :

$$\exists C > 0, \quad \forall (x, y) \in E \times F, \quad \|B(x, y)\|_G \leq C \cdot \|x\|_E \cdot \|y\|_F.$$

DÉMONSTRATION. — Rappelons que la norme placée sur $E \times F$ est la norme produit $\|\cdot\|$, définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \|(x, y)\| := \max(\|x\|_E, \|y\|_F).$$

Procédons par double implication.

Implication directe. Supposons l'application B continue. Alors B est continue en tout point de $E \times F$, en particulier continue au point $(0_E, 0_F)$. Remarquons que, B étant bilinéaire, $B(0_E, 0_F) = 0_G$. Dans la définition de la continuité de B en $(0_E, 0_F)$, nous spécifions ε à $1 > 0$ pour obtenir qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in E \times F$:

$$\underbrace{\|(x, y)\| \leq \alpha}_{\|(x,y)-(0_E,0_F)\| \leq \alpha} \implies \underbrace{\|B(x, y)\|_G \leq 1}_{\|B(x,y)-B(0_E,0_F)\|_G \leq 1}.$$

Nous scindons alors l'étude en deux parties suivant que les vecteurs x et y s'annulent ou non.

- Soient x un vecteur de E non nul et y un vecteur de F non nul. Alors le vecteur $\left(\frac{\alpha}{\|x\|_E} \cdot x, \frac{\alpha}{\|y\|_F} \cdot y\right)$ de $E \times F$ a une norme $\|\cdot\|$ égale à α . Donc :

$$\left\| B\left(\frac{\alpha}{\|x\|_E} \cdot x, \frac{\alpha}{\|y\|_F} \cdot y\right) \right\|_G \leq 1.$$

En utilisant la bilinéarité de B , l'homogénéité de la norme $\|\cdot\|_G$ et le fait que $\alpha, \|x\|_E$ et $\|y\|_F$ sont strictement positifs, nous en déduisons :

$$(\star) \quad \|B(x, y)\|_G \leq \frac{1}{\alpha^2} \cdot \|x\|_E \cdot \|y\|_F.$$

- Si $(x, y) \in E \times F$ est tel que $x = 0_E$ ou $y = 0_F$, alors la bilinéarité de B livre $B(x, y) = 0_G$. L'inégalité (\star) s'étend donc à tous les vecteurs (x, y) de $E \times F$.

Implication réciproque. Supposons qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \|B(x, y)\|_G \leq C \cdot \|x\|_E \cdot \|y\|_F.$$

Soient $(x, y) \in E \times F$. Démontrons que B est continue en (x, y) , en appliquant le critère séquentiel de continuité. Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $E \times F$ telle que :

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} (x, y).$$

D'après le théorème 48, nous en déduisons :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_E} x \quad \text{et} \quad y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_F} y.$$

Soient $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} \|B(x_n, y_n) - B(x, y)\|_G &\leq \|B(x_n, y_n) - B(x_n, y)\|_G + \|B(x_n, y) - B(x, y)\|_G \quad [\text{inégalité triangulaire}] \\ &= \|B(x_n, y_n - y)\|_G + \|B(x_n - x, y)\|_G \quad [B \text{ est bilinéaire}] \\ &\leq C \cdot \|x_n\|_E \cdot \|y_n - y\|_F + C \cdot \|x_n - x\|_E \cdot \|y\|_F \quad [\text{cf. hypothèse}] \end{aligned}$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente donc bornée, pour la norme $\|\cdot\|_E$. Donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|x_n\|_E \leq M$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$0 \leq \|B(x_n, y_n) - B(x, y)\|_G \leq C M \|y_n - y\|_F + C \|x_n - x\|_E \|y\|_F.$$

D'après le théorème d'encadrement, $\|B(x_n, y_n) - B(x, y)\|_G \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, i.e. $B(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_G} B(x, y)$. ■

