

Centrale MP2 2018

I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Q 1. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'application $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^k(U)$ est linéaire.

Donc par composition et somme l'application Δ est linéaire de $\mathcal{C}^2(U)$ vers $\mathcal{C}^0(U)$

or $\mathcal{H}(U)$ est le noyau de cette application linéaire ainsi $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$

Q 2. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur U Ainsi toutes les dérivées partielles de f est aussi de classe \mathcal{C}^2 sur U . Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En utilisant le théorème de Schwarz et la linéarité de la dérivation, on a :

$$\Delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta f)$$

Comme f est harmonique et par dérivation de la fonction nulle, on a : $\forall x \in U, \Delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x) = 0$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{H}(U)$. Puis on peut procéder par récurrence ; l'initialisation venant d'être faite et pour l'hérédité, on utilise ce qui vient d'être fait en remarquant que :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_1, \dots, i_{k+1} \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ on a : } \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} \right)$$

On a montré toute dérivée partielle à tout ordre de f appartient à $\mathcal{H}(U)$

Q 3. Analyse : Soit $f \in \mathcal{H}(U)$ telle que $f^2 \in \mathcal{H}(U)$.

$$\text{Pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ on a } \frac{\partial f^2}{\partial x_i} = 2f \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ et ainsi } \frac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = 2f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \text{ d'où}$$

$$\Delta(f^2) = 2f \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$$

$$\text{Alors } \forall x \in U, \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^2 = 0$$

Comme il s'agit de sommes de réels positifs, on a $\forall x \in U, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$

donc $\forall x \in U, \nabla f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ or U est un ouvert connexe par arcs

donc f est constante sur U

Synthèse : On suppose que f est constante sur U alors f^2 également d'où

$$\forall x \in U, \Delta f(x) = 0 \text{ et } \Delta(f^2)(x) = 0$$

Ainsi f et f^2 sont harmoniques sur U

Conclusion : Si U est connexe par arcs,

les fonctions f de $\mathcal{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(U)$ sont les fonctions constantes

Q 4. Comme U est un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , ceci nous fournit $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $r > 0$ tels que $D(a, r) \subset U$. Ainsi pour tout $t \in]a_1 - r, a_1 + r[$ (ensemble infini), on a $(t, a_2, \dots, a_n) \in U$

ainsi la fonction $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \in U \mapsto x_1 \in \mathbb{R}$ est clairement harmonique sur U sans y être constante

De plus $\forall x \in U, \Delta(\varphi^2)(x) = 2 \neq 0$ donc $\varphi^2 = \varphi \times \varphi$ n'est pas harmonique sur U

Le produit de deux fonctions harmoniques n'est pas une fonction harmonique, en général

II Exemples de fonctions harmoniques

II.A -

Q 5. Remarque : on a f de classe \mathcal{C}^2 par produit car $(x, y) \mapsto u(x)$ et $(x, y) \mapsto v(y)$ le sont

On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 = \Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y)$.

Comme v est non identiquement nulle, ceci nous fournit $t \in \mathbb{R}$ tel que $v(t) \neq 0$.

En posant $\lambda = \frac{v''(t)}{v(t)}$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}, u''(x) + \lambda u(x) = 0$

donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 = \Delta f(x, y) = -\lambda u(x)v(y) + u(x)v''(y) = (v''(y) - \lambda v(y))u(x)$

En prenant $t' \in \mathbb{R}$ tel que $u(t') \neq 0$, on a $\forall y \in \mathbb{R}, 0 = v''(y) - \lambda v(y)$ Ainsi

il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que u et v soient solutions respectives des équations $z'' + \lambda z = 0$ et $z'' - \lambda z = 0$

Q 6. Je note les équations différentielles $E_1 : z'' + \lambda z = 0$ et $E_2 : z'' - \lambda z = 0$

Si $\lambda = 0$ Les solutions de E_1 (ou E_2) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ax + B$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

Si $\lambda > 0$ Les solutions de E_1 sont les fonctions de la forme $t \mapsto A \cos(t\sqrt{\lambda}) + B \sin(t\sqrt{\lambda})$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

Les solutions de E_2 sont les fonctions de la forme $t \mapsto A' \operatorname{ch}(t\sqrt{\lambda}) + B' \operatorname{sh}(t\sqrt{\lambda})$ avec A' et $B' \in \mathbb{R}$

Si $\lambda < 0$ Les solutions de E_2 sont les fonctions de la forme $t \mapsto A \cos(t\sqrt{-\lambda}) + B \sin(t\sqrt{-\lambda})$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

Les solutions de E_1 sont les fonctions de la forme $t \mapsto A' \operatorname{ch}(t\sqrt{-\lambda}) + B' \operatorname{sh}(t\sqrt{-\lambda})$ avec A' et $B' \in \mathbb{R}$

Réciproquement : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et u et v solutions non nulles respectives de $E_1 : z'' + \lambda z = 0$ et $E_2 : z'' - \lambda z = 0$.

Alors u et v sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et ainsi $f : (x, y) \mapsto u(x)v(y)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

Et on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = \lambda u(x)v(y) - \lambda u(x)v(y) = 0$

donc f est harmonique sur \mathbb{R}^2

Conclusion : Les équations différentielles étant linéaire homogène d'ordre 2 leur solutions forment un plan vectoriel.

