RÉVISIONS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

CHAPITRE 5

par David Blottière, le 13 octobre 2023 à 07h03

SOMMAIRE

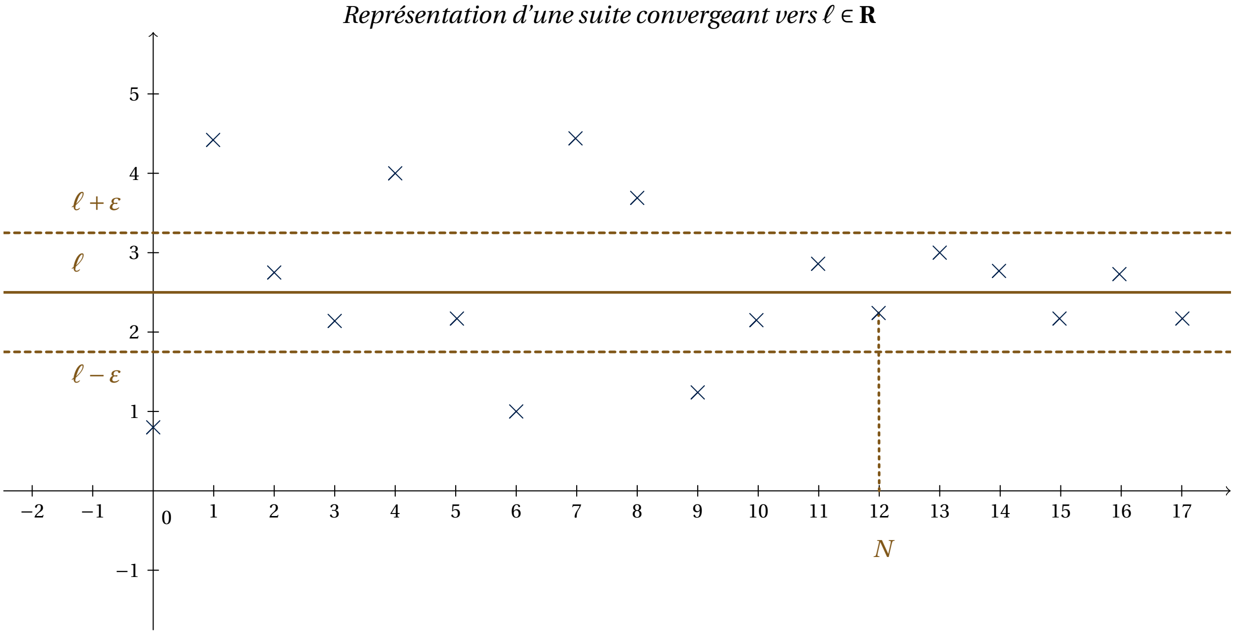
§ 1. LIMITE DE SUITE

1. SUITES CONVERGENTES

DÉFINITION 1 (SUITE CONVERGEANT VERS $\ell \in \mathbf{R}$). — *Soit $(u_n)_{\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que la suite $(u_n)_{\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}, \qquad \exists N \in \mathbf{N}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Représentation d'une suite convergeant vers $\ell \in \mathbf{R}$



PROPOSITION 2 (UNICITÉ DE LA LIMITE D'UNE SUITE CONVERGENTE). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergente. Alors le nombre réel ℓ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ est unique. On l'appelle limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et on le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*

PROPOSITION 3 (CONVERGENTE $\Longrightarrow$ BORNÉE). — *Toute suite réelle convergente est bornée.*

EXERCICE 4. — Une suite réelle bornée est-elle nécessairement convergente ? □

EXERCICE 5 (SIGNE D'UNE SUITE CONVERGEANT VERS UN RÉEL STRICTEMENT POSITIF). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergente de limite $\ell > 0$. Démontrer que u_n est strictement positif à partir d'un certain rang. □

EXERCICE 6. — Une suite réelle convergente est-elle nécessairement monotone à partir d'un certain rang ? □

EXERCICE 7. — Une suite de réels strictement positifs, convergente, de limite nulle est-elle nécessairement décroissante à partir d'un certain rang ? □

EXERCICE 8 (ÉCRITURE FORMELLE DE DEUX PROPRIÉTÉS). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle et soit $\ell \in \mathbf{R}$. Exprimer les propriétés suivantes sous forme quantifiée.

