

## Centrale MP2 2018

**I Fonctions harmoniques : quelques propriétés**

**Q 1.** Pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'application  $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^k(U)$  est linéaire.

Donc par composition et somme l'application  $\Delta$  est linéaire de  $\mathcal{C}^2(U)$  vers  $\mathcal{C}^0(U)$

or  $\mathcal{H}(U)$  est le noyau de cette application linéaire ainsi  $\mathcal{H}(U)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$

**Q 2.** On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$  Ainsi toutes les dérivées partielles de  $f$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ . Soit  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En utilisant le théorème de Schwarz et la linéarité de la dérivation, on a :

$$\Delta \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\Delta f)$$

Comme  $f$  est harmonique et par dérivation de la fonction nulle, on a :  $\forall x \in U, \Delta \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x) = 0$

Ainsi  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{H}(U)$ . Puis on peut procéder par récurrence ; l'initialisation venant d'être faite et pour l'hérédité, on utilise ce qui vient d'être fait en remarquant que :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } i_1, \dots, i_{k+1} \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ on a : } \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}} \left( \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} \right)$$

On a montré toute dérivée partielle à tout ordre de  $f$  appartient à  $\mathcal{H}(U)$

**Q 3. Analyse :** Soit  $f \in \mathcal{H}(U)$  telle que  $f^2 \in \mathcal{H}(U)$ .

$$\text{Pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ on a } \frac{\partial f^2}{\partial x_i} = 2f \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ et ainsi } \frac{\partial^2 f^2}{\partial x_i^2} = 2f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \text{ d'où}$$

$$\Delta(f^2) = 2f \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$$

$$\text{Alors } \forall x \in U, \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^2 = 0$$

Comme il s'agit de sommes de réels positifs, on a  $\forall x \in U, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$

donc  $\forall x \in U, \nabla f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$  or  $U$  est un ouvert connexe par arcs

donc  $f$  est constante sur  $U$

**Synthèse :** On suppose que  $f$  est constante sur  $U$  alors  $f^2$  également d'où

$$\forall x \in U, \Delta f(x) = 0 \text{ et } \Delta(f^2)(x) = 0$$

Ainsi  $f$  et  $f^2$  sont harmoniques sur  $U$

**Conclusion :** Si  $U$  est connexe par arcs,

les fonctions  $f$  de  $\mathcal{H}(U)$  telles que  $f^2$  appartienne aussi à  $\mathcal{H}(U)$  sont les fonctions constantes

**Q 4.** Comme  $U$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ , ceci nous fournit  $a = (a_1, \dots, a_n)$  et  $r > 0$  tels que  $D(a, r) \subset U$ . Ainsi pour tout  $t \in ]a_1 - r, a_1 + r[$  (ensemble infini), on a  $(t, a_2, \dots, a_n) \in U$

ainsi la fonction  $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \in U \mapsto x_1 \in \mathbb{R}$  est clairement harmonique sur  $U$  sans y être constante

De plus  $\forall x \in U, \Delta(\varphi^2)(x) = 2 \neq 0$  donc  $\varphi^2 = \varphi \times \varphi$  n'est pas harmonique sur  $U$

Le produit de deux fonctions harmoniques n'est pas une fonction harmonique, en général

## II Exemples de fonctions harmoniques

### II.A -

**Q 5.** Remarque : on a  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  par produit car  $(x, y) \mapsto u(x)$  et  $(x, y) \mapsto v(y)$  le sont

On a  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $0 = \Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y)$ .

Comme  $v$  est non identiquement nulle, ceci nous fournit  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $v(t) \neq 0$ .

En posant  $\lambda = \frac{v''(t)}{v(t)}$ , on a alors  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $u''(x) + \lambda u(x) = 0$

donc  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $0 = \Delta f(x, y) = -\lambda u(x)v(y) + u(x)v''(y) = (v''(y) - \lambda v(y))u(x)$

En prenant  $t' \in \mathbb{R}$  tel que  $u(t') \neq 0$ , on a  $\forall y \in \mathbb{R}$ ,  $0 = v''(y) - \lambda v(y)$  Ainsi

il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $u$  et  $v$  soient solutions respectives des équations  $z'' + \lambda z = 0$  et  $z'' - \lambda z = 0$