Une fonction f à variables séparables sur \mathbb{R}^2 est harmonique non nulles si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}, (A, B)$ et $(A', B') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que

si $\lambda = 0$ alors $f : (x, y) \mapsto (Ax + B)(A'y + B')$

si $\lambda > 0$ alors $f : (x, y) \mapsto \left(A \cos(x\sqrt{\lambda}) + B \sin(x\sqrt{\lambda}) \right) \left(A' \operatorname{ch}(y\sqrt{\lambda}) + B' \operatorname{sh}(y\sqrt{\lambda}) \right)$

si $\lambda < 0$ alors $f : (x, y) \mapsto \left(A \operatorname{ch}(x\sqrt{-\lambda}) + B \operatorname{sh}(x\sqrt{-\lambda}) \right) \left(A' \cos(y\sqrt{-\lambda}) + B' \sin(y\sqrt{-\lambda}) \right)$

II.B -

Q 7. Les fonctions $(r, \theta) \mapsto r \cos(\theta)$ et $(r, \theta) \mapsto r \sin(\theta)$ sont de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par produits

donc la fonction $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par composantes

de plus cette fonction est à valeurs dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ où f y est de classe \mathcal{C}^2

donc par composition g est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$

Q 8. On utilise la formule de la chaîne dont l'écriture abusive est :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ainsi $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

et $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

Q 9. On continue à appliquer la formule de la chaîne avec une écriture abusive en servant du calcul ci-dessus :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos(\theta) \left(\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + \sin(\theta) \left(\cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

puis à l'aide du théorème de Schwarz avec f de classe \mathcal{C}^2 : on a successivement

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) = \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(2\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} - r \sin(\theta) \left(-r \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + r \cos(\theta) \left(-r \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + r \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

puis à l'aide du théorème de Schwarz avec f de classe \mathcal{C}^2 , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) = & -r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \\ & r^2 \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - r^2 \sin(2\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r^2 \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Q 10. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on a à l'aide des calculs précédents :

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right)$$

On suppose que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$

avec ce qui précède :

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \Delta f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = 0$$

Or pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, en prenant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

on a $r > 0$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

et ainsi $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\Delta f(x, y) = 0$ d'où $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$

La réciproque est immédiate. Ainsi on a bien :

$$f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \text{ si et seulement si, pour tout } (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$$

Q 11. Analyse : On considère f une fonction harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On note g comme ci dessus.

On peut alors trouver h fonction définie sur $]0, +\infty[$ telle que $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $g(r, \theta) = h(r)$

Comme g est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ alors h l'est sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = h'(r) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) = h''(r)$$

La question précédente donne alors : $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $r^2 h''(r) + r h'(r) = 0$

donc h' est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $tz' + z = 0$

Une solution évidente est $t \mapsto 1/t$ ce qui nous fournit $A \in \mathbb{R}$ tel que $h' : r \mapsto A/r$

Ce qui nous fournit $B \in \mathbb{R}$ tel que $h : r \mapsto A \ln(r) + B$

donc $g : (r, \theta) \mapsto A \ln(r) + B$ puis $f : (x, y) \mapsto A \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + B$

Synthèse : On suppose qu'il existe A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $f : (x, y) \mapsto A \ln(x^2 + y^2) + B$

alors f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et radiale car

la fonction $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = 2A \ln(r) + B$ est indépendante de θ

et on vérifie facilement que $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$

donc $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ d'après Q10.

les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sont les fonctions : $(x, y) \mapsto A \ln(x^2 + y^2) + B$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

Q 12. En me servant de la question précédente, on cherche A et $B \in \mathbb{R}$ tels que
$$\begin{cases} 2A \ln(r_1) + B = a \\ 2A \ln(r_2) + B = b \end{cases}$$

On remarque que $A = \frac{b-a}{2(\ln(r_2) - \ln(r_1))}$ et $B = \frac{\ln(r_2)a - \ln(r_1)b}{\ln(r_2) - \ln(r_1)}$ conviennent

Alors d'après Q11, en prenant

$$f : (x, y) \mapsto \frac{(b-a) \ln(x^2 + y^2) + 2 \ln(r_2)a - 2 \ln(r_1)b}{2(\ln(r_2) - \ln(r_1))} \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \text{ on a } \begin{cases} f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R}) \\ \Delta f = 0 \\ f(x, y) = a \text{ si } \|(x, y)\| = r_1 \\ f(x, y) = b \text{ si } \|(x, y)\| = r_2 \end{cases}$$

II.C -

Q 13. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Ceci nous fournit $r_0 = \|(x_0 + y_0)\|$ tel que $u(r_0) \neq 0$
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ On a $u(r_0)v(\theta + 2\pi) = f(r \cos(\theta + 2\pi), r \sin(\theta + 2\pi)) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = u(r_0)v(\theta)$
d'où $v(\theta + 2\pi) = v(\theta)$

ainsi si f n'est pas identiquement nulle, alors v est 2π -périodique

Q 14. On suppose que f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,
On note g comme en II.B. Alors g est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ et

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) = u(r)v''(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = u'(r)v(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) = u''(r)v(\theta)$$

En utilisant Q10 : on a $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \quad r^2 u''(r)v(\theta) + u(r)v''(\theta) + ru'(r)v(\theta) = 0$

Comme f est non identiquement nulle, il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $v(\theta_0) \neq 0$. En prenant $\lambda = \frac{-v''(\theta_0)}{v(\theta_0)}$, alors

$$\text{u est solution de l'équation différentielle (II.1) : } r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = 0$$

On choisit $r_0 > 0$ tel que $u(r_0) \neq 0$, on a alors

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad v''(\theta) + \frac{r_0^2 u''(r_0) + r_0 u'(r_0)}{u(r_0)} v(\theta) = 0$$

comme u est solution de l'équation différentielle (II.1), on a : $\frac{r_0^2 u''(r_0) + r_0 u'(r_0)}{u(r_0)} = \lambda$

ainsi v est solution de l'équation différentielle (II.2) : $z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0$

II.C.1) On suppose ici que $\lambda = 0$.

Q 15. Les solutions de (II.2) sont les fonctions affines.

Les solutions 2π -périodiques de (II.2) sont les fonctions constantes

Q 16. En faisant comme en Q11. :

Les solutions de (II.1) sur \mathbb{R}^{*+} sont les fonctions de la forme $r \mapsto A \ln(r) + B$

Q 17. D'après Q15. dans le cas où $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont radiales.