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas vers ℓ.
2. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet pas de limite finie.

□

THÉORÈME 9 (OPÉRATIONS SUR LES SUITES CONVERGENTES). —
L'ensemble $\mathscr{S}_c$ des suites réelles convergentes indexées par $\mathbf{N}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, i.e. :

1. *la suite constante nulle appartient à $\mathscr{S}_c$*
2. *l'ensemble $\mathscr{S}_c$ est stable par somme :*
$$\forall (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c, \quad \forall (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c, \quad (a_n + b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c$$
3. *l'ensemble $\mathscr{S}_c$ est stable par multiplication par un scalaire :*
$$\forall (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad (\lambda a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c$$
4. *l'ensemble $\mathscr{S}_c$ est stable par multiplication interne :*
$$\forall (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c, \quad \forall (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c, \quad (a_n\, b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c\,.$$

L'application :
$$\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{S}_c & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (a_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n \end{array}\right.$$
est un morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres, i.e. :

1. *l'application est linéaire :*
$$\forall (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c,\ \forall (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2,\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \lambda a_n + \mu b_n = \lambda \lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n + \mu \lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n$$
2. *l'image de la suite constante égale à 1 (qui est le neutre de $\mathscr{S}_c$ pour la multiplication interne) est le réel 1 (qui est le neutre de $\mathbf{R}$ pour la multiplication)*
3. *l'application respecte le produit interne*
$$\forall (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c, \quad \forall (b_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c, \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n\, b_n = \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n\right).$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c$ telle que $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, i.e. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c$ est un élément inversible de $\mathscr{S}_c$. On suppose que $\ell := \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \neq 0$. Alors
$$\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{S}_c \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}.$$

EXERCICE 10 (CONVERGENCE DU CARRÉ D'UNE SUITE VERSUS CONVERGENCE DE LA SUITE ELLE-MÊME). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle.

1. Si $\left(u_n^2\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle nécessairement ?
2. Si $\left(u_n^2\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge-t-elle nécessairement vers 0 ?

□

EXERCICE 11. — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que $a_n - b_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$. Peut-on affirmer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n$? □

THÉORÈME 12 (PASSAGE À LA LIMITE DANS UNE INÉGALITÉ LARGE). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles. On suppose que :*

(H1) la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ;

(H2) la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ;

(H3) $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

Alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

EXERCICE 13. — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles convergentes. On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < v_n$. A-t-on nécessairement $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n < \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$? □

THÉORÈME 14 (ENCADREMENT). — *Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites réelles. On suppose que :*

(H1) la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ;

(H2) la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente ;

(H3) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} c_n$;

(H4) $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ à partir d'un certain rang.

Alors

(C1) la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge ;

(C2) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} c_n$.

EXERCICE 15. — Démontrer :

$$\frac{\cos(n)}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$$

puis proposer une généralisation du résultat.

□

EXERCICE 16 (COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $(\sin(n)_{n\in\mathbf{N}})$). — Démontrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbf{N}}$ diverge. □

2. SUITES DIVERGEANT VERS $-\infty$

DÉFINITION 17 (SUITE DIVERGEANT VERS $-\infty$)). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et on note $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} -\infty$, si*

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant A.$$

THÉORÈME 18 (DOMINATION POUR LA DIVERGENCE VERS $-\infty$). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.*