**Q 6.** Je note les équations différentielles  $E_1 : z'' + \lambda z = 0$  et  $E_2 : z'' - \lambda z = 0$

**Si  $\lambda = 0$**  Les solutions de  $E_1$  (ou  $E_2$ ) sont les fonctions de la forme  $x \mapsto Ax + B$  avec  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$

**Si  $\lambda > 0$**  Les solutions de  $E_1$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto A \cos(t\sqrt{\lambda}) + B \sin(t\sqrt{\lambda})$  avec  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$

Les solutions de  $E_2$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto A' \operatorname{ch}(t\sqrt{\lambda}) + B' \operatorname{sh}(t\sqrt{\lambda})$  avec  $A'$  et  $B' \in \mathbb{R}$

**Si  $\lambda < 0$**  Les solutions de  $E_2$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto A \cos(t\sqrt{-\lambda}) + B \sin(t\sqrt{-\lambda})$  avec  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$

Les solutions de  $E_1$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto A' \operatorname{ch}(t\sqrt{-\lambda}) + B' \operatorname{sh}(t\sqrt{-\lambda})$  avec  $A'$  et  $B' \in \mathbb{R}$

**Réciproquement :** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u$  et  $v$  solutions non nulles respectives de  $E_1 : z'' + \lambda z = 0$  et  $E_2 : z'' - \lambda z = 0$ .

Alors  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et ainsi  $f : (x, y) \mapsto u(x)v(y)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Et on a :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = \lambda u(x)v(y) - \lambda u(x)v(y) = 0$

donc  $f$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^2$

**Conclusion :** Les équations différentielles étant linéaire homogène d'ordre 2 leur solutions forment un plan vectoriel.

Une fonction  $f$  à variables séparables sur  $\mathbb{R}^2$  est harmonique non nulles si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(A, B)$  et  $(A', B') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tels que

si  $\lambda = 0$  alors  $f : (x, y) \mapsto (Ax + B)(A'y + B')$

si  $\lambda > 0$  alors  $f : (x, y) \mapsto \left( A \cos(x\sqrt{\lambda}) + B \sin(x\sqrt{\lambda}) \right) \left( A' \operatorname{ch}(y\sqrt{\lambda}) + B' \operatorname{sh}(y\sqrt{\lambda}) \right)$

si  $\lambda < 0$  alors  $f : (x, y) \mapsto \left( A \operatorname{ch}(x\sqrt{-\lambda}) + B \operatorname{sh}(x\sqrt{-\lambda}) \right) \left( A' \cos(y\sqrt{-\lambda}) + B' \sin(y\sqrt{-\lambda}) \right)$

### II.B -

**Q 7.** Les fonctions  $(r, \theta) \mapsto r \cos(\theta)$  et  $(r, \theta) \mapsto r \sin(\theta)$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$  par produits

donc la fonction  $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$  par composantes

de plus cette fonction est à valeurs dans l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  où  $f$  y est de classe  $\mathcal{C}^2$

donc par composition  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$

**Q 8.** On utilise la formule de la chaîne dont l'écriture abusive est :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ainsi  $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

et  $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

**Q 9.** On continue à appliquer la formule de la chaîne avec une écriture abusive en servant du calcul ci-dessus :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos(\theta) \left( \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + \sin(\theta) \left( \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

puis à l'aide du théorème de Schwarz avec  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  : on a successivement

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) = \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin(2\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} - r \sin(\theta) \left( -r \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + r \cos(\theta) \left( -r \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + r \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

puis à l'aide du théorème de Schwarz avec  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) &= -r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \\ &r^2 \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - r^2 \sin(2\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + r^2 \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

**Q 10.** Soit  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ , on a à l'aide des calculs précédents :

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \right)$$

On suppose que pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ ,  $r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$

avec ce qui précède :

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \Delta f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = 0$$

Or pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , en prenant  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

on a  $r > 0$  et il existe  $\theta \in \mathbb{R}$ , tel que  $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

et ainsi  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $\Delta f(x, y) = 0$  d'où  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$

La réciproque est immédiate. Ainsi on a bien :

$$f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \text{ si et seulement si, pour tout } (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$$

**Q 11. Analyse :** On considère  $f$  une fonction harmoniques radiales de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . On note  $g$  comme ci dessus.