Exemple 167 (continuité du produit scalaire). — Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associée $\|\cdot\|$, alors l'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \left| \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle \end{array} \right.$$

est continue pour la norme $\|\cdot\|$. ■

PROPOSITION 168 (CARACTÉRISATION DES APPLICATIONS MULTILINÉAIRES CONTINUES). — Soient un entier $p \geq 2$, $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_p, \|\cdot\|_{E_p})$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés et :

$$f: E_1 \times \dots \times E_p \longrightarrow F$$

une application multilinéaire. L'application f est continue si et seulement si :

$$\exists C > 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \quad \|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq C \cdot \|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_p\|_{E_p}.$$

ÉLÉMENTS DE DÉMONSTRATION. — On adapte les idées développées pour établir la proposition 168. □

EXERCICE 169 (CONTINUITÉ DU DÉTERMINANT). — Démontrer que l'application :

$$\det \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array} \right.$$

est continue. □

§ 7. COMPACTITÉ

NOTATION. — $(E, \|\cdot\|_E)$ désigne un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E .

1. PROPRIÉTÉ DE BOLZANO-WEIERSTRASSET DÉFINITION DE LA COMPACTITÉ

DÉFINITION 170 (PROPRIÉTÉ DE BOLZANO-WEIERSTRASS). — On dit que A vérifie la propriété de Bolzano-Weierstraß si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite convergente dans A , i.e. si :

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \quad \exists \varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \nearrow, \quad \exists a \in A, \quad u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a.$$

DÉFINITION 171 (PARTIE COMPACTE). — On dit que A est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|_E)$ si A vérifie la propriété de Bolzano-Weierstraß.

Exemple 172. — Un segment de \mathbf{R} est un compact (théorème de Bolzano-Weierstrass de MP2I). ■

2. CARACTÈRE COMPACT VERSUS CARACTÈRES FERMÉ ET BORNÉ

PROPOSITION 173 (UN COMPACT EST FERMÉ BORNÉ). — Si A est un compact, alors A est fermé et borné.

Remarque 174 (la réciproque de la proposition précédente n'est pas nécessairement vraie). —

1. La boule unité fermée de $(\mathbf{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte. En effet, la suite $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence.
2. La boule unité fermée de $(\mathcal{B}([0, 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte. En effet, la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(2n\pi x) \end{array} \right.$$

n'a pas de valeur d'adhérence. ■

PROPOSITION 175 (UN FERMÉ D'UN COMPACT EST COMPACT). — Supposons A compacte et considérons une partie B de A . Alors B est un compact si et seulement si B est fermé.

3. CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE DE CONVERGENCE DANS UN COMPACT

PROPOSITION 176 (SUITE D'UN COMPACT POSSÉDANT UNE UNIQUE VALEUR D'ADHÉRENCE). — *Supposons A compacte et considérons une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence.*

4. PRODUIT D'UN NOMBRE FINI DE COMPACTS

THÉORÈME 177 (UN PRODUIT D'UN NOMBRE FINI DE COMPACTS EST COMPACT). — *Soient un entier $p \geq 2$ et $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_p, \|\cdot\|_p)$ des espaces vectoriels normés. Soient $A_1 \subset E_1, \dots, A_p \subset E_p$ des compacts. Alors $A_1 \times \dots \times A_p$ est un compact de l'espace vectoriel normé produit $(E_1 \times \dots \times E_p, \|\cdot\|)$.*

COROLLAIRE 178 (COMPACTS DE $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\infty})$). — *Une partie de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_{\infty})$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

EXERCICE 179. — Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Supposons que la sphère unité $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ est compacte. Démontrer que la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ est compacte. □

EXERCICE 180. — Munissons le \mathbf{R} -espace vectoriel :

$$\ell^{\infty}(\mathbf{R}) := \{(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ est bornée} \}$$

de la norme :

$$\|\cdot\|_{\infty} \left| \begin{array}{l} \ell^{\infty}(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \longmapsto \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|. \end{array} \right.$$

La boule unité fermée de $(\ell^{\infty}(\mathbf{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ est-elle compacte? □

EXERCICE 181. — Soit K un compact d'un espace vectoriel normé. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K . □

§ 8. APPLICATIONS CONTINUES SUR UNE PARTIE COMPACTE

NOTATION. — $(E, \|\cdot\|_E)$ désigne un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E .

