Réduction des endomorphismes

par David Blottière, le 11 octobre 2023 à 15h48

Chapitre 4

Sommaire

Notation. — Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbf{K}$ désigne un corps.

§ 1. Compléments d'algèbre linéaire

1. Décomposition en somme directe et projecteurs

Notation. — La lettre E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Proposition 1 (projecteurs associés à une décomposition en somme directe). — *Soient un entier $p \geqslant 2$ et $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, π_i désigne la projection de E sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} E_j$:*

$$\pi_i \left| \begin{array}{ccc} E = \bigoplus_{j=1}^{p} E_j & \longrightarrow & E_i \\ x = \sum_{j=1}^{p} \underbrace{x_j}_{\in E_j} & \longmapsto & x_i. \end{array} \right.$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \pi_i = \mathrm{id}_E \qquad \textit{et} \qquad \left(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow \pi_i \circ \pi_j = 0_{\mathscr{L}(E)}\right).$$

Exercice 2. — Soient un entier $p \geqslant 2$ et $\pi_1, \ldots, \pi_p$ des projecteurs de E tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \pi_i = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad \left(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow \pi_i \circ \pi_j = 0_{\mathscr{L}(E)}\right).$$

Démontrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}\,(\pi_i)$. □

2. Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels

Proposition 3 (dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels). — *Soient un entier $p \geqslant 2$ et $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E, que nous supposons ici de dimension finie.*

1. $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$
2. *La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.*

Éléments de démonstration. — L'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{n} E_i & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} E_i \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & x_1 + \ldots + x_p \end{array} \right.$$

est linéaire et surjective. □

Proposition 4 (construction d'applications et décomposition en somme directe). — *Soient un entier $p \geqslant 2$, $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.*

$$\forall\,(u_1, \dots, u_p) \in \prod_{i=1}^{p} \mathscr{L}(E_i, F), \quad \exists!\, u \in \mathscr{L}(E, F), \quad \forall\, i \in [\![1, p]\!], \quad u_{E_i} = u_i.$$

3. Sommes et produits de matrices définies par blocs

Remarque 5 (découpage d'une matrice en blocs). — Soient un entier $n \geqslant 2$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$. Il est parfois utile de considérer une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ comme une matrice par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{n-p,n-p}(\mathbf{K})$. ■

Théorème 6 (somme et produit de matrices par blocs). — *Les matrices par blocs s'additionnent et se multiplient comme des matrices 2×2. Plus précisément, soient :*

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

avec : $(A_1, A_2) \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})^2$, $(B_1, B_2) \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})^2$, $(C_1, C_2) \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbf{K})^2$ *et* $(D_1, D_2)^2 \in \mathscr{M}_{n-p,n-p}(\mathbf{K})^2$. *Alors :*

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_1 M_2 = \begin{pmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 7. — On peut généraliser ces formules à une décomposition en un nombre arbitraire de blocs. ■

Exercice 8 (puissances d'une matrice diagonale par blocs). — Soient $n_1, \dots, n_p$ des nombres entiers naturels non nuls. Soient $A_1 \in \mathrm{Mat}_{n_1}(\mathbf{K}), \dots, A_p \in \mathrm{Mat}_{n_p}(\mathbf{K})$. Quel lien existe-t-il entre les puissances de la matrice

$$M := \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{pmatrix}$$

et les puissances des matrices $A_1, \dots, A_p$? □

Exercice 9 (interprétation géométrique d'une matrice par blocs). — Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. Considérons la décomposition par blocs de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{n-p,n-p}(\mathbf{K})$. Interpréter géométriquement chacun des blocs A, B, C, D. □

Exercice 10. — Soient $M \in GL_n(\mathbf{K})$, $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & M \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et exprimer P^{-1} en fonction de M^{-1} et L. □

Exercice 11. — Soient $A \in GL_p(\mathbf{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $D \in GL_{n-p}(\mathbf{K})$. Démontrer que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A^{-1}, D^{-1} et C. □

4. DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE DÉFINIE PAR BLOCS

THÉORÈME 12 (DÉTERMINANT D'UNE MATRICE TRIANGULAIRE PAR BLOCS). —

1. *Soit* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$*, où* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$. *Alors* $\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(A) \times \mathrm{Det}(D)$.
2. *Plus généralement, si* $n_1, \dots, n_p$ *sont des nombres entiers naturels non nuls, si*

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & A_p \end{pmatrix}$$

où $A_1 \in Mat_{n_1}(\mathbf{K}), \dots, A_p \in Mat_{n_p}(\mathbf{K})$, *alors* $\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(A_1) \times \dots \times \mathrm{Det}(A_p)$.

Remarque 13. — Ce théorème est valable pour des matrices triangulaires inférieures par blocs. ■

EXERCICE 14 (DÉMONSTRATION ALTERNATIVE DU THÉORÈME 12). — Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$.

1. Démontrer :
$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(A).$$
2. En écrivant judicieusement $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ comme un produit de deux matrices, démontrer la première assertion du Théorème 12.
3. En déduire la deuxième assertion du Théorème 12.

□

EXERCICE 15. — Soient $(A,B,C,D) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^4$ telles que C et D commutent et D soit inversible. Démontrer que :

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(AD - BC).$$

Indication : on pourra écrire la matrice $\begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ comme un produit de deux matrices. □

EXERCICE 16. — Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$.

1. Démontrer que : $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(A+B)\,\mathrm{Det}(A-B)$.
2. Démontrer que : $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \mathrm{Det}(A+iB)\,\mathrm{Det}(A-iB)$. Indication : On pourra multiplier certaines lignes et colonnes de $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ par i et effectuer des opérations sur les lignes et les colonnes.
3. Démontrer que : $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geqslant 0$.
4. Supposons que $AB = BA$. Démontrer que : $\mathrm{Det}\left(A^2 + B^2\right) \geqslant 0$.
5. Démontrer que l'inégalité de la question 4 ne vaut pas nécessairement, lorsque A et B ne commutent pas.

□

5. SOUS-ESPACES STABLES ET ENDOMORPHISMES INDUITS

NOTATION. — Dans cette partie, on note E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel,

DÉFINITION 17 (SOUS-ESPACE STABLE PAR UN ENDOMORPHISME). — *Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u, ou que u stabilise F, si $u(F) \subset F$, i.e. si :*

$$\forall x \in F, \quad u(x) \in F.$$

***Remarque 18.* —** Les sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E. ■

DÉFINITION 19 (ENDOMORPHISME INDUIT). — *Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E, qui est stable par F. L'application $u_{|F}$ définie par :*

$$u_{|F} \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme de F induit par u.

EXERCICE 20 (ENDOMORPHISME DE $\mathbf{R}^3$ STABILISANT UN PLAN). —

1. Démontrer que le plan F de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x+y+z=0$ est stable par l'endomorphisme :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z) \end{array} \right.$$

2. Déterminer la matrice de $u_{|F}$ dans la base $((1,-1,0),(1,0,-1))$ de F.
3. Reconnaître l'endomorphisme $u_{|F}$ de F ?

□

EXERCICE 21 (UN ENDOMORPHISME STABILISANT TOUTE DROITE EST UNE HOMOTHÉTIE). — Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ stabilisant toute droite de E.

1. Démontrer que :

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \exists! \lambda_x \in \mathbf{K}, \quad u(x) = \lambda \cdot x$$

2. Soient x, y deux vecteurs liés de $E \setminus \{0_E\}$. Démontrer : $\lambda_x = \lambda_y$.
3. Soient x, y deux vecteurs libres de $E \setminus \{0_E\}$. En considérant le vecteur $x+y$, démontrer : $\lambda_x = \lambda_y$.
4. En déduire que u est une homothétie.

□

EXERCICE 22 (UN SOUS-ESPACE STABLE N'ADMET PAS NÉCESSAIREMENT UN SUPPLÉMENTAIRE STABLE). — Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2)$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer toutes les droites de $\mathbf{R}^2$ stables par f.
2. Soit D une droite stable par f. Justifier que D ne possède aucun supplémentaire stable par f.