On peut alors trouver  $h$  fonction définie sur  $]0, +\infty[$  telle que  $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ ,  $g(r, \theta) = h(r)$

Comme  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$  alors  $h$  l'est sur  $]0, +\infty[$  et

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) = 0 \text{ et } \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = h'(r) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) = h''(r)$$

La question précédente donne alors :  $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ ,  $r^2 h''(r) + r h'(r) = 0$

donc  $h'$  est solution sur  $]0, +\infty[$  de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :  $tz' + z = 0$

Une solution évidente est  $t \mapsto 1/t$  ce qui nous fournit  $A \in \mathbb{R}$  tel que  $h' : r \mapsto A/r$

Ce qui nous fournit  $B \in \mathbb{R}$  tel que  $h : r \mapsto A \ln(r) + B$

donc  $g : (r, \theta) \mapsto A \ln(r) + B$  puis  $f : (x, y) \mapsto A \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + B$

**Synthèse :** On suppose qu'il existe  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$  tels que  $f : (x, y) \mapsto A \ln(x^2 + y^2) + B$

alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et radiale car

la fonction  $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = 2A \ln(r) + B$  est indépendante de  $\theta$

et on vérifie facilement que  $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ ,  $r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 0$

donc  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  d'après Q10.

les fonctions harmoniques radiales de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  sont les fonctions :  $(x, y) \mapsto A \ln(x^2 + y^2) + B$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$

**Q 12.** En me servant de la question précédente, on cherche  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$  tels que 
$$\begin{cases} 2A \ln(r_1) + B = a \\ 2A \ln(r_2) + B = b \end{cases}$$

On remarque que  $A = \frac{b-a}{2(\ln(r_2) - \ln(r_1))}$  et  $B = \frac{\ln(r_2)a - \ln(r_1)b}{\ln(r_2) - \ln(r_1)}$  conviennent

Alors d'après Q11, en prenant

$$f : (x, y) \mapsto \frac{(b-a) \ln(x^2 + y^2) + 2 \ln(r_2)a - 2 \ln(r_1)b}{2(\ln(r_2) - \ln(r_1))} \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \text{ on a } \begin{cases} f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R}) \\ \Delta f = 0 \\ f(x, y) = a \text{ si } \|(x, y)\| = r_1 \\ f(x, y) = b \text{ si } \|(x, y)\| = r_2 \end{cases}$$

**II.C -**

**Q 13.** On suppose que  $f$  n'est pas identiquement nulle. Ceci nous fournit  $r_0 = \|(x_0 + y_0)\|$  tel que  $u(r_0) \neq 0$   
Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  On a  $u(r_0)v(\theta + 2\pi) = f(r \cos(\theta + 2\pi), r \sin(\theta + 2\pi)) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = u(r_0)v(\theta)$   
d'où  $v(\theta + 2\pi) = v(\theta)$

ainsi si  $f$  n'est pas identiquement nulle, alors  $v$  est  $2\pi$ -périodique

**Q 14.** On suppose que  $f$  est harmonique et non identiquement nulle sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

On note  $g$  comme en II.B. Alors  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$  et

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) = u(r)v''(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = u'(r)v(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) = u''(r)v(\theta)$$

En utilisant Q10 : on a  $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \quad r^2 u''(r)v(\theta) + u(r)v''(\theta) + ru'(r)v(\theta) = 0$

Comme  $f$  est non identiquement nulle, il existe  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $v(\theta_0) \neq 0$ . En prenant  $\lambda = \frac{-v''(\theta_0)}{v(\theta_0)}$ , alors

$$\text{u est solution de l'équation différentielle (II.1) : } r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = 0$$

On choisit  $r_0 > 0$  tel que  $u(r_0) \neq 0$ , on a alors

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad v''(\theta) + \frac{r_0^2 u''(r_0) + r_0 u'(r_0)}{u(r_0)} v(\theta) = 0$$

comme  $u$  est solution de l'équation différentielle (II.1), on a :  $\frac{r_0^2 u''(r_0) + r_0 u'(r_0)}{u(r_0)} = \lambda$

ainsi  $v$  est solution de l'équation différentielle (II.2) :  $z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0$

**II.C.1)** On suppose ici que  $\lambda = 0$ .

**Q 15.** Les solutions de (II.2) sont les fonctions affines.

Les solutions  $2\pi$ -périodiques de (II.2) sont les fonctions constantes

**Q 16.** En faisant comme en Q11. :

Les solutions de (II.1) sur  $\mathbb{R}^{*+}$  sont les fonctions de la forme  $r \mapsto A \ln(r) + B$

**Q 17.** D'après Q15. dans le cas où  $\lambda = 0$ , les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont radiales.