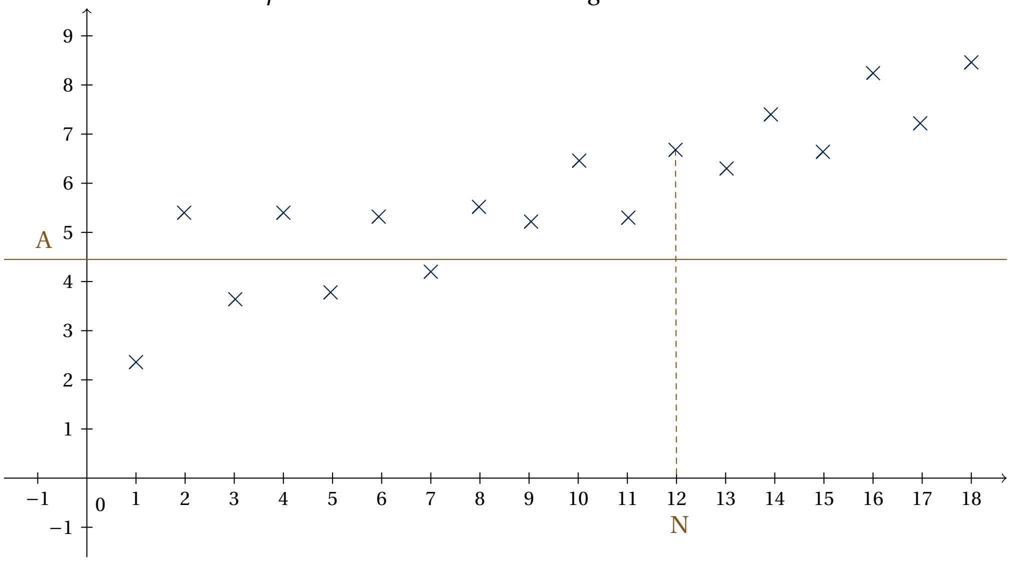
$$v_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} -\infty \quad \Longrightarrow \quad u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} -\infty$$

3. SUITES DIVERGEANT VERS $+\infty$

DÉFINITION 19 (SUITE DIVERGEANT VERS $+\infty$). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et on note $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, si*

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A.$$

Représentation d'une suite divergeant vers $+\infty$



THÉORÈME 20 (DOMINATION POUR LA DIVERGENCE VERS $+\infty$). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$ alors $v_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$.*

4. UNE SÉLECTION D'EXERCICES

EXERCICE 21. — Démontrer $n! \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} n!$. □

EXERCICE 22 (COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE SUITE RÉELLE GÉOMÉTRIQUE). — Soit $q \in \mathbf{R}$. Quel est le comportement asymptotique de la suite $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$? □

EXERCICE 23 (OPÉRATIONS SUR LES SUITES DIVERGEANT VERS L'INFINI). — Énoncer et démontrer les résultats sur les opérations sur les suites réelles divergeant vers l'infini. □

EXERCICE 24 (CROISSANCES COMPARÉES). — Soient des nombres réels α, β, q strictement positifs. Énoncer les résultats sur les croissances comparées des suites :

$$(n^\alpha)_{n\in\mathbf{N}} \qquad \left(\ln^\beta(n)\right)_{n\in\mathbf{N}^*} \qquad (q^n)_{n\in\mathbf{N}} \qquad (n!)_{n\in\mathbf{N}}\,.$$

Comment peut-on les établir ? □

EXERCICE 25 (FORMALISATION DE LA NON DIVERGENCE VERS $+\infty$). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Exprimer à l'aide d'une proposition logique quantifiée l'assertion : « $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$ ». □

EXERCICE 26. — Une suite réelle qui ne tend pas vers $+\infty$ est-elle nécessairement majorée ? □

EXERCICE 27. — Une suite qui tend vers $+\infty$ est-elle nécessairement croissante à partir d'un certain rang ? □

EXERCICE 28 (SUITE RÉELLE NON MAJORÉE). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle non majorée. Démontrer qu'il existe une application $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, strictement croissante, telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. □

EXERCICE 29 (UNE VERSION DU CRITÈRE DE D'ALEMBERT POUR LES SUITES). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

1. Démontrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $\ell < 1$.
2. Démontrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $\ell > 1$.
3. Que peut-on dire du comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si $\ell = 1$?