□

EXERCICE 23 (ENDOMORPHISME DE $\mathbf{R}^2$ NE POSSÉDANT PAS DE SOUS-ESPACE STABLE NON TRIVIAL). — Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ ne possédant aucun sous-espace stable non trivial. □

6. SOUS-ESPACES STABLES D'UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE

CONVENTION. — Dans la suite, on suppose que E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

DÉFINITION 24 (BASE ADAPTÉE À UN SOUS-ESPACE VECTORIEL). — *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \geqslant 1$. Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite adaptée à F si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F.*

Remarque 25 (existence et construction d'une base adaptée à un sous-espace vectoriel). — On conserve les notations de la définition 24. Soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \geqslant 1$, $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $(n-p)$ entiers $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-p} \leqslant n$ tels que la famille $\mathscr{B} := \left(f_1, \ldots, f_p, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-p}}\right)$ soit une base de E. Le base $\mathscr{B}$ de E ainsi construite est adaptée à F. ■

DÉFINITION 26 (BASE ADAPTÉE À UNE DÉCOMPOSITION EN SOMME DIRECTE). — *Soient un entier $p \geqslant 2$ et des sous-espaces vectoriels de E notés $E_1, E_2, \ldots, E_p$, de dimensions respectives $n_1 \geqslant 1, n_2 \geqslant 1, \ldots, n_p \geqslant 1$, tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite adaptée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ si :*

$$\begin{array}{l} \left(e_1, \ldots, e_{n_1}\right) \text{ est une base de } E_1\,; \\ \left(e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2}\right) \text{ est une base de } E_2\,; \\ \qquad\vdots \\ \left(e_{n_1+n_2+\ldots+n_k+1}, \ldots, e_{n_1+n_2+\ldots+n_k+n_{k+1}}\right) \text{ est une base de } E_{k+1}\,; \\ \qquad\vdots \\ \left(e_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+1}, \ldots, e_{n_1+n_2+\ldots+n_{p-1}+n_p} = e_n\right) \text{ est une base de } E_p. \end{array}$$

Remarque 27 (existence et construction d'une base adaptée à une décomposition en somme directe). — On conserve les notations de la définition 26. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, soit $\mathscr{B}_k = \left(e_{k,1}, \ldots, e_{k,n_k}\right)$ une base de F_k. Alors la famille

$$\mathscr{B} := \left(e_{1,1}, \ldots, e_{1,n_1}, e_{2,1}, \ldots, e_{2,n_2}, \ldots, e_{p,1}, \ldots, e_{p,n_p}\right)$$

obtenue en concaténant les familles $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$ est une base de E, qui est adaptée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. ■

PROPOSITION 28 (MATRICE D'UN ENDOMORPHISME DANS UNE BASE ADAPTÉE). —

1. *Soient F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geqslant 1$. et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors F est stable par u si et seulement si pour toute base $\mathscr{B}$ de E adaptée à F :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbf{K})$.

2. *Soient un entier $p \geqslant 2$ et $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives $n_1 \geqslant 1, n_2 \geqslant 1, \ldots, n_p \geqslant 1$, tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors chacun des espaces $E_1, \ldots, E_p$ est stable par u si et seulement si pour toute base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i = E$:*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix} \qquad [\text{matrice diagonale par blocs}]$$

où pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $A_k \in \mathscr{M}_{n_k}(\mathbf{K})$.

§ 2. ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME, D'UNE MATRICES CARRÉE

NOTATION. — La lettre E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$.

1. DÉFINITION DES ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

DÉFINITION 29 (VALEUR PROPRE ET VECTEUR PROPRE D'UN ENDOMORPHISME). — *Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.*

1. *Le scalaire λ est une valeur propre de u si :*

$$\exists x \in E \setminus \{0_E\} \quad u(x) = \lambda \cdot x.$$

2. *Si λ est une valeur propre de u, alors tout vecteur $x \in E \setminus \{0_E\}$ vérifiant $u(x) = \lambda x$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.*

Remarque 30 (des vecteurs propres). —

1. Le vecteur nul n'est jamais un vecteur propre.
2. Un vecteur propre n'est jamais unique. En effet soit λ une valeur propre de $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors tout vecteur $y := k \cdot x$, où $k \in \mathbf{K}^*$, est vecteur propre associé à la valeur propre λ.

■

EXERCICE 31 (EXISTENCE D'UNE VALEUR PROPRE VS. EXISTENCE D'UNE DROITE STABLE). — Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que s'il existe une droite vectorielle D de E stable par u, alors u possède une valeur propre.
2. Étudier la réciproque.

□

PROPOSITION 32 (CRITÈRE POUR ÊTRE VALEUR PROPRE VIA L'ENDOMORPHISME $u-\lambda\,\mathrm{id}_E$). — *Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors :*

$$\lambda \text{ est valeur propre de } u \iff u - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ n'est pas injectif.}$$

DÉFINITION 33 (SPECTRE D'UN ENDOMORPHISME). — *Le spectre de $u \in \mathscr{L}(E)$, noté $\mathrm{Spec}(u)$, est l'ensemble de ses valeurs propres :*

$$\mathrm{Spec}(u) := \{\lambda \in \mathbf{K} \,:\, \exists x \in E \setminus \{0_E\},\, u(x) = \lambda \cdot x\}.$$

DÉFINITION 34 (SOUS-ESPACE PROPRE ASSOCIÉ À UNE VALEUR PROPRE). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ, noté $E_\lambda(u)$, est défini par :*

$$E_\lambda(u) := \{x \in E \,:\, u(x) = \lambda \cdot x\} = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \cdot \mathrm{id}_E).$$

Remarque 35 (des espaces propres). —

1. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de E. En effet, $E_\lambda(u)$ est le noyau d'un endomorphisme de E.
2. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est formé de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du vecteur nul.
3. Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ n'est jamais réduit au singleton vecteur nul. Par conséquent, si $E_\lambda(u)$ est de dimension finie, alors :

$$\dim\,(E_\lambda(u)) \geqslant 1.$$

■

Remarque 36 (CNS pour que 0 soit valeur propre). — Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Le scalaire 0 est valeur propre de u si et seulement si u n'est pas injectif.
2. Si $0 \in \mathrm{Spec}(u)$, alors $E_0(u) = \mathrm{Ker}\,(u)$.

■

2. Détermination des éléments propres d'endomorphismes usuels

Exercice 37 (éléments propres d'une homothétie). — Soit $\lambda \in \mathbf{K}^*$. On pose $u := \lambda \operatorname{id}_E$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u. □

Exercice 38 (éléments propres d'un endomorphisme nilpotent est $\{0_{\mathbf{K}}\}$). — Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent, i.e. qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u. □

Exercice 39 (éléments propres de l'opérateur de dérivation sur $\mathbf{K}[X]$). — Déterminer les éléments propres de :

$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P'. \end{array} \right.$$

□

Exercice 40 (éléments propres de l'opérateur de dérivation sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$). — Déterminer les éléments propres de :

$$D \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ f & \longmapsto & f'. \end{array} \right.$$

□

3. Définition des éléments propres d'une matrice carrée

Définition 41 (éléments propres d'une matrice carrée). — *Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.*

1. *Un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ est appelé valeur propre de M si :*
$$\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}, \qquad MX = \lambda \cdot X.$$
2. *Si λ est valeur propre de M, alors tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}$ vérifiant $MX = \lambda \cdot X$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.*
3. *L'ensemble des valeurs propres de M dans $\mathbf{K}$ est appelé spectre de M et est noté $\operatorname{Spec}_{\mathbf{K}}(M)$.*
4. *Si $\lambda \in \mathbf{K}$ est valeur propre de M, le sous-espace vectoriel :*
$$E_\lambda(M) := \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \ : \ MX = \lambda \cdot X\right\} = \operatorname{Ker}(M - \lambda I_n)$$
est appelé sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ.