Il est clair que toutes fonctions radiale sur  $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$  est à variables polaires séparable. Alors d'après Q11.,

les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont les fonctions :  $(x, y) \mapsto A \ln(x^2 + y^2) + B$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$

**II.C.2)** On suppose désormais  $\lambda \neq 0$ .

**Q 18. Analyse :** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel qu'il existe  $v$  solution non nulles  $2\pi$ -périodiques de (II.2) :  $z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0$

Par l'absurde si  $\lambda < 0$ , comme en Q6 on peut écrire  $v : \theta \mapsto Ae^{\theta\sqrt{-\lambda}} + Be^{-\theta\sqrt{-\lambda}}$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$

Si  $A \neq 0$ , alors  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} |v(\theta)| = +\infty$

Si  $A = 0$ , alors  $B \neq 0$  et  $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} |v(\theta)| = +\infty$

Or  $v(\mathbb{R}) = v([0, 2\pi])$  car  $v$  est  $2\pi$ -périodique et d'après le théorème des bornes atteintes  $v$  est bornée sur le segment  $[0, 2\pi]$  car  $v$  y est continue

d'où  $v$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  ce qui est en contradiction avec les limites

d'où  $\lambda > 0$

comme en Q6 on peut écrire  $v : \theta \mapsto A \cos(\theta\sqrt{\lambda}) + B \sin(\theta\sqrt{\lambda})$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$

ou encore, d'après le cours,  $v : \theta \mapsto \rho \cos(\theta\sqrt{\lambda} + \varphi)$  avec  $\varphi \in \mathbb{R}$  et  $\rho = \sqrt{A^2 + B^2} > 0$  car  $v$  non nulle

Comme  $v\left(\frac{-\varphi}{\sqrt{\lambda}}\right) = v\left(\frac{-\varphi}{\sqrt{\lambda}} + 2\pi\right)$  et  $\rho \neq 0$ , on en déduit que  $1 = \cos(2\pi\sqrt{\lambda})$

ce qui nous fournit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $2\pi\sqrt{\lambda} = k2\pi$  donc  $\lambda = k^2$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Autre méthode pour conclure l'analyse : En pensant à la formule «  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  », on peut également affirmer que le groupe des périodes de  $\theta \mapsto \cos(\theta\sqrt{\lambda} + \varphi)$  est  $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\mathbb{Z}$ . Puis utiliser que  $2\pi \in \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\mathbb{Z} \dots$

**Synthèse :** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Prenons  $\lambda = k^2$ . Alors  $\lambda > 0$  et  $\sqrt{\lambda} = k$

Les solutions de (II.2) sont les fonctions  $\theta \mapsto A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$  avec  $A, B \in \mathbb{R}$

Elles sont toutes  $2\pi/k$  périodiques donc  $2\pi$  périodiques

En prenant  $(A, B) = (1, 0)$ , on a une solution non nulle.

**Conclusion :**

Pour que (II.2) admette des solutions  $2\pi$ -périodiques non nulles, il faut et il suffit qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\lambda = k^2$

Dans ce cas,

les solutions non nulles  $2\pi$ -périodiques de (II.2) sont les  $\theta \mapsto A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$  avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

**Q 19.** Soit  $z$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . On pose  $Z : t \mapsto z(e^t)$ .

Alors par composition  $Z$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et on a  $\forall r > 0, z(r) = Z(\ln(r))$ .

Réciproquement si  $Z$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  alors  $z : r \mapsto Z(\ln(r))$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$

Pour  $r > 0$ , on a  $z(r) = Z(\ln(r))$  et  $z'(r) = \frac{Z'(\ln(r))}{r}$  et aussi  $z''(r) = \frac{Z''(\ln(r)) - Z'(\ln(r))}{r^2}$

Ainsi  $r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = Z''(\ln(r)) - \lambda Z(\ln(r))$

Comme  $\ln$  est bijective de  $\mathbb{R}^{+*}$  vers  $\mathbb{R}$ .