Il est clair que toutes fonctions radiale sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ est à variables polaires séparable. Alors d'après Q11.,

les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont les fonctions : $(x, y) \mapsto A \ln(x^2 + y^2) + B$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

II.C.2) On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

Q 18. Analyse : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel qu'il existe v solution non nulles 2π -périodiques de (II.2) : $z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0$

Par l'absurde si $\lambda < 0$, comme en Q6 on peut écrire $v : \theta \mapsto Ae^{\theta\sqrt{-\lambda}} + Be^{-\theta\sqrt{-\lambda}}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

Si $A \neq 0$, alors $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} |v(\theta)| = +\infty$

Si $A = 0$, alors $B \neq 0$ et $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} |v(\theta)| = +\infty$

Or $v(\mathbb{R}) = v([0, 2\pi])$ car v est 2π -périodique et d'après le théorème des bornes atteintes v est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$ car v y est continue

d'où v est bornée sur \mathbb{R} ce qui est en contradiction avec les limites

d'où $\lambda > 0$

comme en Q6 on peut écrire $v : \theta \mapsto A \cos(\theta\sqrt{\lambda}) + B \sin(\theta\sqrt{\lambda})$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

ou encore, d'après le cours, $v : \theta \mapsto \rho \cos(\theta\sqrt{\lambda} + \varphi)$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$ et $\rho = \sqrt{A^2 + B^2} > 0$ car v non nulle

Comme $v\left(\frac{-\varphi}{\sqrt{\lambda}}\right) = v\left(\frac{-\varphi}{\sqrt{\lambda}} + 2\pi\right)$ et $\rho \neq 0$, on en déduit que $1 = \cos(2\pi\sqrt{\lambda})$

ce qui nous fournit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi\sqrt{\lambda} = k2\pi$ donc $\lambda = k^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Autre méthode pour conclure l'analyse : En pensant à la formule « $T = \frac{2\pi}{\omega}$ », on peut également affirmer que le groupe des périodes de $\theta \mapsto \cos(\theta\sqrt{\lambda} + \varphi)$ est $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\mathbb{Z}$. Puis utiliser que $2\pi \in \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\mathbb{Z} \dots$

Synthèse : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prenons $\lambda = k^2$. Alors $\lambda > 0$ et $\sqrt{\lambda} = k$

Les solutions de (II.2) sont les fonctions $\theta \mapsto A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

Elles sont toutes $2\pi/k$ périodiques donc 2π périodiques

En prenant $(A, B) = (1, 0)$, on a une solution non nulle.

Conclusion :

Pour que (II.2) admette des solutions 2π -périodiques non nulles, il faut et il suffit qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = k^2$

Dans ce cas,

les solutions non nulles 2π -périodiques de (II.2) sont les $\theta \mapsto A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Q 19. Soit z de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^{+*} . On pose $Z : t \mapsto z(e^t)$.

Alors par composition Z est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et on a $\forall r > 0, z(r) = Z(\ln(r))$.

Réciproquement si Z est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} alors $z : r \mapsto Z(\ln(r))$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^{+*}

Pour $r > 0$, on a $z(r) = Z(\ln(r))$ et $z'(r) = \frac{Z'(\ln(r))}{r}$ et aussi $z''(r) = \frac{Z''(\ln(r)) - Z'(\ln(r))}{r^2}$

Ainsi $r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = Z''(\ln(r)) - \lambda Z(\ln(r))$

Comme \ln est bijective de \mathbb{R}^{+*} vers \mathbb{R} .

z est solution de (II.1) si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, Z''(t) - \lambda Z(t) = 0$

On a déjà vu cette équation en $w : w'' - \lambda w = 0$ (II.1b)

Grâce à la remarque sur la classe \mathcal{C}^2 , en début de question, on a une bijection (qui à z associe Z) entre les ensembles des solutions de (II.1) et de (II.1b)

Si $\lambda > 0$, les solutions de (II.1), sont les fonctions $r \mapsto A \exp(\ln(r)\sqrt{\lambda}) + B \exp(-\ln(r)\sqrt{\lambda})$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Si $\lambda < 0$, les solutions de (II.1), sont les fonctions $r \mapsto A \cos(\ln(r)\sqrt{-\lambda}) + B \sin(-\ln(r)\sqrt{-\lambda})$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Q 20. Analyse : On suppose que f est harmonique à variables polaires séparables non identiquement nulles qui se prolongeant par continuité en 0. Alors d'après les questions précédentes, on peut trouver $k \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $(A', B') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = (A' \exp(\ln(r)k) + B' \exp(-\ln(r)k)) \times (A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta))$$

Je note $v : \theta \mapsto A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$ donc $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = (A'r^k + B'r^{-k}) v(\theta)$

Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v(\alpha) \neq 0$

Comme il existe $\ell \in \mathbb{R}$, tel que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell$ alors $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \ell$

donc $r \mapsto A'r^k + B'r^{-k}$ admet une limite finie en 0 donc $B' = 0$

Synthèse On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, A et B dans \mathbb{R} tel que

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r^k (A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta))$$

Remarque : j'ai rajouté la fonction nulle

Alors f est bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ à variables polaires séparables de plus f est alors de classe \mathcal{C}^2 d'après l'énoncé (II.C) car $u : r \mapsto r^k$ est \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^{*+} et $v : \theta \mapsto A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$ est 2π -périodique et \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}

On définit g comme en II.B. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$:

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) = k(k-1)g(r, \theta) \quad \text{et} \quad r \frac{\partial^2 g}{\partial r}(r, \theta) = kg(r, \theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) = -k^2 g(r, \theta)$$

donc $r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial^2 g}{\partial r}(r, \theta) = 0$ d'où f est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ d'après Q10.