Remarque 42 (extension du corps des scalaires pour le spectre d'une matrice carrée). — Quand on parle du spectre d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, il convient de préciser le corps dans lequel on travaille. En effet, si $\mathbf{L}$ est un sur-corps de $\mathbf{K}$, alors on peut également considérer M comme élément de $\mathscr{M}_n(\mathbf{L})$. On peut donc considérer les deux ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}_{\mathbf{K}}(M) &:= \left\{\lambda \in \mathbf{K} : \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}, \quad MX = \lambda X\right\} \\ \operatorname{Spec}_{\mathbf{L}}(M) &:= \left\{\lambda \in \mathbf{L} : \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{L}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{L})}\right\}, \quad MX = \lambda X\right\}. \end{aligned}$$

Clairement $\operatorname{Spec}_{\mathbf{K}}(M) \subset \operatorname{Spec}_{\mathbf{L}}(M)$, mais il n'y a pas nécessairement égalité (cf. exercice suivant). C'est pourquoi, comme ci-dessus, on précisera le corps des scalaires considéré, en l'indiquant en indice du symbole Spec. ■

Exercice 43. — Calculer $\operatorname{Spec}_{\mathbf{R}}(M)$ et $\operatorname{Spec}_{\mathbf{C}}(M)$, où $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

Exercice 44. — Déterminer les éléments propres de la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ définie par :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

4. Les sous-espaces propres sont en somme directe

Théorème 45 (les sous-espaces propres sont en somme directe). — *Soient $u \in \mathscr{L}(E)$, r un nombre entier supérieur ou égal à 2, et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres deux-à-deux distinctes de u. Alors les $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ sont en somme directe, i.e. :*

$$\sum_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}.$$

Remarque 46 (nombre maximal de valeurs propres deux-à-deux distinctes en dimension finie). —

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, soit r un nombre entier supérieur ou égal à 2, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres deux-à-deux distinctes de u, soit $x_1 \in E_{\lambda_1} \setminus \{0_E\}, \dots, x_r \in E_{\lambda_r} \setminus \{0_E\}$. Alors la famille $(x_1, \dots, x_r)$ est libre.
2. En particulier, si E est de dimension finie n, alors u possède au plus n valeurs propres deux-à-deux distinctes.

■

5. Endomorphismes qui commutent et sous-espaces stables

Proposition 47 (endomorphismes qui commutent et stabilité des sous-espaces). — *Soit $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tels que $u \circ v = v \circ u$.*

1. *L'endomorphisme v stabilise* $\mathrm{Ker}(u)$ *et* $\mathrm{Im}(u)$.
2. *Pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$, v stabilise le sous-espace propre $E_\lambda(u)$.*

Exercice 48 (éléments propres d'un projecteur non trivial). — Soit p un projecteur de E tel que $u \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u \neq \mathrm{id}_E$.

1. Déterminer les éléments propres de p.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que p et u commutent si et seulement si u stabilise $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.

□

6. Éléments propres d'un endomorphisme vs. éléments propres d'une matrice

Proposition 49 (éléments propres d'un endomorphisme vs. éléments propres d'une matrice). — *Supposons ici E de dimension finie. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M := Mat_{\mathscr{B}}(u)$.*

1. $\mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M)$
2. *Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(M)$. Alors :*

$$\forall x \in E \quad x \in E_\lambda(u) \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in E_\lambda(M).$$

Remarque 50. — D'après la précédente proposition, les éléments propres d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ coïncide avec les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$:

$$\varphi_A \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

qui lui est canoniquement associé. ■

§ 3. Polynôme caractéristique

NOTATION. — Dans cette partie, n désigne un nombre entier naturel non nul et E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée

PROPOSITION 51 (POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE D'UNE MATRICE CARRÉE). — *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'application χ_M définie par :*

$$\chi_M \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ \lambda & \longmapsto & \operatorname{Det}(\lambda \cdot I_n - M) \end{array} \right.$$

est une application polynomiale. Le polynôme qui lui est associé, qui est (abusivement) également noté χ_M, est appelé polynôme caractéristique de la matrice M.

EXERCICE 52. — Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A définie par :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

2. Polynôme caractéristique de deux matrices semblables

PROPOSITION 53 (POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE DE DEUX MATRICES SEMBLABLES). — *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors :*

$$A \text{ et } B \text{ sont semblables} \quad \Longrightarrow \quad \chi_A = \chi_B.$$

Exemple 54 (le polynôme caractéristique ne détermine pas la classe de similitude). —

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui est semblable à la matrice identité I_n. Alors, il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que :

$$M = PI_nP^{-1} = I_n.$$

   Donc l'unique matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ qui est semblable à I_n est la matrice I_n elle-même.

2. Comme :

$$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \qquad \operatorname{Det}(\lambda I_n - I_n) = \operatorname{Det}((\lambda - 1) I_n) = (\lambda - 1)^n \operatorname{Det}(I_n) = (\lambda - 1)^n$$

   le polynôme caractéristique de la matrice I_n est $\chi_{I_n} = (X-1)^n$.

3. Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. La matrice $\lambda I_n - M$ étant triangulaire supérieure, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux, tous égaux à $(\lambda - 1)$. On en déduit :

$$\operatorname{Det}(\lambda I_n - M) = (\lambda - 1)^n$$

   et par suite $\chi_M = (X-1)^n$.

4. De 1, 2 et 3, nous déduisons que les matrices I_n et M ont le même polynôme caractéristique, mais qu'elles ne sont pas semblables. La réciproque de l'implication de la proposition 53 est donc fausse.

■

3. DÉFINITION DU POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE D'UN ENDOMORPHISME

Rappel 55 (déterminant d'un endomorphisme). — Soit φ un endomorphisme de E. Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E. Alors d'après le théorème de changement de bases :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi) = P_{\mathscr{B}_2\to\mathscr{B}_1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi)\,\left(P_{\mathscr{B}_2\to\mathscr{B}_1}\right)^{-1}$$

où $P_{\mathscr{B}_2\to\mathscr{B}_1} := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(\mathrm{id}_E)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi)\right) &= \mathrm{Det}\left(P_{\mathscr{B}_2\to\mathscr{B}_1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi)\,\left(P_{\mathscr{B}_2\to\mathscr{B}_1}\right)^{-1}\right)\\
&= \mathrm{Det}\left(P_{\mathscr{B}_2\to\mathscr{B}_1}\right)\,\mathrm{Det}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi)\right)\,\mathrm{Det}\left(\left(P_{\mathscr{B}_2\to\mathscr{B}_1}\right)^{-1}\right) \qquad [\text{ multiplicativité du déterminant }]\\
&= \mathrm{Det}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi)\right) \qquad [\text{si } A \text{ est inversible, } \mathrm{Det}(A)\neq 0 \text{ et } \mathrm{Det}\left(A^{-1}\right) = (\mathrm{Det}(A))^{-1}\ ]\ .
\end{aligned}$$

En d'autre termes, le déterminant de la matrice d'un endormorphisme dans une base de E ne dépend pas du choix de la base de E. Cette observation donne de la consistance à la définition suivante.
Le déterminant de φ est le scalaire $\mathrm{Det}(\varphi)$ défini par :

$$\mathrm{Det}(\varphi) := \mathrm{Det}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\right)$$

où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E. ■

DÉFINITION 56 (POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE D'UN ENDOMORPHISME). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. L'application χ_u définie par :*

$$\chi_u \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K}\\ \lambda & \longmapsto & \mathrm{Det}(\lambda\cdot\mathrm{id}_E - u)\end{array}\right.$$

est une application polynomiale. Le polynôme qui lui est associé, qui est (abusivement) également noté χ_u, est appelé polynôme caractéristique de l'endomorphisme u.

Remarque 57. — Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Quelle que soit la base $\mathscr{B}$ de E, vaut :

$$\forall\lambda\in\mathbf{K},\qquad \chi_u(\lambda) = \mathrm{Det}(\lambda\,\mathrm{id}_E - u) := \mathrm{Det}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda\,\mathrm{id}_E - u)\right) = \mathrm{Det}\left(\lambda I_n - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\right) = \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)}(\lambda)$$

et donc, comme $\mathbf{K}$ est infini, $\chi_u = \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)}$. ■

Remarque 58 (extension du corps des scalaires pour le spectre d'un endomorphisme). — Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il est possible que χ_u possède des racines dans un sur-corps strict $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$. Dans ce cas, ces racines ne sont pas des valeurs propres de u à proprement parler, mais ce sont des valeurs propres de la matrice M de u dans une base de E, où M est vue comme matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{L})$. ■

4. DEGRÉ ET COEFFICIENTS REMARQUABLES DU POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

THÉORÈME 59 (DEGRÉ ET COEFFICIENTS REMARQUABLES DU POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE). — *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.*

1. *χ_M est un polynôme de degré n.*
2. *Le coefficient de degré n est 1, i.e. χ_M est unitaire.*
3. *Le coefficient de degré $n-1$ de χ_M est $-\mathrm{Tr}(M)$.*
4. *Le coefficient de degré 0 de χ_M est $(-1)^n\,\mathrm{Det}(M)$.*

EXERCICE 60. — Traduire les résultats précédents pour un endomorphisme de E. □

Remarque 61 (deux conséquences du théorème précédentt). —

1. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$. Alors :
$$\chi_M = X^2 - \mathrm{Tr}(M)\,X + \mathrm{Det}(M).$$
2. Le théorème précédent et le résultat sur le polynôme caractéristique de deux matrices semblables livrent une nouvelle démonstration du fait que la trace et le déterminant sont des invariants de similitude.