$z$  est solution de (II.1) si et seulement si  $\forall t \in \mathbb{R}, Z''(t) - \lambda Z(t) = 0$

On a déjà vu cette équation en  $w : w'' - \lambda w = 0$  (II.1b)

Grâce à la remarque sur la classe  $\mathcal{C}^2$ , en début de question, on a une bijection ( qui à  $z$  associe  $Z$ ) entre les ensembles des solutions de (II.1) et de (II.1b)

Si  $\lambda > 0$ , les solutions de (II.1), sont les fonctions  $r \mapsto A \exp(\ln(r)\sqrt{\lambda}) + B \exp(-\ln(r)\sqrt{\lambda})$  avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Si  $\lambda < 0$ , les solutions de (II.1), sont les fonctions  $r \mapsto A \cos(\ln(r)\sqrt{-\lambda}) + B \sin(-\ln(r)\sqrt{-\lambda})$  avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

**Q 20. Analyse :** On suppose que  $f$  est harmonique à variables polaires séparables non identiquement nulles qui se prolongeant par continuité en 0. Alors d'après les questions précédentes, on peut trouver  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $(A, B) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $(A', B') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tels que

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = (A' \exp(\ln(r)k) + B' \exp(-\ln(r)k)) \times (A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta))$$

Je note  $v : \theta \mapsto A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$  donc  $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = (A'r^k + B'r^{-k}) v(\theta)$

Il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $v(\alpha) \neq 0$

Comme il existe  $\ell \in \mathbb{R}$ , tel que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell$  alors  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \ell$

donc  $r \mapsto A'r^k + B'r^{-k}$  admet une limite finie en 0 donc  $B' = 0$

**Synthèse** On suppose qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$ , A et B dans  $\mathbb{R}$  tel que

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r^k (A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta))$$

Remarque : j'ai rajouté la fonction nulle

Alors  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  à variables polaires séparables de plus  $f$  est alors de classe  $\mathcal{C}^2$  d'après l'énoncé (II.C) car  $u : r \mapsto r^k$  est  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et  $v : \theta \mapsto A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$  est  $2\pi$ -périodique et  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$

On définit  $g$  comme en II.B. Pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$  :

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) = k(k-1)g(r, \theta) \quad \text{et} \quad r \frac{\partial^2 g}{\partial r}(r, \theta) = kg(r, \theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) = -k^2 g(r, \theta)$$

donc  $r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + r \frac{\partial^2 g}{\partial r}(r, \theta) = 0$  d'où  $f$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  d'après Q10.

De plus  $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, |f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))| \leq (|A| + |B|) r^k$

donc  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x, y)| \leq (|A| + |B|) (x^2 + y^2)^{k/2}$

or  $(x^2 + y^2)^{k/2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$  donc  $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$

Ainsi  $f$  se prolonge par continuité en 0

Les fonctions harmoniques sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  à variables polaires séparables qui se prolongent par continuité en  $(0, 0)$  sont les fonctions  $f$  vérifiant

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r^k (A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta))$$

avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$  et  $k \in \mathbb{N}^*$

### III Principe du maximum faible

#### III.A -

**Q 21.** Comme U est bornée, ceci nous fournit  $R > 0$  tel que  $U \subset \overline{D(0, R)}$

donc comme  $\overline{D(0, R)}$  est fermé alors  $\overline{U} \subset \overline{D(0, R)}$

donc  $\overline{U}$  est borné et c'est un fermé de  $\mathbb{R}^n$  qui est un espace de dimension finie

d'où  $\overline{U}$  est un compact non vide de  $\mathbb{R}^n$  or  $f$  y est continue

Ainsi  $f$  admet un maximum en un point  $x_0 \in \overline{U}$

**Q 22.** Par l'absurde on suppose que  $x_0 \notin \partial U$  d'où  $x_0 \in \bar{U} \setminus \partial U$   
 or  $\partial U = \bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$  où  $\overset{\circ}{U}$  est l'intérieur de  $U$  et  $\overset{\circ}{U} = U$  car  $U$  est un ouvert  
 d'où  $x_0 \in U$  ce qui nous fournit  $r > 0$  tel que  $D(x_0, r) \subset U$