□

EXERCICE 30. — Soit $x \in \mathbf{R}$.

1. Justifier que le nombre $\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ est bien défini à partir d'un certain rang n_x.
2. Étudier le comportement asymptotique de la suite $\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant n_x}$.

□

EXERCICE 31 (LA FORME INDÉTERMINÉE $1^{+\infty}$). —

1. Soit $\ell > 0$. Donner une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 1 et telle que $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
2. Donner une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 1 et telle que $v_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Donner une suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 1 et telle que la suite $\left(w_n^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ n'ait ni limite finie ni limite infinie.

□

EXERCICE 32. — Quel peut être le comportement asymptotique d'une suite réelle ? □

§ 2. THÉORÈME DE LA LIMITE MONOTONE ET CONSÉQUENCES

THÉORÈME 33 (LA LIMITE MONOTONE). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle croissante.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, alors elle converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.*

Remarque 34. — Ce théorème d'existence « abstraite » de limite est un outil puissant pour construire de nouveaux nombres. Il a des applications très riches, dans la théorie des séries numériques par exemple. ■

EXERCICE 35. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle, décroissante et minorée par 0. A-t-on nécessairement $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$? □

COROLLAIRE 36 (THÉORÈME DES SUITES ADJACENTES). — *Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites réelles. On suppose que*

(H1) $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est croissante ;*

(H2) $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est décroissante ;*

(H3) $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors

(C1) $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge ;*

(C2) $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge ;*

(C3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$;

(C4) $\forall\, k \in \mathbf{N}, \quad u_0 \leqslant u_k \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant v_k \leqslant v_0$.

Remarque 37. — Le théorème des suites adjacentes est, avant tout, un critère de convergence pour deux suites. Le résultat sur la valeur commune des deux limites est trivial, une fois les deux convergences établies. ■

Exercice 38. — Que peut-on dire de deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant seulement les hypothèses (H1) et (H2) du théorème des suites adjacentes ? □

Exercice 39 (Théorème des segments emboîtés). — Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites réelles telles que $a_n \leqslant b_n$, pour tout $n\in\mathbf{N}$. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose $K_n := [a_n, b_n]$, le segment d'extrémités a_n, b_n. On suppose que :

(H1) la suite $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, i.e. $K_{n+1}\subset K_n$, pour tout $n\in\mathbf{N}$;

(H2) longueur$(K_n) := b_n - a_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

Démontrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} K_n$ est un singleton, i.e. il existe $\ell\in\mathbf{R}$ tel que $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} K_n = \{\ell\}$. □

Exercice 40. — Que dire d'une suite $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de segments de $\mathbf{R}$ décroissante au sens de l'inclusion (i.e. vérifiant uniquement l'hypothèse (H1) du théorème des segments emboîtés) ? □

Exercice 41 ($\liminf$ et $\limsup$ d'une suite réelle bornée). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on pose :

$$v_n := \inf_{p\geqslant n} u_p \qquad \text{et} \qquad w_n := \sup_{p\geqslant n} u_p.$$

1. Démontrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes.
2. Que peut-on dire de plus, dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge ?

□

§ 3. Valeur d'adhérence

Définition 42 (suite extraite et valeur d'adhérence). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle.*

1. *On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, où $\varphi\colon \mathbf{N}\longrightarrow\mathbf{N}$ est une application strictement croissante.*
2. *Un nombre réel ℓ est appelée valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers ℓ.*

Exercice 43 (calculs de quelques valeurs d'adhérence). —

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$, pour tout $n\in\mathbf{N}$. Démontrer que -1 et 1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_n = n\,(1+(-1)^n)$, pour tout $n\in\mathbf{N}$. Déterminer une valeur d'adhérence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

□

Proposition 44 (valeur d'adhérence d'une suite convergente). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell\in\mathbf{R}$. Toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne possède qu'une valeur d'adhérence : ℓ.*