■

5. Valeurs propres versus racines du polynôme caractéristique

Théorème 62 (valeurs propres versus racines du polynôme caractéristique). —

1. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Les valeurs propres de M dans $\mathbf{K}$ sont les racines de χ_M dans $\mathbf{K}$.*
2. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les valeurs propres de u dans $\mathbf{K}$ sont les racines de χ_u dans $\mathbf{K}$.*

Exercice 63 (Valeurs propres de deux matrices semblables). — Soient A et B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Que dire de leurs spectres $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(A)$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(B)$? □

Proposition 64 (nombre de valeurs propres en dimension finie). —

1. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors u possède au plus n valeurs propres deux-à-deux distinctes, où $n = \dim(E)$.*
2. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Alors M possède au plus n valeurs propres deux-à-deux distinctes.*

Remarque 65 (méthode pratique de calcul des valeurs propres). — Pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée, il suffit de déterminer les racines de son polynôme caractéristique. ■

Exercice 66. — Déterminer les éléments propres des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

□

Exercice 67 (valeurs propres d'un endomorphisme remarquable du plan). — Soit l'application linéaire

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (-y, x). \end{array} \right.$$

1. Donner une interprétation géométrique de u et la matrice M de u dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
2. Déterminer $\mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}_{\mathbf{R}}(M)$ et $\mathrm{Spec}_{\mathbf{C}}(M)$.

□

6. Polynôme caractéristique et valeurs propres d'une matrice triangulaire

Proposition 68 (polynôme caractéristique et valeurs propres d'une matrice triangulaire). — *Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $t_{1,1}, \dots, t_{n,n}$. Alors :*

$$\chi_T(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - t_{i,i}).$$

En particulier les valeurs propres de T sont ses coefficients diagonaux.

Exercice 69. — Soit l'application linéaire

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P + P' \end{array} \right.$$

1. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$.
2. En déduire les éléments propres de φ.

□

7. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Proposition 70 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.*

1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et soit u_F l'endomorphisme de F induit par u. Alors :*
$$\chi_{u_F} \text{ divise } \chi_u.$$
2. *Supposons qu'il existe un nombre entier $r \geq 2$, des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_r$ tous stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$. Alors :*
$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} \chi_{u_{E_i}}.$$

8. Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition 71 (ordre de multiplicité d'une valeur propre). —

1. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(u)$. On appelle multiplicité de la valeur propre λ, et on note m_λ, son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de χ_u.*
2. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(M)$. On appelle multiplicité de la valeur propre λ, et on note m_λ, son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de χ_M.*

Proposition 72 (multiplicité d'une valeur propre vs. dimension du s.e.p.). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(u)$. Alors*
$$\dim(E_\lambda(u)) \leqslant m_\lambda$$
où m_λ est la multiplicité de la valeur propre λ.

Exercice 73. — Traduire le résultat précédent pour une matrice carrée. □

9. Matrices compagnon, propriétés algébriques d'un polynôme caractéristique

Exercice 74 (matrice compagnon). — Soit $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbf{K}[X]$. Définissons la matrice compagnon de P par :
$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}).$$
Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagnon de P. □

Remarque 75 (des matrices compagnons). **—** Posons
$$\Pi_n := \{P \in \mathbf{K}[X] \; : \; P \text{ est unitaire, de degré } n\}.$$
D'après l'exercice précédent, l'application
$$\chi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \Pi_n \\ M & \longmapsto & \chi_M \end{array} \right.$$
qui est bien définie, admet pour inverse à droite l'application
$$C \left| \begin{array}{ccc} \Pi_n & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ P & \longmapsto & C(P) \end{array} \right.$$

i.e. pour tout $P \in \Pi_n$:

$$\chi \circ C(P) = \chi_{C(P)} = P = \mathrm{id}_{\Pi_n}(P).$$

L'application χ est donc surjective. ■

EXERCICE 76 (POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE DE L'INVERSE D'UNE MATRICE INVERSIBLE). — Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

1. Quel lien existe-t-il entre χ_M et $\chi_{M^{-1}}$?
2. En déduire un lien entre les valeurs propres de M et celle de M^{-1}.
3. Que dire des sous-espaces propres de M et de ceux de M^{-1} ?

□

EXERCICE 77 (POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE D'UN PRODUIT DE DEUX MATRICES CARRÉES DE MÊME FORMAT). — Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Calculer $\begin{pmatrix} \lambda I_n - BA & B \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n & B \\ 0 & \lambda I_n - AB \end{pmatrix}$
2. Qu'en déduire pour χ_{AB} et χ_{BA} ?

□

§ 4. DIAGONALISABILITÉ

1. DÉFINITIONS D'UNE MATRICE CARRÉE (RESP. D'UN ENDOMORPHISME) DIAGONALISABLE SUR K

DÉFINITION 78 (MATRICE CARRÉE DIAGONALISABLE SUR K). — *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite diagonalisable sur $\mathbf{K}$ si elle est semblable à une matrice diagonale, i.e. s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et une matrice $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telles que :*

$$M = PDP^{-1}.$$

EXERCICE 79 (MATRICE POSSÉDANT UNE UNIQUE VALEUR PROPRE). — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que M possède une unique valeur propre dans $\mathbf{K}$. Démontrer l'équivalence :

$$M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{K} \quad \Longleftrightarrow \quad M = \lambda \cdot I_n.$$

□

Remarque 80 (le polynôme caractéristique d'une matrice diagonalisable est scindé sur K). — Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable sur $\mathbf{K}$, alors elle a le même polynôme caractéristique qu'une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Son polynôme caractéristique χ_M est donc scindé sur $\mathbf{K}$. Cette observation livre la condition nécessaire (non suffisante, cf. exercice suivant) de diagonalisabilité suivante.

$$M \text{ est diagonalisable sur } \mathbf{K} \quad \Longrightarrow \quad \chi_M \text{ est scindé sur } \mathbf{K}.$$

■

EXERCICE 81 (MATRICE À POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE SCINDÉ SUR R, NON DIAGONALISABLE). — Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K}).$$

Démontrer que χ_M est scindé sur $\mathbf{K}$, mais que M n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{K}$. □

Remarque 82 (diagonalisabilité d'une matrice et dépendance en le corps de base). — Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ peut être non diagonalisable sur $\mathbf{K}$, mais diagonalisable sur un sur-corps $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$. Par exemple $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$ (son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ non scindé sur $\mathbf{R}$) mais M est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ puisque :

$$M = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1} \qquad \text{où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

■

DÉFINITION 83 (ENDOMORPHISME DIAGONALISABLE). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous soit vérifiée.*

1. *$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est une matrice diagonale.*
2. *Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, e_k est un vecteur propre de u.*

Remarque 84 (de la diagonalisabilité d'un endomorphisme). —

1. Diagonaliser un endomorphisme de E revient à chercher une base de E constituée de vecteurs propres pour u.
2. Soit $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E. Du théorème de changement de base, il découle :

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ est diagonalisable.}$$

3. En particulier $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.

■

EXERCICE 85 (LES PROJECTEURS SONT DIAGONALISABLES). — Soit p un projecteur de E, i.e. soit p un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. On suppose que p est non trivial, i.e. : $p \neq \mathrm{id}_E$ et $p \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Déterminer les éléments propres de p et en déduire que p est diagonalisable. □