THÉORÈME 182 (L'IMAGE CONTINUE D'UN COMPACT EST UN COMPACT). — *Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{C}^0(A, F)$. Alors :*

$$A \text{ est un compact de } (E, \|\cdot\|_E) \implies f(A) \text{ est un compact de } (F, \|\cdot\|_F).$$

COROLLAIRE 183 (THÉORÈME DES BORNES ATTEINTES). — *Si A est compact et $f \in \mathcal{C}(A, \mathbf{R})$, alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. :*

$$\exists (x_m, x_M) \in A^2, \quad \forall x \in A, \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$

EXERCICE 184. — On munit \mathbf{R}^3 de la norme $\|\cdot\|_2$ et on note B la boule unité fermée de l'espace vectoriel normé ainsi formé. Démontrer que l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} B \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y, z) \longmapsto x \cdot \sin(y) + y \cdot \cos(z) + z^3 \end{array} \right.$$

□

THÉORÈME 185 (DE HEINE). — Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $f \in \mathcal{C}^0(A, E)$. Alors :

$$A \text{ est compact} \implies f \text{ est uniformément continue sur } A.$$

DÉMONSTRATION. — La démonstration est analogue à celle exposée en MP2I pour une application continue d'un segment de \mathbf{R} (qui est une partie compacte de \mathbf{R}) dans \mathbf{R} . ■

§ 9. CONNEXITÉ PAR ARCS

NOTATION. — Dans toute cette partie, E désigne un \mathbf{K} -espace vectoriel normé et A une partie non vide de E .

1. ARC JOIGNANT DEUX POINTS ET PARTIE CONNEXE PAR ARCS

DÉFINITION 186 (ARC JOIGNANT DEUX POINTS). — Soit $(a, b) \in A^2$. Un arc tracé dans A joignant a et b est une application continue :

$$\varphi: [\alpha, \beta] \longrightarrow A$$

où $\alpha < \beta$ sont réels, telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

EXERCICE 187 (PROPRIÉTÉS DES ARCS). — Soient a, b, c des points de A .

1. Donner un arc tracé dans A joignant a à a .
2. Soit γ un arc tracé dans A joignant a à b . Donner un arc tracé dans A joignant b à a .
3. Soient γ un arc tracé dans A joignant a à b et κ un arc tracé dans A joignant b à c . Donner un arc tracé dans A joignant a à c .

□

DÉFINITION 188 (PARTIE CONNEXE PAR ARCS). — Soit $A \subset E$ une partie non vide. On dit que A est connexe par arcs si, pour tout couple $(a, b) \in A^2$, il existe un arc tracé dans A joignant a à b .

EXERCICE 189 (COMPOSANTES CONNEXES PAR ARCS D'UNE PARTIE). — Soit X une partie non vide de E . On définit la relation \sim sur X par :

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2, \quad x_1 \sim x_2 : \iff \text{il existe un arc tracé dans } X \text{ joignant } x_1 \text{ à } x_2.$$

1. Démontrer que \sim est une relation d'équivalence sur X .
2. Une classe d'équivalence pour la relation \sim est appelée composante connexe par arcs. Justifier que X est réunion disjointes de composantes connexes par arcs.

□

EXERCICE 190 ($GL_n(\mathbf{C})$ EST CONNEXE PAR ARCS). — Démontrer que $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs. □

THÉORÈME 191 (LA CONVEXITÉ IMPLIQUE LA CONNEXITÉ PAR ARCS). — Une partie convexe de E est connexe par arcs.

Exemple 192 (les boules sont connexes par arcs). — Une boule d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs. ■

DÉFINITION 193 (PARTIE ÉTOILÉE). — La partie A est dite étoilée si :

$$\exists a_0 \in A, \quad \forall a \in A, \quad [a_0, a] \subset A$$

THÉORÈME 194 (LE CARACTÈRE ÉTOILÉ IMPLIQUE LA CONNEXITÉ PAR ARCS). — Une partie étoilée de E est connexe par arcs.