Exercice 45 (suite extraite des termes d'indices pairs et suite extraite des termes d'indices impairs). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur ces deux suites extraites, pour que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. □

Exercice 46 (critère pour être valeur d'adhérence d'une suite). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle et soit $\ell\in\mathbf{R}$. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

1. ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. $\forall\,\varepsilon>0,\quad \forall\, N\in\mathbf{N},\quad \exists\, n\geqslant N,\quad |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$.
3. Pour tout $\varepsilon>0$, l'ensemble $\{n\in\mathbf{N} : |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon\}$ est infini.
4. Il existe une suite d'entiers naturels strictement croissante $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $u_{k_n}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{}\ell$.

□

Exercice 47 (Ensemble de valeurs d'adhérence). —

1. Déterminer toutes les valeurs d'adhérence des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Déterminer toutes les valeurs d'adhérence des suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_n = n\,(1+(-1)^n)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

□

***Exemple 48.* —** Un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$ est monogène ou dense dans $\mathbf{R}$. Grâce à ce résultat, on peut démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est le segment $[-1, 1]$. ■

Exercice 49. — Une suite réelle ayant une unique valeur d'adhérence est-elle nécessairement convergente ? □

Exercice 50. — Une suite réelle possède-t-elle toujours une valeur d'adhérence ? □

Exercice 51. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Soient $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ et $\psi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ deux applications strictement croissantes. Les suites

$$(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad (u_{\psi\circ\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$$

sont-elles des suites extraites de $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$? □

§ 4. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 52 (Bolzano-Weierstrass). — *Toute suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence.*

Corollaire 53 (Suite réelle bornée ayant une unique valeur d'adhérence). — *Toute suite réelle bornée ayant une unique valeur d'adhérence converge.*

Exercice 54 (Suites extraites de deux suites, convergentes et ayant des indices communs). — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles bornées. Démontrer qu'il existe une application $\varphi\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que les suites $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent. □

Exercice 55 (Valeurs d'adhérence identiques). — Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ont les mêmes valeurs d'adhérence. □

Exercice 56 (Borne supérieure, borne inférieure et valeurs d'adhérence). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Démontrer que A admet une borne supérieure et une borne inférieure, et que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ appartiennent à A. □

Exercice 57 (Lemme de la puce). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée telle que :

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un segment. □

***Remarque 58.* —** Le théorème de Bolzano-Weierstraß permet de démontrer plusieurs théorèmes fondamentaux, portant sur les fonctions définies et continues sur un segment de $\mathbf{R}$. Nous en mentionnons deux.

1. *Le théorème de Heine*
   Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Soit $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors f est une fonction uniformément continue, i.e. :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |x-y| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\,.$$
2. *Le théorème des bornes atteintes*
   Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$. Soit $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. :
   $$\exists (x_m, x_M) \in [a, b]^2, \quad \forall x \in [a, b], \quad f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M)\,.$$

■

§ 5. Limite inférieure et limite supérieure (HP)

On étudie plus en profondeur des notions rencontrées lors de la résolution de l'exercice 41.

Définition 59 (limite supérieure et limite inférieure). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée.*

1. *La suite $\left(\sup\limits_{p\geqslant n} u_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée. Elle converge donc vers $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}}\sup\limits_{p\geqslant n} u_p$. On appelle limite supérieure de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et on note $\limsup u_n$ la limite de la suite $\left(\sup\limits_{p\geqslant n} u_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$, i.e. :*
$$\limsup u_n := \inf_{n\in\mathbf{N}}\sup_{p\geqslant n} u_p = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sup_{p\geqslant n} u_p.$$
2. *La suite $\left(\inf\limits_{p\geqslant n} u_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et majorée. Elle converge donc vers $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\inf\limits_{p\geqslant n} u_p$. On appelle limite inférieure de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et on note $\liminf u_n$ la limite de la suite $\left(\inf\limits_{p\geqslant n} u_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$, i.e. :*
$$\liminf u_n := \sup_{n\in\mathbf{N}}\inf_{p\geqslant n} u_p = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\inf_{p\geqslant n} u_p.$$