On a donc :  $0 < \Delta f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0)$ . Ce qui nous fournit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$

Comme  $f$  qui est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et  $y$  admet un maximum en  $x_0$ , on a  $\nabla f(x_0) = 0$  donc  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$

Je note  $\varphi : t \mapsto f(x_0 + te_i)$ , où  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$

alors  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $] -r, r[$  par composition. De plus  $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$  et  $\varphi''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0) > 0$

donc selon Taylor-Young, on a  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \varphi(0) + \frac{\varphi''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$  puis

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi''(0) > 0$$

ceci nous fournit  $\alpha \in ]0, r[$ , tel que

$$\forall t \in ] -\alpha, \alpha[ \setminus \{0\}, \varphi(t) > \varphi(0)$$

Absurde car  $\varphi$  admet un maximum en 0 car  $f$  admet sur  $U$  un maximum en  $x_0$

Donc  $\boxed{x_0 \in \partial U}$

Comme  $\partial U \subset \bar{U}$  donc  $f(x_0) = \sup_{y \in \bar{U}} f(y) \geq \sup_{y \in \partial U} f(y)$  d'où

$$\forall x \in U, f(x) \leq \sup_{y \in \bar{U}} f(y) = \sup_{y \in \partial U} f(y)$$

À l'aide de ce qui est fait ci-dessus on a :  $\forall x \in U, f(x) \neq \sup_{y \in \partial U} f(y)$  car  $U = \bar{U} \setminus \partial U$ .

On en déduit que  $\boxed{\forall x \in U, f(x) < \sup_{y \in \partial U} f(y)}$

### III.B -

**Q 23.** La fonction  $\psi : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$

donc  $\psi$  est continue sur  $\bar{U}$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$

De plus  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \Delta \psi(x) = 2n > 0$  Par somme et par linéarité de  $\Delta$ , on a :

$\boxed{g_\varepsilon \text{ est continue sur } \bar{U}, \text{ de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U, \text{ et telle que } \forall x \in U, \Delta g_\varepsilon(x) > 0}$

**Q 24.** Soit  $x \in U$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On utilise **Q22** avec la fonction  $g_\varepsilon$  qui en vérifie les hypothèses selon **Q23** :

$$g_\varepsilon(x) < \sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y) \quad (1)$$

Comme  $\bar{U}$  est compact (**Q21**), il en est de même pour  $\partial U$  car c'est un fermé inclus dans  $\partial U$  et ceci nous fournit l'existence de  $\sup_{z \in \partial U} f(z)$  et de  $R > 0$ , tel que  $\forall y \in \partial U, 0 \leq \|y\| \leq R$  donc

$$\forall y \in \partial U, g_\varepsilon(y) = f(y) + \|y\|^2 \varepsilon \leq f(y) + R^2 \varepsilon \leq \sup_{z \in \partial U} f(z) + R^2 \varepsilon \quad (\text{majorant indépendant de } y)$$

d'où  $\sup_{y \in \partial U} g_\varepsilon(y) \leq \sup_{z \in \partial U} f(z) + R^2 \varepsilon$  et ainsi (1) devient :

$$f(x) \leq \sup_{z \in \partial U} f(z) + (R^2 - \|x\|^2) \varepsilon \leq \sup_{y \in \partial U} f(y) + R^2 \varepsilon \quad (\text{majorant indépendant de } x)$$

En passant à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 : on a  $\boxed{\forall x \in U, f(x) \leq \sup_{y \in \partial U} f(y)}$   $f$  atteint ses bornes sur la frontière.

**Q 25.** On suppose que  $f_1$  et  $f_2$  sont égales sur  $\partial U$  alors  $f = f_1 - f_2$ , les hypothèses de Q24 et  $\forall y \in \partial U, f(y) = 0$  donc  $\forall x \in U, f_1(x) - f_2(x) = f(x) \leq 0 = \sup_{y \in \partial U} f(y)$

En faisant de même avec  $f_2 - f_1$ , on a  $\forall x \in U, f_1(x) - f_2(x) \geq 0$  d'où  $\forall x \in U, f_1(x) = f_2(x)$

Si les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont égales sur  $\partial U$ , alors  $f_1$  et  $f_2$  sont égales sur  $U$

## IV Fonctions harmoniques et fonctions développables en série entière

### IV.A -

**Q 26.** On a pour tout  $z \in D(0, R)$ , la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

donc la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  a un rayon de convergence supérieur ou égale à  $R$

Ainsi la fonction  $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est continue sur  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$

or la fonction  $(x, y) \mapsto x + iy$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  car linéaire en dimension finie

On a montré que, par composition,

si une fonction se développe en série entière sur  $D(0, R)$  où  $R > 0$  alors elle y est continue (1).