EXERCICE 86 (LES SYMÉTRIES SONT DIAGONALISABLES). — Soit s une symétrie de E, i.e. soit s un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$. On suppose que s est non triviale, i.e. : $s \neq \mathrm{id}_E$ et $s \neq -\mathrm{id}_E$. Déterminer les éléments propres de s et en déduire que s est diagonalisable. □

2. CARACTÉRISATION DE LA DIAGONALISABILITÉ VIA LES DIMENSIONS DES SOUS-ESPACES PROPRES

THÉORÈME 87 (DIAGONALISABILITÉ VERSUS UNE DÉCOMPOSITION DE E EN SOMME DE S.E.P.). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de u. Alors :*

$$u \text{ est diagonalisable} \iff E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_{\lambda_k}(u).$$

Remarque 88 (décomposition d'un endomorphisme diagonalisable). — Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de u. Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, notons p_k le projecteur de E sur $E_{\lambda_k}(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant r \\ \ell \neq k}} E_{\lambda_\ell}(u)$, i.e. :

$$p_k \left| \begin{array}{ccc} E = \bigoplus_{\ell=1}^{r} E_{\lambda_\ell}(u) & \longrightarrow & E \\ x = \sum_{\ell=1}^{r} \underbrace{x_\ell}_{\in E_{\lambda_\ell}(u)} & \longmapsto & x_k. \end{array} \right.$$

Alors $u = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k p_k$. ■

COROLLAIRE 89 (DIAGONALISABILITÉ VERSUS SOMME DES DIMENSIONS DES S.E.P.). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de u. Alors :*

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{k=1}^{r} \dim\left(E_{\lambda_k}(u)\right) = \dim(E).$$

3. Condition suffisante (non nécessaire) de la diagonalisabilité

COROLLAIRE 90 (CS DE LA DIAGONALISABILITÉ VIA LE NOMBRE DE VALEURS PROPRES). — *Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $n := \dim(E)$. Alors :*

$$u \text{ possède } n \text{ valeurs propres deux-à-deux distinctes} \quad \Longrightarrow \quad u \text{ est diagonalisable.}$$

Remarque 91 (la réciproque de l'implication du précédent corollaire est fausse). — Si E est de dimension $n \geqslant 2$, alors id_E est diagonalisable (sa matrice dans toute base de E est I_n, qui est diagonale) mais $\mathrm{Spec}(\mathrm{id}_E) = \{1\}$. Ceci fournit un contre-exemple à la réciproque du précédent corollaire. ■

EXERCICE 92. — Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $\mathrm{Tr}(M)^2 > 4\,\mathrm{Det}(M)$. Démontrer que M est diagonalisable sur $\mathbf{R}$. □

4. Diagonalisabilité vs. polynôme caractéristique et ordres de multiplicité

COROLLAIRE 93 (DIAGONALISABILITÉ VS. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE ET ORDRES DE MULTIPLICITÉ). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de u, et $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_r}$ leurs multiplicités respectives. Alors :*

$$u \text{ est diagonalisable} \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbf{K} \\ \text{et} \\ \text{pour tout } k \in [\![1, r]\!],\ \dim\left(E_{\lambda_k}\right) = m_{\lambda_k}. \end{array} \right.$$

EXERCICE 94 (ÉTUDE DE LA DIAGONALISABILITÉ DE MATRICE DANS UN CAS BASIQUE). — La matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$? □

5. Trace, déterminant et valeurs propres d'un endomorphisme diagonalisable

PROPOSITION 95 (TRACE, DÉTERMINANT ET VALEURS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME DIAGONALISABLE). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de u et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Alors :*

1. $\mathrm{Tr}(u) = \sum_{k=1}^{r} m_k \cdot \lambda_k$
2. $\mathrm{Det}(u) = \prod_{k=1}^{r} \lambda_k^{m_k}$.

EXERCICE 96. — Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que M est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et que toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Démontrer :

$$\mathrm{Det}(M) > 0 \qquad \text{et} \qquad \sqrt[n]{\mathrm{Det}(M)} \leq \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(M).$$

□

6. Quelques exercices sur la diagonalisabilité

Exercice 97 (étude de la diagonalisabilité d'endomorphismes dans des cas basiques). —

1. L'endormorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-il diagonalisable ?
2. Soit un entier $n \geqslant 3$. L'endormorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est
$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$
est-il diagonalisable ?

□

Exercice 98 (calcul des puissances d'une matrice diagonalisable). — Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que u est diagonalisable.
2. Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de u.
3. En déduire la forme explicite de A^n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

□

Exercice 99 (deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$). — Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose M et N semblables sur $\mathbf{C}$, i.e. qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que : $M = PNP^{-1}$. Démontrer que M et N semblables sur $\mathbf{R}$, i.e. qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que : $M = QNQ^{-1}$. □

Exercice 100 (matrices à coefficients réels diagonalisables sur C). — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose M diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux ont un format $(1,1)$ ou $(2,2)$. □

§ 5. Trigonalisabilité

1. Définition d'une matrice carrée trigonalisable

Définition 101 (matrice trigonalisable). — *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite trigonalisable sur $\mathbf{K}$ si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, i.e. s'il existe une matrice triangulaire supérieure $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telles que :*
$$M = PUP^{-1}.$$

Remarque 102 (matrice triangulaire supérieure vs. matrice triangulaire inférieure). —

1. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire supérieure :
$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$
Soit f l'endormorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$ est U. Alors :
$$\begin{array}{rcccccccccc} f(e_n) & = & u_{n,n}\, e_n & + & u_{n-1,n}\, e_{n-1} & + & \dots & + & u_{2,n}\, e_2 & + & u_{1,n}\, e_1 \\ f(e_{n-1}) & = & & & u_{n-1,n-1}\, e_{n-1} & + & \dots & + & u_{2,n-1}\, e_2 & + & u_{2,n-1}\, e_1 \\ & \vdots & & & & & & & & & \\ f(e_2) & = & & & & & & & u_{2,2}\, e_2 & + & u_{1,2}\, e_1 \\ f(e_1) & = & & & & & & & & & u_{1,1}\, e_1. \end{array}$$

Ainsi, si on pose $\mathscr{B}_1 := (e_n, e_{n-1}, \dots, e_2, e_1)$:

$$L := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) \begin{pmatrix} u_{n,n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ u_{n-1,n} & u_{n-1,n-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & u_{2,2} & 0 \\ u_{1,n} & u_{1,n-1} & \dots & u_{1,2} & u_{1,1} \end{pmatrix}.$$

La matrice L est triangulaire inférieure. Comme elle représente, elle aussi, l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$, les matrices U et L sont semblables. Plus concrètement, par théorème de changement de base :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f)}_{U} = \underbrace{P_{\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}_1}}_{\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}} \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)}_{L} \left(P_{\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}_1}\right)^{-1}$$

2. La démarche exposée en 1 permet de démontrer également qu'une matrice triangulaire inférieure quelconque est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
3. Ainsi, dans la précédente définition, substituer « inférieure » à « supérieure » conduit à la même notion de trigonalisabilité.
4. Si M est une matrice carrée, alors M est semblable à sa transposée (résultat délicat à établir), ce qui donne une autre justification de 3.

■

Remarque 103 (le polynôme caractéristique d'une matrice trigonalisable est scindé sur K). — Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable sur $\mathbf{K}$, alors elle a le même polynôme caractéristique qu'une matrice triangulaire de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Son polynôme caractéristique χ_M est scindé sur $\mathbf{K}$. Cette observation livre la condition nécessaire de trigonalisabilité suivante.

$$M \text{ est trigonalisable sur } \mathbf{K} \quad \Longrightarrow \quad \chi_M \text{ est scindé sur } \mathbf{K}.$$

Nous verrons, plus loin, que cette condition nécessaire est en fait suffisante. ■

Remarque 104 (trigonalisabilité et dépendance en le corps de base). — Si $\mathbf{L}$ est un sur-corps de $\mathbf{K}$, une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ peut-être trigonalisable sur $\mathbf{L}$, sans être trigonalisable sur $\mathbf{K}$. Par exemple, la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable sur $\mathbf{R}$ (son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ non scindé sur $\mathbf{R}$) mais M est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ (elle est de format 2×2 et possède 2 valeurs propres distinctes sur $\mathbf{C}$), donc *a fortiori* trigonalisable sur $\mathbf{C}$. ■

2. DÉFINITION D'UN ENDOMORPHISME TRIGONALISABLE

DÉFINITION 105 (ENDOMORPHISME TRIGONALISABLE). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ de u dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure.*

Remarque 106. —

1. Trigonaliser un endomorphisme de E revient à chercher une base de E dans laquelle la matrice de E est triangulaire supérieure.
2. Un endomorphisme u de E est trigonalisable s'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que :
$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad u(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E. Grâce au théorème de changement de base, on établit :
$$u \text{ est trigonalisable} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ est trigonalisable sur } \mathbf{K}.$$
4. En particulier $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est trigonalisable sur $\mathbf{K}$ si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé est trigonalisable.