THÉORÈME 195 (CARACTÉRISATION DES PARTIES CONNEXES PAR ARCS DE \mathbf{R}). — Soit $A \subset \mathbf{R}$ une partie non vide. Alors :

$$A \text{ est connexe par arcs} \iff A \text{ est un intervalle.}$$

EXERCICE 196 (OPÉRATION SUR LES PARTIES CONNEXES PAR ARCS). —

1. L'intersection de deux parties connexes par arcs est-elle connexe par arcs ?
2. Une réunion de deux parties connexes par arcs est-elle connexe par arcs ?

□

2. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

THÉORÈME 197 (IMAGE CONTINUE D'UNE PARTIE CONNEXE PAR ARCS). — Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé et $f: A \rightarrow F$ une application continue. Alors :

$$A \text{ est connexe par arcs} \implies f(A) \text{ est connexe par arcs.}$$

EXERCICE 198 ($\text{SO}_2(\mathbf{R})$ EST CONNEXE PAR ARCS). — Démontrer que :

$$\text{SO}_2(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) : A^T A = I_2 \text{ et } \det(A) = 1\}$$

est connexe par arcs.

□

COROLLAIRE 199 (GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES). — Soit $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue.

$$\left(\begin{array}{c} A \text{ connexe par arcs} \\ \text{et} \\ \exists (a_1, a_2) \in A^2, \quad f(a_1)f(a_2) \leq 0 \end{array} \right) \implies \exists a \in A, \quad f(a) = 0_{\mathbf{R}}.$$

DÉMONSTRATION. — L'image $f(A)$ de A par f est une partie connexe par arcs de \mathbf{R} (théorème 197), donc un intervalle de \mathbf{R} (théorème 195). Comme $f(a_1)$ et $f(a_2)$ sont dans $f(A)$, et de signes opposés, 0 se trouve donc aussi dans $f(A)$ qui est un intervalle de \mathbf{R} . Donc $0 \in \mathbf{R}$ possède au moins un antécédent par f dans A . ■

EXERCICE 200 ($\text{GL}_n(\mathbf{R})$ N'EST PAS CONNEXE PAR ARCS). — Démontrer que $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs.

□

EXERCICE 201 (COMPOSANTES CONNEXES DE $\text{GL}_n(\mathbf{R})$). — Démontrer que :

$$\text{GL}_n(\mathbf{R})^+ := \{A \in \text{GL}_n(\mathbf{R}) : \det(A) > 0\} \quad \text{et} \quad \text{GL}_n(\mathbf{R})^- := \{A \in \text{GL}_n(\mathbf{R}) : \det(A) < 0\}$$

sont les deux composantes connexes de $\text{GL}_n(\mathbf{R})$.

□

EXERCICE 202 (\mathbf{R} ET \mathbf{R}^2 NE SONT PAS HOMÉOMORPHES). — Un homéomorphisme de \mathbf{R} vers \mathbf{R}^2 est une application bijective et continue, dont la bijection réciproque est également continue. Démontrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme de \mathbf{R} vers \mathbf{R}^2 .

□

§ 10. ESPACES VECTORIELS NORMÉS DE DIMENSION FINIE

NOTATION. — Dans toute cette partie, E désigne un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. ÉQUIVALENCE DES NORMES ET INVARIANCE DES NOTIONS TOPOLOGIQUES

THÉORÈME 203 (ÉQUIVALENCE DES NORMES EN DIMENSION FINIE). — *Toutes les normes sur E sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. — • Toute norme de \mathbf{K}^n est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. Nous notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbf{K}^n et considérons une norme N sur cet espace.

- Première relation de comparaison entre N et $\|\cdot\|_\infty$. On vérifie :

$$\forall x \in \mathbf{K}^n, \quad N(x) \leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n N(e_k) \right)}_{=: \alpha > 0} \|x\|_\infty$$

en décomposant un vecteur de \mathbf{K}^n dans la base \mathcal{B}_0 grâce à ses coordonnées, qui sont également ses composantes ici.

- Compacité de la sphère unité de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. La sphère unité de $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$:

$$S := \{x \in \mathbf{K}^n : \|x\|_\infty = 1\}$$

est fermée, bornée dans $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, donc compacte dans $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ (corollaire 178).