De plus $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, |f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))| \leq (|A| + |B|) r^k$

donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x, y)| \leq (|A| + |B|) (x^2 + y^2)^{k/2}$

or $(x^2 + y^2)^{k/2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ donc $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$

Ainsi f se prolonge par continuité en 0

Les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ à variables polaires séparables qui se prolongent par continuité en $(0, 0)$ sont les fonctions f vérifiant

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r^k (A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta))$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$

III Principe du maximum faible

III.A -

Q 21. Comme U est bornée, ceci nous fournit $R > 0$ tel que $U \subset \overline{D(0, R)}$

donc comme $\overline{D(0, R)}$ est fermé alors $\overline{U} \subset \overline{D(0, R)}$

donc \overline{U} est borné et c'est un fermé de \mathbb{R}^n qui est un espace de dimension finie

d'où \overline{U} est un compact non vide de \mathbb{R}^n or f y est continue

Ainsi f admet un maximum en un point $x_0 \in \overline{U}$

Q 22. Par l'absurde on suppose que $x_0 \notin \partial U$ d'où $x_0 \in \bar{U} \setminus \partial U$
 or $\partial U = \bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$ où $\overset{\circ}{U}$ est l'intérieur de U et $\overset{\circ}{U} = U$ car U est un ouvert
 d'où $x_0 \in U$ ce qui nous fournit $r > 0$ tel que $D(x_0, r) \subset U$

On a donc : $0 < \Delta f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)$. Ce qui nous fournit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$

Comme f qui est de classe \mathcal{C}^1 sur U et y admet un maximum en x_0 , on a $\nabla f(x_0) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$

Je note $\varphi : t \mapsto f(x_0 + te_i)$, où (e_1, \dots, e_n) désigne la base canonique de \mathbb{R}^n

alors φ est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -r, r[$ par composition. De plus $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$ et $\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$

donc selon Taylor-Young, on a $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \varphi(0) + \frac{\varphi''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$ puis

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi''(0) > 0$$

ceci nous fournit $\alpha \in]0, r[$, tel que

$$\forall t \in] -\alpha, \alpha[\setminus \{0\}, \varphi(t) > \varphi(0)$$

Absurde car φ admet un maximum en 0 car f admet sur U un maximum en x_0

Donc $x_0 \in \partial U$

Comme $\partial U \subset \bar{U}$ donc $f(x_0) = \sup_{y \in \bar{U}} f(y) \geq \sup_{y \in \partial U} f(y)$ d'où

$$\forall x \in U, f(x) \leq \sup_{y \in \bar{U}} f(y) = \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

À l'aide de ce qui est fait ci-dessus on a : $\forall x \in U, f(x) \neq \sup_{y \in \partial U} f(y)$ car $U = \bar{U} \setminus \partial U$.

On en déduit que $\forall x \in U, f(x) < \sup_{y \in \partial U} f(y)$

III.B -

Q 23. La fonction $\psi : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2

donc ψ est continue sur \bar{U} et de classe \mathcal{C}^2 sur U

De plus $\forall x \in \mathbb{R}^n, \Delta \psi(x) = 2n > 0$ Par somme et par linéarité de Δ , on a :

g_ε est continue sur \bar{U} , de classe \mathcal{C}^2 sur U , et telle que $\forall x \in U, \Delta g_\varepsilon(x) > 0$

Q 24. Soit $x \in U$. Soit $\varepsilon > 0$. On utilise **Q22** avec la fonction g_ε qui en vérifie les hypothèses selon **Q23** :

$$g_\varepsilon(x) < \sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y) \quad (1)$$

Comme \bar{U} est compact (**Q21**), il en est de même pour ∂U car c'est un fermé inclus dans ∂U et ceci nous fournit l'existence de $\sup_{z \in \partial U} f(z)$ et de $R > 0$, tel que $\forall y \in \partial U, 0 \leq \|y\| \leq R$ donc

$$\forall y \in \partial U, g_\varepsilon(y) = f(y) + \|y\|^2 \varepsilon \leq f(y) + R^2 \varepsilon \leq \sup_{z \in \partial U} f(z) + R^2 \varepsilon \quad (\text{majorant indépendant de } y)$$

d'où $\sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y) \leq \sup_{z \in \partial U} f(z) + R^2 \varepsilon$ et ainsi (1) devient :

$$f(x) \leq \sup_{z \in \partial U} f(z) + (R^2 - \|x\|^2) \varepsilon \leq \sup_{y \in \partial U} f(y) + R^2 \varepsilon \quad (\text{majorant indépendant de } x)$$

En passant à la limite quand ε tend vers 0 : on a $\forall x \in U, f(x) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y)$ f atteint ses bornes sur la frontière.

Q 25. On suppose que f_1 et f_2 sont égales sur ∂U alors $f = f_1 - f_2$, les hypothèses de Q24 et $\forall y \in \partial U, f(y) = 0$ donc $\forall x \in U, f_1(x) - f_2(x) = f(x) \leq 0 = \sup_{y \in \partial U} f(y)$

En faisant de même avec $f_2 - f_1$, on a $\forall x \in U, f_1(x) - f_2(x) \geq 0$ d'où $\forall x \in U, f_1(x) = f_2(x)$

Si les fonctions f_1 et f_2 sont égales sur ∂U , alors f_1 et f_2 sont égales sur U

IV Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

IV.A -

Q 26. On a pour tout $z \in D(0, R)$, la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

donc la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égale à R

Ainsi la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$

or la fonction $(x, y) \mapsto x + iy$ est continue sur \mathbb{R}^2 car linéaire en dimension finie

On a montré que, par composition,

si une fonction se développe en série entière sur $D(0, R)$ où $R > 0$ alors elle y est continue (1).

D'après le cours la série entière $\sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1}$ a également un rayon $\geq R$

donc pour tout $r \in]0, R[$, la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ converge normalement sur $D(0, r)$ (2)

Soit $y \in]-R, R[$. Je note $u_n : x \mapsto a_n (x + iy)^n$ définie sur $I_y =]-\sqrt{R - y^2}, \sqrt{R - y^2}[$ de sorte que $I_y \times \{y\} \subset D(0, r)$

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I_y .

De plus, $u'_n : x \mapsto n a_n (x + iy)^{n-1}$ pour $n > 0$ et u'_0 est la fonction nulle.

(ii) la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur I_y d'après l'énoncé

(iii) Soit $\rho \in]0, \sqrt{R^2 - y^2}[$. On a $\forall x \in [-\rho, \rho], |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{\rho^2 + y^2} < R$.

Je note $r = \sqrt{\rho^2 + y^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall x \in [-\rho, \rho], |u'_n(x)| = |n a_n (x + iy)^{n-1}| \leq n |a_n| r^{n-1} \leq n |a_n| r^n$ et $r \in]0, R[$.