■

3. Caractérisation de la trigonalisabilité via le polynôme caractéristique

Théorème 107 (caractérisation de la trigonalisabilité via le polynôme caractéristique). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :*

$$u \text{ est trigonalisable} \iff \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbf{K}.$$

Corollaire 108 (toute matrice carrée à coefficients complexes est trigonalisable sur C). — *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Alors M est trigonalisable sur $\mathbf{C}$.*

Démonstration. — Ce résultat est fruit de la combinaison du précédent théorème avec celui de d'Alembert Gauß, qui stipule que tout polynôme à coefficients complexes, non constant, est scindé sur $\mathbf{C}$. ■

4. Trace, déterminant et valeurs propres d'une matrice à coefficients complexes

Proposition 109 (Trace, déterminant, valeurs propres d'une matrice à coefficients complexes). — *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de M et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Alors :*

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{r} m_k \cdot \lambda_k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Det}(M) = \prod_{k=1}^{r} \lambda_k^{m_k}.$$

5. Trigonalisation d'une matrice de format $(2,2)$ ou $(3,3)$

Méthode 110 (trigonalisation une matrice $(2,2)$ trigonalisable). — Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ une matrice trigonalisable. On suppose que M n'est pas diagonale, sinon, il n'y a pas lieu de chercher à la réduire.
D'après le critère de trigonalisabilité via le polynôme caractéristique, le polynôme χ_M est scindé sur $\mathbf{K}$.

- 1er cas : χ_M possède deux racines distinctes λ_1, λ_2 dans $\mathbf{K}$: $\chi_M = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$. Dans ce cas, M est diagonalisable sur $\mathbf{K}$ et les deux sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(M)$ et $E_{\lambda_2}(M)$ sont de dimension 1. On détermine une base (X_1) de $E_{\lambda_1}(M)$ et une base (X_2) de $E_{\lambda_2}(M)$ (en résolvant un système linéaire, par exemple). Si on pose P la matrice 2×2 dont la première colonne est X_1, et la deuxième X_2, alors P est inversible et, d'après le théorème de changement de base :
$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$
- 2ème cas : χ_M possède une unique racine λ_0 dans $\mathbf{K}$: $\chi_M = (X-\lambda_0)^2$. Si $E_0(M)$ est de dimension 2, alors M est diagonalisable avec une unique valeur propre. Elle est donc diagonale ($M = \lambda_0 I_2$), ce qui est exclu. Donc $\dim(()\, E_0(M)) = 1$.
  On détermine une base (X_0) de $E_{\lambda_0}(M)$ (en résolvant un système linéaire, par exemple). On choisit un vecteur X de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{K})$ qui n'est pas colinéaire à X_0 et on forme la matrice P de format 2×2 dont la première colonne est X_0 et dont la deuxième est X. Alors P est inversible et d'après le théorème de changement de base :
$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$$
  où α et β sont des scalaires de $\mathbf{K}$ que l'on détermine en calculant les coordonnées de MX dans la base (X_0, X). Notons que comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, il vient $\beta = \lambda_0$. Ainsi :
$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_0 & \alpha \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

■

Exercice 111 (trigonalisation en format $(2,2)$ et application à la résolution d'un système différentiel). —

1. Démontrer que $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbf{R}$, puis la trigonaliser.

2. Déterminer les couples de fonctions $(x,y) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})^2$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x' & = & 3x & - & y \\ y' & = & x & + & y. \end{array}\right.$$

□

EXERCICE 112 (TRIGONALISATION EN FORMAT (3,3)). — Démontrer que $A := \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbf{R}$, puis la trigonaliser. □

§ 6. POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES

1. DÉFINITION D'UN POLYNÔME D'ENDOMORPHISME

DÉFINITION 113 (POLYNÔME D'ENDOMORPHISME). — *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$, soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :*

$$P(u) := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot u^k$$

où les puissances de u sont prises relativement au produit de composition (en particulier $u^0 = \mathrm{id}_E$), est un endormorphisme de E, appelé polynôme de l'endomorphisme u.

2. LE MORPHISME DE K-ALGÈBRES $P \mapsto P(u)$ DE $\mathbf{K}[X]$ DANS $\mathscr{L}(E)$

THÉORÈME 114 (MORPHISME DE K-ALGÈBRES $P \mapsto P(u)$ DE $\mathbf{K}[X]$ DANS $\mathscr{L}(E)$). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. L'application*

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}\right.$$

est un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres, i.e. :

1. *φ est linéaire;*
2. *Pour tout $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.*

DÉMONSTRATION. —

1. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$ et soit $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$. Posons $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$, où $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont des familles de scalaires presque nulles.

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} (\lambda a_i + \mu b_i) u^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda a_i u^i + \mu b_i u^i = \lambda \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i u^i\right) + \mu \left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i u^i\right) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$$

2. Soit $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$. Posons $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$, où $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont des familles de scalaires presque nulles. En considérant plusieurs manières de sommer sur l'ensemble $\{(i,j) \in \mathbf{N}^2 \ : \ j \leqslant i\}$, il vient :

$$(P \times Q)(u) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{i} a_j \, b_{i-j} \, u^i = \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant +\infty} a_j \, b_{i-j} \, u^i = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=j}^{+\infty} a_j \, b_{i-j} . u^j \circ u^{i-j}.$$

Puis, grâce à la linéarité de u, nous obtenons :

$$(P \times Q)(u) = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_j u^j\right) \circ \left(\sum_{i=j}^{+\infty} b_{i-j} \, u^{i-j}\right) = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_j u^j\right) \circ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \, u^k\right) = P(u) \circ Q(u).$$

■

Corollaire 115 (deux polynômes d'un même endomorphisme commutent). — *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$. Alors :*

$$P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

Démonstration. — Du théorème précédent et de la commutativité de la multiplication $\times_{\mathbf{K}[X]}$ dans $\mathbf{K}[X]$, nous déduisons :

$$P(u) \circ Q(u) = \left(P \times_{\mathbf{K}[X]} Q\right)(u) = \left(Q \times_{\mathbf{K}[X]} P\right)(u) = Q(u) \circ P(u).$$

■

Exercice 116 (versions matricielles des deux résultats précédents). — Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$, on pose :

$$P(M) := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot M^k.$$

Soit $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$. Justifier les assertions suivantes.

1. $\forall (P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2, \quad (\lambda P + \mu Q)(M) = \lambda P(M) + \mu Q(M)$
2. $\forall (P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2, \quad (P \times Q)(M) = P(M) \times Q(M)$
3. $\forall (P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2, \quad P(M) \times Q(M) = Q(M) \circ P(M)$

□

3. Définition d'un polynôme annulateur et lien avec le spectre

Définition 117 (polynôme annulateur). —

1. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est dit annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.*
2. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ est dit annulateur de M si $P(M) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}$.*

Théorème 118 (valeurs propres et polynômes d'endomorphismes). — *Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbf{K}[X]$.*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(u)$, pour tout $x \in E_\lambda(u)$:*

$$P(u)(x) = P(\lambda) \cdot x$$

et donc $P(\lambda) \in \mathrm{Spec}(P(u))$.

2. *Si $P(u) = 0$, alors les valeurs propres de u sont des racines de P. i.e. $\mathrm{Spec}(u) \subset \mathrm{Spec}_{\mathbf{K}}(P)$. Cette inclusion n'est pas nécessairement une égalité ensembliste, cf. remarque suivante.*

Une racine d'un polynôme annulateur n'est pas nécessairement valeur propre. En effet le polynôme $(X-1)(X-2024)$ annule $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$, mais 2024 n'est pas une valeur propre de $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$.