- La norme N induit une application numérique continue sur $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. D'après (a) l'application linéaire :

$$f \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{K}^n, N) \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

est continue. Composée avec l'application 1-lipschitzienne :

$$N \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{K}^n, N) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array} \right.$$

nous obtenons l'application continue :

$$N \circ f \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array} \right.$$

- Deuxième relation de comparaison entre N et $\|\cdot\|_\infty$ grâce au théorème des bornes atteintes. D'après le théorème des bornes atteintes, appliqué à la restriction de l'application continue $N \circ f$ à la partie compacte S de dans $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$:

$$(\star) \quad \exists x_m \in S, \quad \forall x \in S, \quad \underbrace{N(x_m)}_{=: \beta} \leq N(x).$$

Par séparation de la norme x_m , $N(x_m) > 0$. Nous déduisons de (\star) que :

$$\forall x \in E, \quad \beta \|x\|_\infty \leq N(x).$$

- Conclusion. D'après (a) et (d), les normes N et $\|\cdot\|_\infty$.

- Toute les normes de \mathbf{K}^n sont équivalentes. D'après ce qui précède, si N_1 et N_2 sont deux normes sur \mathbf{K}^n , alors elles sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$. Comme la relation « être équivalentes » définie sur l'ensemble des normes de \mathbf{K}^n est une relation d'équivalence, les normes N_1 et N_2 sont équivalentes entre elles.

- Toute les normes de E sont équivalentes. Considérons une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E . Les applications :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \sum_{k=1}^n x_k \cdot u_k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ x & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)^\top \end{array} \right.$$

sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre. Considérons deux normes N_1 et N_2 sur E . Alors les applications :

$$N_1 \circ \varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & N_1 \left(\sum_{k=1}^n x_k \cdot u_k \right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad N_2 \circ \varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & N_2 \left(\sum_{k=1}^n x_k \cdot u_k \right) \end{array} \right.$$

sont deux normes sur \mathbf{K}^n . D'après ce qui précède, on déduit que :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}_{>0}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n, \quad \alpha N_1(\varphi(x_1, \dots, x_n)) \leq N_2(\varphi(x_1, \dots, x_n)) \leq \beta N_1(\varphi(x_1, \dots, x_n)).$$

Grâce à ψ , il vient :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Les normes N_1 et N_2 sont donc équivalentes. ■

PROPOSITION 204 (PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES INTRINSÈQUES EN DIMENSION FINIE). — Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur le \mathbf{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

1. *Partie bornée.* Une partie A de E est bornée pour la norme N_1 si et seulement si elle est bornée pour la norme N_2 .
2. *Suite convergente.* Une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in E$ pour la norme N_1 si et seulement si elle converge vers ℓ pour la norme N_2 .
3. *Partie ouverte.* Une partie A de E est ouverte pour la norme N_1 si et seulement si elle est ouverte pour la norme N_2 .
4. *Partie fermée.* Une partie A de E est fermée pour la norme N_1 si et seulement si elle est fermée pour la norme N_2 .
5. *Adhérence d'une partie.* Si A est une partie de E , alors son adhérence pour la norme N_1 coïncide avec son adhérence pour la norme N_2 .
6. *Intérieur d'une partie.* Si A est une partie de E , alors son intérieur pour la norme N_1 coïncide avec son intérieur pour la norme N_2 .
7. *Frontière d'une partie.* Si A est une partie de E , alors sa frontière pour la norme N_1 coïncide avec sa frontière pour la norme N_2 .
8. *Compacité d'une partie.* Une partie A de E est compacte pour la norme N_1 si et seulement si elle est compacte pour la norme N_2 .
9. *Connexité par arcs d'une partie.* Une partie A de E est connexe par arcs pour la norme N_1 si et seulement si elle est connexe par arcs pour la norme N_2 .



Sur un espace vectoriel de dimension finie, il est d'usage de ne pas préciser la norme que l'on choisit. En effet, toutes les normes sont équivalentes sur un tel espace et, par conséquent, les notions topologiques sont intrinsèques, i.e. indépendantes de tout choix de norme.