Ainsi d'après (2), la série $\sum_{n \geq 0} u'_n$ converge normalement sur $[-\rho, \rho]$.

donc la série $\sum_{n \geq 0} u'_n$ converge uniformément sur tout segment de I_y

Par théorème avec (i), (ii) et (iii), on a $x \mapsto f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I_y

Comme $D(0, R) = \bigcup_{z \in]-R, R[} (I_z \times \{z\})$ la fonction $\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + iy)^{n-1}$ est définie sur $D(0, R)$

comme la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ a un rayon $\geq R$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $D(0, R)$ d'après (1)

et de même $\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n i (x + iy)^{n-1}$ est continue sur $D(0, R)$

donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, R)$ et ses dérivées partielles se développent en série entière sur $D(0, R)$

Ainsi la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $D(0, R)$ par récurrence immédiate

Q 27. On travaille dans \mathbb{C} plan vectoriel sur le corps \mathbb{R} .

Soit $(x, y) \in D(0, \mathbb{R})$. En appliquant les calculs de la question précédente :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-1} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, y) = -\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-1}$$

donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ En prenant parties réelles, et imaginaire, on a :

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \text{ et } \Delta v(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

d'où u et v sont harmoniques sur $D(0, \mathbb{R})$

IV.B -

Q 28. On suppose f ne s'annule pas sur $D(0, \mathbb{R})$. Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, \mathbb{R})$, alors $1/f$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{C} . (1)

f se développe en série entière sur $D(0, \mathbb{R})$

donc $\forall (x, y) \in D(0, \mathbb{R})$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ d'après la propriété admise

$$\text{or } \frac{\partial(1/f)}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{f^2(x, y)} \text{ et } \frac{\partial(1/f)}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{f^2(x, y)}$$

ainsi $\forall (x, y) \in D(0, \mathbb{R})$, $\frac{\partial(1/f)}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial(1/f)}{\partial x}(x, y)$ (2)

En utilisant la réciproque de la propriété admise : $1/f$ se développe en série entière sur $D(0, \mathbb{R})$

Q 29. Soit $(x, y) \in D(0, \mathbb{R})$.

On a : $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ selon la propriété admise.

En prenant partie réelle et imaginaire on a : $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$

De plus en utilisant la dérivation de produits, on a :

$$\Delta(uv)(x, y) = (v(x, y)\Delta u(x, y)) + (u(x, y)\Delta v(x, y)) + 2\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + 2\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

donc comme u et v sont harmoniques sur $D(0, \mathbb{R})$ et avec les formules ci-dessus :

$$\Delta(uv)(x, y) = 0 + 0 + 2\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) - 2\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0$$

Ainsi uv est harmonique sur $D(0, \mathbb{R})$

IV.C -

Q 30. Comme g est harmonique sur $D(0, \mathbb{R})$ alors g y est de classe \mathcal{C}^2 .

Donc h est de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, \mathbb{R})$ (1)

Soit $(x, y) \in D(0, \mathbb{R})$.

$$\text{On a } \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) - i \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) \text{ et } \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) - i \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y)$$

donc selon le théorème de Schwarz car g est de classe \mathcal{C}^2 et comme g est harmonique : on a

$$i \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = -i \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \quad (2)$$

En utilisant la propriété admise, (1) et (2) donne : h se développe en série entière sur $D(0, \mathbb{R})$

Q 31. On suppose que g appartient à $\mathcal{H}(D(0, R))$.

On définit la fonction h comme en Q30. et ainsi h se développe en série entière sur $D(0, R)$

On peut donc trouver une suite complexe (b_n) telle que $\forall (x, y) \in D(0, R)$, $h(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x + iy)^n$

Ainsi la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ a un rayon $\geq R$ donc il en est de même pour la série entière $g(0, 0) + \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n+1} z^{n+1}$

Ainsi la fonction $H : (x, y) \mapsto g(0, 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n+1} (x + iy)^{n+1}$ est définie sur $D(0, R)$

donc d'après Q26., H est de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, R)$ et

$$\frac{\partial H}{\partial x} : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x + iy)^n = h(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial y} : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n i (x + iy)^n = ih(x, y)$$

Ainsi $\frac{\partial \operatorname{Re}(H)}{\partial x} : (x, y) \mapsto \operatorname{Re}(h)(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial \operatorname{Re}(H)}{\partial y} : (x, y) \mapsto -\operatorname{Im}(h)(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$

donc la fonction $g - \operatorname{Re}(H)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $D(0, R)$ de différentielle nulle

or $D(0, R)$ est connexe par arcs donc $g - \operatorname{Re}(H)$ est constante or $g - \operatorname{Re}(H)$ est nulle en $(0, 0)$

donc $g = \operatorname{Re}(H)$ sur $D(0, R)$ et H y est développable en série entière.

il existe bien une fonction H se développant en série entière sur $D(0, R)$, telle que g est la partie réelle de H

IV.D -

Q 32. Comme f est développable en série entière sur $D(0, R)$, ceci nous fournit une suite complexe (a_n) telle que

$$\forall (x, y) \in D(0, R), f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n.$$

Soit $r \in [0, R[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n : t \mapsto a_n (r \cos(t) + ir \sin(t))^n = a_n r^n e^{int}$

(i) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $[0, 2\pi]$

(ii) Comme la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $D(0, R)$, on peut montrer

comme en Q26., que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$

Ainsi par théorème on peut intervertir série et intégrale : $\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(t) dt$

or $\forall t \in [0, 2\pi]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = f(r \cos(t), r \sin(t))$

et pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^{2\pi} u_n(t) dt = a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{int} dt$

si $n = 0$, alors $\int_0^{2\pi} u_n(t) dt = 2\pi a_0$

et sinon $\int_0^{2\pi} u_n(t) dt = \left[\frac{e^{int}}{ni} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1-1}{ni} = 0$

donc $\int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt = 2\pi a_0$ or $f(0) = a_0$

ainsi pour tout $r \in [0, R[$, on a $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt$

Q 33. Soit g une fonction harmonique sur $D(0, R)$ et $r \in [0, R[$. On a $g(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos(t), r \sin(t)) dt$

on peut écrire $g = \text{Re}(H)$ où H est développable en série entière

alors d'après la question précédente, on a $H(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(r \cos(t), r \sin(t)) dt$

On peut alors conclure en prenant la partie réelle de cette égalité.