4. Théorème de Cayley-Hamilton

THÉORÈME 119 (CAYLEY-HAMILTON). —

1. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :*

$$\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

En d'autres termes, le polynôme caractéristique de u annule u.

2. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Alors :*

$$\chi_M(M) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}.$$

En d'autres termes, le polynôme caractéristique de M annule M.

EXERCICE 120. — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Démontrer que, si A est diagonale, alors $\chi_A(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}$.
2. Démontrer que, si A est triangulaire supérieure, alors $\chi_A(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}$.
3. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice semblable à A. Démontrer que :

$$\chi_A(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})} \quad \Longrightarrow \quad \chi_B(B) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}.$$

4. On suppose ici que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Démontrer que $\chi_A(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}$.

□

5. Polynôme minimal

PROPOSITION 121 (IDÉAL ANNULATEUR). —

1. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Posons*

$$\mathrm{Ann}(u) := \left\{P \in \mathbf{K}[X] \,:\, P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}\right\}.$$

Alors $\mathrm{Ann}(u)$ est un idéal non nul de $\mathbf{K}[X]$.

2. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Posons*

$$\mathrm{Ann}(M) := \left\{P \in \mathbf{K}[X] \,:\, P(M) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{R})}\right\}.$$

Alors $\mathrm{Ann}(M)$ est un idéal non nul de $\mathbf{K}[X]$.

DÉMONSTRATION. — Les applications :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k \cdot u^k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k \cdot M^k \end{array} \right.$$

sont des morphismes de $\mathbf{K}$-algèbres, donc des morphismes d'anneaux. Leurs noyaux respectifs, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ann}(u)$ et $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Ann}(M)$, sont donc des idéaux de $\mathbf{K}[X]$. ■

DÉFINITION 122 (POLYNÔME MINIMAL). —

1. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. L'unique générateur unitaire de l'idéal non nul $\mathrm{Ann}(u)$ de $\mathbf{K}[X]$ est appelé polynôme minimal de u, et est noté μ_u. On a donc, par définition :*

$$\mathrm{Ann}(u) = \mu_u \mathbf{K}[X].$$

μ_u est le polynôme annulateur de u qui est non nul, unitaire, de degré minimal.

2. *L'unique générateur unitaire de l'idéal non nul $\mathrm{Ann}(M)$ de $\mathbf{K}[X]$ est appelé polynôme minimal de M, et est noté μ_M. On a donc, par définition :*

$$\mathrm{Ann}(M) = \mu_M \mathbf{K}[X].$$

μ_M est le polynôme annulateur de M qui est non nul, unitaire, de degré minimal.

THÉORÈME 123 (VALEURS PROPRES VERSUS RACINES DU POLYNÔME MINIMAL). —

1. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Les valeurs propres de M dans $\mathbf{K}$ sont les racines de μ_M dans $\mathbf{K}$.*
2. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les valeurs propres de u dans $\mathbf{K}$ sont les racines de μ_u dans $\mathbf{K}$.*

EXERCICE 124 (IDÉAL ANNULATEUR D'UN ENDOMORPHISME VS. IDÉAL ANNULATEUR D'UNE MATRICE). — Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et M la matrice de u dans une base $\mathscr{B}$ de E. Alors $\mu_u = \mu_M$. □

Remarque 125 (reformulation du théorème de Cayley-Hamilton). — Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $u \in \mathscr{L}(E)$, alors le théorème de Cayley-Hamilton se reformule comme suit :

$$\mu_u \text{ divise } \chi_u.$$

■

EXERCICE 126 (LA SOUS-K-ALGÈBRE DE $\mathscr{L}(E)$ ENGENDRÉE PAR UN ENDOMORPHISME). — Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On pose :

$$\mathbf{K}[u] := \operatorname{Vect}\left(\left(u^k\right)_{k\in\mathbf{N}}\right).$$

1. Montrer que $\mathbf{K}[u]$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$, i.e. que $\mathbf{K}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ qui est stable pour le produit de composition.
2. Posons $d := \deg(\mu_u)$. Démontrer que $(\mathrm{id}_E, u, \ldots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbf{K}[u]$.

□

EXERCICE 127 (CALCULS DE POLYNÔMES MINIMAUX). —

1. Déterminer le polynôme minimal de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Soit un entier $n \geqslant 3$. Déterminer le polynôme minimal de $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

□

6. LEMME DES NOYAUX ET LEMME DES NOYAUX GÉNÉRALISÉS

LEMME 128 (DES NOYAUX). — *Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $(P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $P \wedge Q = 1$. Alors :*

$$\operatorname{Ker}((PQ)(u)) = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u)).$$

DÉMONSTRATION. — • Introduction d'une relation de Bézout. Par Bézout, il existe $S, T \in \mathbf{K}[X]$ tels que $SP + TQ = 1$. Par suite :

$$(\star) \qquad S(u) \circ P(u) + T(u) \circ Q(u) = \mathrm{id}_E\,.$$

• Caractère direct de la somme. Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(P(u))$ et $\operatorname{Ker}(Q(u))$ de E sont en somme directe. En effet, si $x \in \operatorname{Ker}(P(u)) \cap \operatorname{Ker}(Q(u))$, alors d'après $(\star)$:

$$x = S(u) \circ P(u)(x) + T(u) \circ Q(u)(x) = 0.$$

• L'inclusion $\subset$. Soit $x \in \operatorname{Ker}((PQ)(u))$. Alors d'après $(\star)$, $x = S(u) \circ P(u)(x) + T(u) \circ Q(u)(x)$..
Le vecteur $S(u) \circ P(u)(x)$ est dans $\operatorname{Ker}(Q(u))$. En effet :

$$Q(u)(S(u) \circ P(u)\,(x)) = Q(u) \circ S(u) \circ P(u)\,(x) = S(u) \circ P(u) \circ Q(u)\,(x) = S(u) \circ ((PQ)(u))\,(x) = S(u)\,(0) = 0.$$

De même, on démontre $T(u) \circ Q(u)(x)$ est dans $\operatorname{Ker}(P(u))$.
Donc x s'écrit comme d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(P(u))$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(Q(u))$.

• L'inclusion $\supset$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(P(u))$. Alors

$$(PQ)(u)(x) = P(u) \circ Q(u)(x) = Q(u) \circ P(u)(x) = Q(u)(0) = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker}(P(u)) \subset \operatorname{Ker}((PQ)(u))$. De même, $\operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \operatorname{Ker}((PQ)(u))$. Par minimalité de la somme de deux sous-espaces vectoriels de E, il vient $\operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \operatorname{Ker}((PQ)(u))$. ■

COROLLAIRE 129 (LEMME DES NOYAUX GÉNÉRALISÉS). — *Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes de $\mathbf{K}[X]$ deux-à-deux premiers entre eux. Alors :*

$$\operatorname{Ker}((P_1 \ldots P_r)(u)) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_k(u)).$$

DÉMONSTRATION. — On raisonne par récurrence sur l'entier r.

• Initialisation à $n = 2$. Cf. lemme des noyaux.