D'après le cours la série entière  $\sum_{n \geq 0} n a_n z^{n-1}$  a également un rayon  $\geq R$

donc pour tout  $r \in ]0, R[$ , la série entière  $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$  converge normalement sur  $D(0, r)$  (2)

Soit  $y \in ]-R, R[$ . Je note  $u_n : x \mapsto a_n (x + iy)^n$  définie sur  $I_y = ]-\sqrt{R - y^2}, \sqrt{R - y^2}[$  de sorte que  $I_y \times \{y\} \subset D(0, r)$

(i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I_y$ .

De plus,  $u'_n : x \mapsto n a_n (x + iy)^{n-1}$  pour  $n > 0$  et  $u'_0$  est la fonction nulle.

(ii) la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge simplement sur  $I_y$  d'après l'énoncé

(iii) Soit  $\rho \in ]0, \sqrt{R^2 - y^2}[$ . On a  $\forall x \in [-\rho, \rho], |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{\rho^2 + y^2} < R$ .

Je note  $r = \sqrt{\rho^2 + y^2}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\forall x \in [-\rho, \rho], |u'_n(x)| = |n a_n (x + iy)^{n-1}| \leq n |a_n| r^{n-1} \leq n |a_n| r^n$  et  $r \in [0, R[$ .

Ainsi d'après (2), la série  $\sum_{n \geq 0} u'_n$  converge normalement sur  $[-\rho, \rho]$ .

donc la série  $\sum_{n \geq 0} u'_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I_y$

Par théorème avec (i), (ii) et (iii), on a  $x \mapsto f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I_y$

Comme  $D(0, R) = \bigcup_{z \in ]-R, R[} (I_z \times \{z\})$  la fonction  $\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x + iy)^{n-1}$  est définie sur  $D(0, R)$

comme la série entière  $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$  a un rayon  $\geq R$  alors  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue sur  $D(0, R)$  d'après (1)

et de même  $\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n i (x + iy)^{n-1}$  est continue sur  $D(0, R)$

donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D(0, R)$  et ses dérivées partielles se développent en série entière sur  $D(0, R)$

Ainsi la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D(0, R)$  par récurrence immédiate

**Q 27.** On travaille dans  $\mathbb{C}$  plan vectoriel sur le corps  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(x, y) \in D(0, \mathbb{R})$ . En appliquant les calculs de la question précédente :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-1} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, y) = -\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x+iy)^{n-1}$$

donc  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$  En prenant parties réelles, et imaginaire, on a :

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \text{ et } \Delta v(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

d'où  $u$  et  $v$  sont harmoniques sur  $D(0, \mathbb{R})$

**IV.B -**

**Q 28.** On suppose  $f$  ne s'annule pas sur  $D(0, \mathbb{R})$ . Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D(0, \mathbb{R})$ , alors  $1/f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D(0, \mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . (1)

$f$  se développe en série entière sur  $D(0, \mathbb{R})$

donc  $\forall (x, y) \in D(0, \mathbb{R})$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  d'après la propriété admise

$$\text{or } \frac{\partial(1/f)}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{f^2(x, y)} \text{ et } \frac{\partial(1/f)}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{f^2(x, y)}$$

ainsi  $\forall (x, y) \in D(0, \mathbb{R})$ ,  $\frac{\partial(1/f)}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial(1/f)}{\partial x}(x, y)$  (2)

En utilisant la réciproque de la propriété admise :  $1/f$  se développe en série entière sur  $D(0, \mathbb{R})$

**Q 29.** Soit  $(x, y) \in D(0, \mathbb{R})$ .

On a :  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  selon la propriété admise.