2. CONVERGENCE DES SUITES EN DIMENSION FINIE

PROPOSITION 205 (CONVERGENCE D'UNE SUITE EN DIMENSION FINIE). — Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et une suite :

$$\left(x_n = \sum_{k=1}^n x_{k,n} \cdot e_k \right)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}.$$

Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge dans E si et seulement si : les n suites numériques $(x_{k,n})_{n \in \mathbf{N}}$ convergent dans \mathbf{K} .

3. COMPACTITÉ EN DIMENSION FINIE

THÉORÈME 206 (COMPACTITÉ EN DIMENSION FINIE). — Soit A une partie de E . Alors :

$$A \text{ est compacte} \iff A \text{ est fermée et bornée.}$$

EXERCICE 207 (PROPRIÉTÉ TOPOLOGIQUE DU GROUPE ORTHOGONAL ET DU GROUPE SPÉCIAL ORTHOGONAL). — Démontrer que le groupe orthogonal :

$$O_n(\mathbf{R}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) : A^\top A = I_n\}$$

et le groupe spécial orthogonal :

$$SO_n(\mathbf{R}) := \{A \in O_n(\mathbf{R}) : \det(A) = 1\}$$

sont des parties compactes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. □

4. CARACTÈRE FERMÉ D'UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION FINIE

THÉORÈME 208 (PROPRIÉTÉ TOPOLOGIQUE D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE). — Soient (F, N) un espace vectoriel normé (non nécessairement de dimension finie) et A un sous-espace vectoriel de dimension finie de F . Alors A est une partie fermée de F .

DÉMONSTRATION. — Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ une suite qui converge vers $x \in F$. Démontrons que $x \in A$.

(a) Les a_n appartiennent à la trace d'une boule fermée de F sur A . Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, elle est bornée. Donc il existe $r > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n \in B_f(0, r) \quad [\text{boule fermée de centre } 0 \text{ et de rayon } r \text{ de } F].$$

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \in A$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n \in B_f(0, r) \cap A.$$

(b) $B_f(0, r) \cap A$ est une partie compacte de (A, N_A) . La restriction N_A de la norme N à A définit une norme sur l'espace vectoriel A . Nous remarquons que $B_f(0, r) \cap A$ coïncide avec :

$$\{a \in A : N_A(x) \leq r\}$$

qui n'est autre que la boule fermée de centre 0 et de rayon r de l'espace vectoriel normé (A, N_A) . Ainsi, $B_f(0, r) \cap A$ est-elle une partie fermée et bornée de l'espace vectoriel normé (A, N_A) . Comme A est de dimension finie, $B_f(0, r) \cap A$ est compacte.

(c) Conclusion. D'après (a) et (b), il existe une application $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ qui est strictement croissante et un point $a \in A$ tels que :

$$a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \quad [\text{convergence au sens de la norme } N_A \text{ (en particulier) donc au sens de la norme } N].$$

Comme une suite convergente possède une unique valeur d'adhérence, sa limite, il vient $x = a \in A$. ■

EXERCICE 209. — On munit $E := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales. F est-il fermé dans E ? □

5. APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

THÉORÈME 210 (APPLICATIONS LINÉAIRES EN DIMENSION FINIE). — Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé. Toute application linéaire de $(E, \|\cdot\|_E)$ vers $(F, \|\cdot\|_F)$ est continue, i.e. :

$$\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F).$$

6. APPLICATIONS MULTILINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

THÉORÈME 211 (APPLICATIONS MULTILINÉAIRES EN DIMENSION FINIE). — Si $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ sont des espaces vectoriels normés de dimension finie et si $(F, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors toute application multilinéaire :

$$f: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$$

est continue.

Exemple 212 (continuité du déterminant). — Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors le déterminant dans \mathcal{B} est n -linéaire et continu. De plus, l'application déterminant :

$$\det \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array} \right.$$

est continue. ■

Exemple 213 (continuité du produit matriciel). — L'application :

$$\mu \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array} \right.$$

est bilinéaire et continue. ■

Exemple 214 (continuité de la composition d'applications linéaires). — Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie.

$$\mu \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ (v, u) & \longmapsto & v \circ u \end{array} \right.$$

est bilinéaire continue. ■