Q 34. Soit $r \in [0, R[$, on a $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt$ d'après Q32.

La fonction $t \mapsto f(r \cos(t), r \sin(t))$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$ donc bornée selon le théorème des bornes atteintes et elle aussi 2π périodique.

En utilisant l'inégalité de la moyenne (inégalité triangulaire continue), on a :

$$|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r \cos(t), r \sin(t))| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(r \cos(t), r \sin(t))| du$$

donc $\forall r \in [0, R[, |f(0)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(r \cos(t), r \sin(t))|$

Q 35. On utilise Q33. et on fait comme en Q34. pour obtenir :

Soit g une fonction harmonique sur $D(0, R)$ et $r \in [0, R[$. On a $|g(0, 0)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(r \cos(t), r \sin(t))|$

Q 36. On suppose que $|f|$ admet un maximum en 0.

Si $f(0, 0) = 0$ alors f est identiquement nulle et donc constante sur $D(0, R)$

Si $f(0, 0) = 1$ alors $\forall (x, y) \in D(0, R), |f(x, y)| \leq 1$.

Je note u et v respectivement les parties réelle et imaginaire de f .

Ainsi $u(0, 0) = 1$ et $v(0, 0) = 0$

De plus $\forall (x, y) \in D(0, R), |u(x, y)| \leq |f(x, y)| \leq 1$ d'où $\forall (x, y) \in D(0, R), u(x, y) \leq 1$

D'après Q27., u et v sont harmoniques sur $D(0, R)$

donc selon Q33., pour $r \in [0, R[$, on a $u(0) = 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos(t), r \sin(t)) dt$ donc

$$\int_0^{2\pi} (1 - u(r \cos(t), r \sin(t))) dt = 0 \text{ et la fonction } t \mapsto 1 - u(r \cos(t), r \sin(t)) \text{ est continue et positive sur } [0, 2\pi]$$

d'où $\forall r \in [0, R[, \forall t \in [0, 2\pi], u(r \cos(t), r \sin(t)) = 1$

comme $D(0, R) = \{(r \cos(t), r \sin(t)) \mid r \in [0, R[, t \in [0, 2\pi]\}$,

alors $\forall (x, y) \in D(0, R), u(x, y) = 1$ et $|u(x, y) + iv(x, y)| \leq 1$

donc $\forall (x, y) \in D(0, R), v(x, y) = 0$ et ainsi $\forall (x, y) \in D(0, R), f(x, y) = 1$

Si $f(0, 0) \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ alors je note $\tilde{f} = \frac{1}{f(0, 0)} f$

De sorte que \tilde{f} est développable en série entière sur $D(0, R)$, $\tilde{f}(0, 0) = 1$ et $|\tilde{f}|$ admet un maximum en 0

En utilisant le cas précédent, on a : $\forall (x, y) \in D(0, R), \tilde{f}(x, y) = 1$

et donc $\forall (x, y) \in D(0, R), f(x, y) = f(0, 0)$

On a montré que si $|f|$ admet un maximum en 0, alors f est constante sur $D(0, R)$

Q 37. Par l'absurde, on suppose que P est un polynôme complexe non constant sans racine dans \mathbb{C} .

Donc $\deg P > 0$ et on peut écrire $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$

Pour $z \neq 0$, on a $|P(z)| \geq |\alpha_n| \cdot |z|^n \cdot \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{\alpha_i}{\alpha_n z^{n-i}} \right| \right)$ donc $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$

Ceci nous fournit $\rho > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq \rho \implies |P(z)| \geq |P(0)|$

La fonction $z \mapsto |P(z)|$ est continue sur le compact $\overline{D(0, \rho)}$

Ce qui nous fournit $z_0 \in \overline{D(0, \rho)}$ tel que $\forall z \in \overline{D(0, \rho)}$, $|P(z)| \geq |P(z_0)|$

Ainsi $|P(0)| \geq |P(z_0)|$ et donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq \rho \implies |P(z)| \geq |P(z_0)|$

Ainsi $z \mapsto |P(z)|$ admet un minimum sur \mathbb{C} atteint en z_0

Je pose $Q = P(X + z_0)$ alors Q est un polynôme non constant qui ne s'annule pas sur \mathbb{C} et $z \mapsto |Q(z)|$ admet un minimum sur \mathbb{C} atteint en 0

donc la fonction $(x, y) \mapsto Q(x + iy)$ est une fonction non constante qui ne s'annule pas sur \mathbb{C} telle que $(x, y) \mapsto |Q(x + iy)|$ admet un minimum en $(0, 0)$

Prenons $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Q(x_1 + iy_1) \neq Q(0)$.

Je note alors $R = \|(x_1, y_1)\| + 1$, de sorte que $(x, y) \mapsto Q(x + iy)$ est une fonction non constante sur $D(0, R)$ et $(x, y) \mapsto |Q(x + iy)|$ y admet un minimum en $(0, 0)$

de plus $(x, y) \mapsto Q(x + iy)$ est développable en série entière sur $D(0, R)$ car Q est un polynôme

Selon Q28., comme Q n'a pas de racine :

la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{Q(x + iy)}$ est développable en série entière sur $D(0, R)$

De plus $|f|$ admet un maximum en 0, donc f est constante sur $D(0, R)$

d'où $Q(x_1 + iy_1) = \frac{1}{f(x_1, y_1)} = \frac{1}{f(0, 0)} = Q(0)$ Absurde

d'où le théorème de D'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine

V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de \mathbb{R}^2

Q 38. Soit $|z| < 1$. On a $\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{2e^{it} - (e^{it} - z)}{e^{it} - z} = -1 + \frac{2}{1 - ze^{-it}}$ or $|ze^{-it}| < 1$

donc par somme géométrique : $\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = -1 + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} z^k e^{-kit}$

Ainsi on a le développement en série entière pour $|z| < 1$, $\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = -1 + \sum_{k=0}^{+\infty} 2z^k e^{-kit}$

Soit $|z| < 1$, je pose $F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt$

ce qui est possible car $t \mapsto h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$ est continue sur $[0, 2\pi]$

La fonction h est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$ car h y est continue.