• Hérédité. Soit r un nombre entier supérieur ou égal à 2 fixé. Supposons la propriété vrai pour r polynômes deux-à-deux premiers entre eux. Soient $P_1, \ldots, P_r, P_{r+1}$ des polynômes deux-à-deux premiers entre eux.
Les polynômes $P_1 \ldots P_r$ et P_{r+1} sont premiers entre eux. Pour le voir il suffit de multiplier membre à membre des relations de Bézout pour $(P_1, P_{r+1}), (P_2, P_{r+1}), \ldots, (P_r, P_{r+1})$ et de remarquer que l'on obtient ainsi une relation de Bézout pour $(P_1P_2 \ldots P_r, P_{r+1})$.
D'après le lemme des noyaux :

$$\operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)(u)\right) \oplus \operatorname{Ker}(P_{r+1})(u)) = \operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r+1} P_k\right)(u)\right).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à $P_1, \ldots, P_r$, nous obtenons

$$\operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_k(u)).$$

En rassemblant les deux dernières identités, il vient

$$\operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{k=1}^{r+1} P_k\right)(u)\right) = \left(\bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_k(u))\right) \oplus \operatorname{Ker}(P_{r+1}(u)) = \bigoplus_{k=1}^{r+1} \operatorname{Ker}(P_k(u)).$$

• Conclusion. Nous avons établi, par récurrence, la propriété pour tout nombre entier r supérieur ou égal à 2. ■

EXERCICE 130. — Trouver tous les endomorphismes u de $\mathbf{R}^n$ tels que $u^3 - 4u^2 + 4u = 0$ et $\operatorname{Tr}(u) = 0$. □

7. CARACTÉRISATIONS ALGÉBRIQUES DE LA DIAGONALISABILITÉ ET DE LA TRIGONALISABILITÉ

THÉORÈME 131 (CARACTÉRISATION ALGÉBRIQUE DE LA DIAGONALISABILITÉ). — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *u est diagonalisable.*
2. *Il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbf{K}$ tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.*
3. *Le polynôme minimal μ_u de u est scindé à racines simples sur $\mathbf{K}$.*

EXERCICE 132. — Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ tel que $u^p = \mathrm{id}_E$, où $p \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité. □

THÉORÈME 133 (CARACTÉRISATION ALGÉBRIQUE DE LA TRIGONALISABILITÉ). — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *u est trigonalisable.*
2. *Il existe un polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$ scindé sur $\mathbf{K}$ tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.*
3. *Le polynôme minimal μ_u de u est scindé sur $\mathbf{K}$.*

8. DIAGONALISABILITÉ D'UN ENDOMORPHISME INDUIT

COROLLAIRE 134 (POLYNÔME MINIMAL D'UN ENDOMORPHISME INDUIT). — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note $v := u_F$ l'endomorphisme de F l'induit par u. Alors :*

$$\mu_v \text{ divise } \mu_u$$

et donc en particulier, si u est diagonalisable alors v l'est également.

§ 7. NILPOTENCE

DÉFINITION 135 (MATRICE NILPOTENTE ET ENDOMORPHISME NILPOTENT). —

1. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On dit que M est nilpotente s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $M^p = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}$. Si tel est le cas, on définit le nilindice de M par :*
$$\operatorname{nil}(M) := \inf\left\{k \in \mathbf{N}^* \ :\ M^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}\right\}.$$
2. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est nilpotente s'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Si tel est le cas, on définit le nilindice de u par :*
$$\operatorname{nil}(u) := \inf\left\{k \in \mathbf{N}^* \ :\ u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}\right\}.$$

EXERCICE 136. — Démontrer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente. □

THÉORÈME 137 (CARACTÉRISATION ALGÉBRIQUE DE LA NILPOTENCE). — *Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On rappelle que n désigne la dimension de E, supposée finie non nulle. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *u est nilpotent.*
2. *u est trigonalisable sur $\mathbf{K}$ et son unique valeur propre est 0.*
3. *$\exists d \in [\![1, n]\!], \quad \mu_u = X^d$.*
4. *$\chi_u = X^n$.*

DÉFINITION 138 (MAJORATION DU NILINDICE). —

1. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice nilpotente. Alors :*
$$1 \leqslant \operatorname{nil}(M) \leqslant n.$$
2. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors :*
$$1 \leqslant \operatorname{nil}(u) \leqslant \dim(E).$$

EXERCICE 139. — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que A est nilpotente si et seulement si :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \operatorname{Tr}\left(A^k\right) = 0.$$

□

§ 8. UN PAS VERS LA RÉDUCTION DE JORDAN

THÉORÈME 140 (RÉDUCTION D'UN ENDOMORPHISME À POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE SCINDÉ). — *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux-à-deux distinctes de u et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives.*

1. *Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$:*
$$N_{\lambda_k}(u) := \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_k \cdot \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)$$
est appelé sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_k.
2. *On a la décomposition (spectrale) de E suivante :*
$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} N_{\lambda_k}(u)$$
et les projecteurs associés à cette décomposition, appelés projecteurs spectraux, sont des polynômes en l'endomorphisme u.
3. *Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$:*
$$\dim\left(N_{\lambda_k}(u)\right) = m_{\lambda_k}.$$

DÉMONSTRATION. — 2. • Par hypothèse, le polynôme caractéristique de u est :
$$\chi_u = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}.$$

• Soient k et ℓ des éléments distincts de $[\![1, r]\!]$. Les polynômes $X - \lambda_k$ et $X - \lambda_\ell$ sont des polynômes irréductibles, unitaires et distincts. Puisque tout polynôme non constant de $\mathbf{K}[X]$ se décompose essentiellement d'une unique manière en produit d'irréductibles, les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ et $(X - \lambda_\ell)^{m_\ell}$ n'ont pas de diviseurs non constants en commun. Aussi sont-il premiers entre eux.

• D'après le lemme des noyaux généralisés :
$$\operatorname{Ker}\left(\chi_u(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_k \cdot \mathrm{id}_E)^{m_k}\right) = \bigoplus_{k=1}^{r} N_{\lambda_k}(u).$$

• On conclut avec le théorème de Cayley-Hamilton qui nous livre $\operatorname{Ker}\left(\chi_u(u)\right) = \operatorname{Ker}\left(0_{\mathscr{L}(E)}\right) = E$.

3. • Soit $k \in [\![1, r]\!]$. L'espace
$$N_{\lambda_k}(u) := \operatorname{Ker}\left((u - \lambda_k \cdot \mathrm{id}_E)^{m_k}\right)$$
est un noyau de polynôme d'endomorphisme en u. Il est donc stable par u. Nous notons u_k l'endomorphisme induit par u sur $N_{\lambda_k}(u)$:
$$u_k \left| \begin{array}{ccc} N_{\lambda_k}(u) & \longrightarrow & N_{\lambda_k}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$
et observons que la polynôme $(X - \lambda_k)^{m_k}$ est un polynôme annulateur de u_k.

• D'après la décomposition spectrale de E et la proposition 70 :
$$\chi_u = \prod_{k=1}^{r} \chi_{u_k}$$
et, comme χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$, les polynômes $\chi_{u_1}, \dots, \chi_{u_r}$ le sont aussi.

• Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Comme $(X - \lambda_k)^{m_k}$ annule u_k :
$$\exists\, \alpha_k \in [\![1, m_k]\!], \quad \mu_{u_k} = (X - \lambda_k)^{\alpha_k}.$$
Comme χ_{u_k} est scindé sur $\mathbf{K}$ et possède les mêmes racines de μ_{u_k} (qui sont aussi les valeurs propres de u_k) :
$$\chi_{u_k} = (X - \lambda_k)^{\dim(N_k(u))}.$$

• Nous en déduisons que :
$$\prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k} = \chi_u = \prod_{k=1}^{r} \chi_{u_k} = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\dim(N_k(u))}.$$

Par unicité essentielle de la décomposition en produit d'irréductibles de χ_u dans $\mathbf{K}[X]$, il vient :

$$\forall\, k \in [\![1, r]\!], \quad m_k = \dim(N_k(u)).$$

■

EXERCICE 141. — Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que χ_M est scindé sur $\mathbf{K}$. Soit λ une valeur propre de u de multiplicité notée m.

1. Comparer le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ et le sous-espace caractéristique $N_\lambda(u)$.
2. Justifier que le sous-espace caractéristique $N_\lambda(u)$ est stable par u.
3. Démontrer que l'endomorphisme induit par u sur le sous-espace caractéristique $N_\lambda(u)$ est somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

□

COROLLAIRE 142 (RÉDUCTION D'UNE MATRICE À POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE SCINDÉ). — *Soit une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ tel que χ_M scindé sur $\mathbf{K}$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres deux-à-deux distinctes et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Alors il existe des matrices :*

$$T_1 \in \mathscr{M}_{m_1}(\mathbf{K}), \ldots, T_r \in \mathscr{M}_{m_r}(\mathbf{K})$$

triangulaires strictes telles que M est semblable à la matrice diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot I_{m_1} + T_1 & & & \\ & \lambda_2 \cdot I_{m_2} + T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r \cdot I_{m_r} + T_r \end{pmatrix}.$$