Proposition 60 (limite inférieure, limite supérieure et valeur d'adhérence). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée.*

1. *$\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*
2. *$\limsup u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*
3. *$\liminf u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.*

Exercice 61 (Un critère de convergence via $\limsup$ et $\liminf$). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si $\limsup u_n = \liminf u_n$. □

Exercice 62 (Suites sous-additives). — Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels positifs telle que :
$$\forall (n,m)\in\mathbf{N}^2,\qquad u_{n+m}\leqslant u_n+u_m.$$

1. Soit $(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ tel que $n<m$. Démontrer qu'il existe $r\in\mathbf{N}$ tel que $r<n$ et :
$$\frac{u_m}{m}\leqslant\frac{u_n}{n}+\frac{u_r}{m}.$$
2. On suppose $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée. Démontrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

□

§ 6. Suites complexes

Définition 63 (convergence d'une suite à valeurs complexes). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes, soit $\ell\in\mathbf{C}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ et on écrit $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell$ si :*
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N_\varepsilon\in\mathbf{N},\quad \forall n\in\mathbf{N},\qquad n\geqslant N_\varepsilon\Longrightarrow |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

***Remarque 64.* —** Dans la définition 63, le symbole $|\cdot|$ désigne le module. ■

Proposition 65 (convergence via les parties réelle et imaginaire). — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes, soit $\ell\in\mathbf{C}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si la suite $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et la suite $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\mathrm{Im}(\ell)$.*

Remarque 66 (Concepts et résultats sur les suites réelles qui s'étendent aux suites complexes). —

- Les Théorèmes d'opérations.
- La notion de valeur d'adhérence.
- Le Théorème de Bolzano-Weierstraß.

■

Remarque 67 (Concepts et résultats sur les suites réelles qui ne s'étendent pas aux suites complexes). —

- La notion de suite monotone et le Théorème de convergence monotone.
- Le Théorème de passage à la limite dans une inégalité large.
- Le Théorème d'encadrement.
- La notion de suites adjacentes, le théorème des suites adjacentes.
- La notion de limite supérieure et de limite inférieure.

■

EXERCICE 68 (COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE SUITE COMPLEXE GÉOMÉTRIQUE). — Soit $q \in \mathbf{C}$. Quel est le comportement asymptotique de la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$? □

EXERCICE 69 (MODULE ET ARGUMENTS). — Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels. On suppose que la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, de terme général

$$z_n := \rho_n e^{i\theta_n}$$

est convergente et on note $z = \rho e^{i\theta}$ sa limite (que l'on suppose non nulle), où ρ est un réel positif et θ un réel.

1. Les suites $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent-elles nécessairement ?
2. Reprendre la question 1 avec l'hypothèse additionnelle suivante.

$$(H1) \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad \theta_n \in \,]\theta - \pi, \theta + \pi]$$

3. Reprendre la question 1 avec les hypothèses additionnelles suivantes.

$$\begin{array}{ll} (H1) & \forall\, n \in \mathbf{N}, \qquad \theta_n \in \,]\theta - \pi, \theta + \pi] \\ (H2) & \rho > 0 \end{array}$$

□

Remarque 70. — Le théorème des segments emboîtés (cf. exercice 39) n'a pas de sens tel quel dans $\mathbf{C}$, mais peut être reformulé de manière satisfaisante (cf. exercice 71). ■

EXERCICE 71 (UNE VERSION DU THÉORÈME DES SEGMENTS EMBOÎTÉS DANS C). — Soit une suite $\left(\overline{B}(a_n, r_n)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ de boules fermées de $\mathbf{C}$, décroissante au sens de l'inclusion, telle que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer qu'il existe $\ell \in \mathbf{C}$ tel que :

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \overline{B}(a_n, r_n) = \{\ell\}\,.$$

□