Ce qui nous fournit $M > 0$ tel que $\forall t \in [0, 2\pi], |h(t)| \leq M$

Je pose $u_0 = h$ et pour $n \geq 1$, $u_n : t \mapsto 2e^{-nit} z^n h(t)$

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $[0, 2\pi]$

(ii) On a $\forall t \in [0, 2\pi], |u_0(t)| \leq M$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 2\pi], |u_n(t)| \leq 2M|z|^n$$

or la série $M + \sum_{n \geq 1} 2M|z|^n$ converge

donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 2\pi]$

La somme de cette série de fonctions sur $[0, 2\pi]$ est $t \mapsto h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$

Avec (i) et (ii), par théorème de cours, on a

$$2\pi F(z) = \int_0^{2\pi} h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(t) dt = \int_0^{2\pi} h(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{-nit} h(t) dt \right) z^n$$

Ainsi F est la somme d'une série entière de rayon ≥ 1

donc la fonction $(x, y) \mapsto F(x + iy)$ est développable en série entière sur $D(0, 1)$

or $g = \operatorname{Re}(F)$ donc d'après Q27, la fonction $(x, y) \mapsto g(x + iy)$ est une fonction harmonique sur $D(0, 1)$

Q 39. Soit $|z| < 1$.

On applique le calcul précédent avec la fonction h constante égale à 1 qui est bien continue 2π -périodique :

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{-nit} dt \right) z^n = 2\pi$$

car pour $k \in \mathbb{Z}^*$, on a $\int_0^{2\pi} e^{kit} dt = \left[\frac{e^{kit}}{ki} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1 - 1}{ki} = 0$

en en prenant la partie réelle : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t, z) dt = 1$

Q 40. Soit $|z| < 1$.

La fonction $t \mapsto h(t)\mathcal{P}(t, z)$ est continue et 2π -périodique sur \mathbb{R}

La fonction $\psi : \alpha \mapsto \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t, z) dt$ est alors de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} par le théorème fondamental de l'analyse de dérivée :

$$\psi' : \alpha \mapsto h(\alpha + 2\pi)\mathcal{P}(\alpha + 2\pi, z) - h(\alpha)\mathcal{P}(\alpha, z) = 0$$

donc ψ est constante sur \mathbb{R} d'où $\psi(0) = \psi(\varphi)$ ainsi $g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t, z) dt$

Q 41. Soit $r \in [0, 1[$ et t et $\theta \in \mathbb{R}$. En notant $z = re^{i\theta}$ on a bien $|z| < 1$.

$$\text{On a } \mathcal{P}(t, re^{i\theta}) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} \right) = \frac{\operatorname{Re}((e^{it} + re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta}))}{(e^{it} - re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta})}$$

$$\text{On a } (e^{it} + re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta}) = 1 - r^2 + re^{i\theta}e^{-it} - re^{-i\theta}e^{it} = 1 - r^2 + 2i \operatorname{Im}(re^{i\theta}e^{-it})$$

$$\text{donc } \operatorname{Re}((e^{it} + re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta})) = 1 - r^2$$

$$\text{et } (e^{it} - re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta}) = 1 + r^2 - r(\exp(i(\theta - t)) + \exp(i(t - \theta))) = 1 + r^2 - 2r \cos(t - \theta)$$

$$\text{On a bien } \boxed{\mathcal{P}(t, re^{i\theta}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2}}$$

Q 42. On peut faire bien plus simple par majoration en utilisant la question Q41.

Soit $\delta \in]0, \pi[$.

Je note pour $|z| < 1$, $F_z : t \mapsto \mathcal{P}(t, z)$ définie sur $[\delta, 2\pi - \delta]$.

(i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la fonction F_z est continue sur $[\delta, 2\pi - \delta]$

(ii) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $\operatorname{Re}(z) > 0$.

On se place sur $\{Z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(Z) > 0 \text{ et } |Z| < 1\}$ qui est un voisinage de 1 relatif à $\{Z \in \mathbb{C} \mid |Z| < 1\}$

On note $z = re^{i\theta}$ où $r < 1$ et $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Quand $z \rightarrow 1$, on a $\theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right) \rightarrow 0$ et $1 - r^2 \rightarrow 0$

Pour $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$, on a $1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2 \rightarrow 2 - 2 \cos(\delta)$ donc $\mathcal{P}(t, z) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} \rightarrow 0$

donc la famille de fonctions $(F_z)_z$ converge simplement sur $[\delta, 2\pi - \delta]$ vers la fonction $t \mapsto 0$ quand z tend vers 1

(iii) la fonction $t \mapsto 0$ est continue sur $[\delta, 2\pi - \delta]$

(iv) Je note $V_\delta = \{Z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(Z) > \cos(\delta/2) \text{ et } |Z| < 1\}$ qui est un voisinage de 1 relatif à $\{Z \in \mathbb{C} \mid |Z| < 1\}$

Soit $z \in V_\delta$. Soit $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

On a $F_z(t) = \mathcal{P}(t, re^{i\theta}) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}$ d'après le calcul fait en Q.43.

donc $|F_z(t)| = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}$ or $0 \leq 1 - |z|^2 \leq 1$ et $|e^{it} - z| \geq \operatorname{Re}(-e^{it} + z) \geq \cos(\delta/2) - \cos(\delta) > 0$

d'où l'hypothèse de domination :

$$\forall z \in V_\delta, \forall t \in [\delta, 2\pi - \delta], |F_z(t)| \leq \frac{1}{(\cos(\delta/2) - \cos(\delta))^2}$$

et $t \mapsto \frac{1}{(\cos(\delta/2) - \cos(\delta))^2}$ est continue et intégrable sur le segment $[\delta, 2\pi - \delta]$

Conclusion : Avec (i), (ii), (ii) et (iv), l'extension du théorème de convergence dominée s'applique

$$\int_{\delta}^{2\pi - \delta} \mathcal{P}(t, z) dt \xrightarrow{z \rightarrow 1} 0$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathbb{R}$, on a par changement de variable de classe $\mathcal{C}^1 : u = t - \varphi, du = dt :$

$$\int_{\varphi + \delta}^{\varphi + 2\pi - \delta} \mathcal{P}(t, z) dt = \int_{\delta}^{2\pi - \delta} \mathcal{P}(u + \varphi, z) du = \int_{\delta}^{2\pi - \delta} \mathcal{P}(t, ze^{-i\varphi}) dt$$

Quand $z \rightarrow e^{i\varphi}$, on a $ze^{-i\varphi} \rightarrow 1$

donc en utilisant la limite précédente par composition : $\boxed{\int_{\varphi + \delta}^{\varphi + 2\pi - \delta} \mathcal{P}(t, z) dt \xrightarrow{z \rightarrow e^{i\varphi}} 0}$

Q 43. Soit $\varepsilon > 0$. On considère $\delta > 0$.

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

On a selon Q39., $2\pi = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t, z) dt = \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt$ en faisant comme en 40.

d'où $2\pi h(\varphi) = \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) h(\varphi) dt$

Ainsi $2\pi |g(z) - h(\varphi)| = \left| \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} (h(t)\mathcal{P}(t, z) - h(\varphi)\mathcal{P}(t, z)) dt \right|$ d'après Q40.

donc selon Chasles et l'inégalité triangulaire et comme $\mathcal{P}(t, z) \geq 0$ pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$2\pi |g(z) - h(\varphi)| \leq \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z) dt + \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t, z) |h(t) - h(\varphi)| dt$$

La fonction h est continue sur \mathbb{R} et 2π -périodique donc elle est uniformément continue sur le segment $[0, 4\pi]$ selon le théorème de Heine. ce qui nous fournit $\delta \in]0, \pi/2]$ tel que

$$\forall t, t' \in [0, 4\pi], |t - t'| \leq \delta \implies |h(t) - h(t')| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

Ainsi ce δ que nous choisissons ne dépend que de ε , on a en plaçant t et t' dans le bon intervalle $[2k\pi, (2k+4)\pi]$:

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, |t - t'| \leq \delta \implies |h(t) - h(t')| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

on a donc $\forall t \in [\varphi - \delta, \varphi + \delta], |h(t) - h(\varphi)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$

et ainsi

$$0 \leq \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t, z) |h(t) - h(\varphi)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t, z) dt$$

or $0 \leq \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t, z) dt \leq \int_{\varphi-\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} \mathcal{P}(t, z) dt \leq 2\pi$ d'après Q39.

et donc en choisissant ce δ , on a : pour tout nombre réel φ et tout nombre complexe z vérifiant $|z| < 1$, on a bien

$$0 \leq \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t, z) |h(t) - h(\varphi)| dt \leq \varepsilon$$

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$.

On a déjà vu que h est borné sur $[0, 2\pi]$ or comme h est périodique $h([0, 2\pi]) = h(\mathbb{R})$ donc h est bornée sur \mathbb{R}

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|h(t) - h(\varphi)| \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|$

et donc $\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z) dt \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)| \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout nombre réel φ

et tout nombre complexe z vérifiant $|z| < 1$,

$$|g(z) - h(\varphi)| \leq \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt + \varepsilon$$

Q 44. On va établir l'existence et l'unicité.

Unicité Soit f_1 et f_2 deux solutions du problème de Dirichlet.

Je note $U = D(0, 1)$ ainsi $\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| = 1\}$

Les fonctions f_1 et f_2 sont continues sur \bar{U} , de classe \mathcal{C}^2 et harmonique sur U et égales sur ∂U car $\forall t \in \mathbb{R}, f_1(\cos(t), \sin(t)) = h(t) = f_2(\cos(t), \sin(t))$

Ainsi Q25. s'applique et on a $f_1 = f_2$ égale sur U donc sur $\overline{D(0, 1)}$

Existence : Je considère f définie sur $\overline{D(0, 1)}$ par :

pour $(x, y) \in D(0, 1)$, $f(x, y) = g(x + iy)$ et pour $t \in \mathbb{R}$, $f(\cos(t), \sin(t)) = h(t)$

Selon Q38. f est \mathcal{C}^2 et harmonique sur $D(0, 1)$, il reste à établir la continuité de f en tout point de $\partial D(0, 1)$

Soit $a \in \partial D(0, 1)$. On peut écrire $a = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0$.

Je prends $\delta > 0$ comme à la question précédente.

On a quand $(x, y) \rightarrow a$ avec $\|(x, y)\| < 1$, $x + iy \rightarrow e^{i\varphi}$

donc $|f(x, y) - f(a)| = |g(x + iy) - h(\varphi)| \leq \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt + \varepsilon$

or $\frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt \rightarrow 0$ d'après Q42.

ce qui nous fournit V_1 un voisinage de a , tel que $\forall (x, y) \in V_1 \cap D(0, 1)$, $|f(x, y) - f(a)| \leq 2\varepsilon$

de plus l'application définie sur $D(a, 1) \cap \partial D(0, 1) : (\cos(t), \sin(t)) \mapsto t$ est continue en utilisant soit arccos soit arcsin

Ainsi la fonction f est continue en a sur $\partial D(0, 1)$ par composition avec h

ce qui nous fournit V_2 un voisinage de a relatif $\partial D(0, 1)$ tel que $\forall (x, y) \in V_2$, $|f(x, y) - f(a)| \leq 2\varepsilon$

d'où $\forall (x, y) \in V_2 \cup (V_1 \cap D(0, 1))$, $|f(x, y) - f(a)| \leq 2\varepsilon$

comme $V_2 \cup (V_1 \cap D(0, 1))$ est un voisinage de a relatif à $\overline{D(0, 1)}$

On a bien la continuité voulue en a ce qui termine ce problème