En prenant partie réelle et imaginaire on a :  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$

De plus en utilisant la dérivation de produits, on a :

$$\Delta(uv)(x, y) = (v(x, y)\Delta u(x, y)) + (u(x, y)\Delta v(x, y)) + 2\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) + 2\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

donc comme  $u$  et  $v$  sont harmoniques sur  $D(0, \mathbb{R})$  et avec les formules ci-dessus :

$$\Delta(uv)(x, y) = 0 + 0 + 2\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) - 2\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0$$

Ainsi  $uv$  est harmonique sur  $D(0, \mathbb{R})$

**IV.C -**

**Q 30.** Comme  $g$  est harmonique sur  $D(0, \mathbb{R})$  alors  $g$  y est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Donc  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D(0, \mathbb{R})$  (1)

Soit  $(x, y) \in D(0, \mathbb{R})$ .

On a  $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) - i \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y)$  et  $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) - i \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y)$

donc selon le théorème de Schwarz car  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et comme  $g$  est harmonique : on a

$$i \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = -i \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \quad (2)$$

En utilisant la propriété admise, (1) et (2) donne :  $h$  se développe en série entière sur  $D(0, \mathbb{R})$

**Q 31.** On suppose que  $g$  appartient à  $\mathcal{H}(D(0, R))$ .

On définit la fonction  $h$  comme en Q30. et ainsi  $h$  se développe en série entière sur  $D(0, R)$

On peut donc trouver une suite complexe  $(b_n)$  telle que  $\forall (x, y) \in D(0, R)$ ,  $h(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x + iy)^n$

Ainsi la série entière  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  a un rayon  $\geq R$  donc il en est de même pour la série entière  $g(0, 0) + \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n+1} z^{n+1}$

Ainsi la fonction  $H : (x, y) \mapsto g(0, 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n+1} (x + iy)^{n+1}$  est définie sur  $D(0, R)$

donc d'après Q26.,  $H$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D(0, R)$  et

$$\frac{\partial H}{\partial x} : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x + iy)^n = h(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial y} : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n i (x + iy)^n = ih(x, y)$$

Ainsi  $\frac{\partial \operatorname{Re}(H)}{\partial x} : (x, y) \mapsto \operatorname{Re}(h)(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial \operatorname{Re}(H)}{\partial y} : (x, y) \mapsto -\operatorname{Im}(h)(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$

donc la fonction  $g - \operatorname{Re}(H)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D(0, R)$  de différentielle nulle

or  $D(0, R)$  est connexe par arcs donc  $g - \operatorname{Re}(H)$  est constante or  $g - \operatorname{Re}(H)$  est nulle en  $(0, 0)$

donc  $g = \operatorname{Re}(H)$  sur  $D(0, R)$  et  $H$  y est développable en série entière.

il existe bien une fonction  $H$  se développant en série entière sur  $D(0, R)$ , telle que  $g$  est la partie réelle de  $H$

#### IV.D -

**Q 32.** Comme  $f$  est développable en série entière sur  $D(0, R)$ , ceci nous fournit une suite complexe  $(a_n)$  telle que

$$\forall (x, y) \in D(0, R), f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n.$$

Soit  $r \in [0, R[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $u_n : t \mapsto a_n (r \cos(t) + ir \sin(t))^n = a_n r^n e^{int}$

(i) Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est continue sur  $[0, 2\pi]$

(ii) Comme la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge normalement sur tout compact de  $D(0, R)$ , on peut montrer

comme en Q26., que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge uniformément sur  $[0, 2\pi]$

Ainsi par théorème on peut intervertir série et intégrale :  $\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(t) dt$

or  $\forall t \in [0, 2\pi]$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = f(r \cos(t), r \sin(t))$

et pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\int_0^{2\pi} u_n(t) dt = a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{int} dt$

si  $n = 0$ , alors  $\int_0^{2\pi} u_n(t) dt = 2\pi a_0$

et sinon  $\int_0^{2\pi} u_n(t) dt = \left[ \frac{e^{int}}{ni} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1-1}{ni} = 0$

donc  $\int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt = 2\pi a_0$  or  $f(0) = a_0$

ainsi pour tout  $r \in [0, R[$ , on a  $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt$

**Q 33.** Soit  $g$  une fonction harmonique sur  $D(0, R)$  et  $r \in [0, R[$ . On a  $g(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos(t), r \sin(t)) dt$

on peut écrire  $g = \text{Re}(H)$  où  $H$  est développable en série entière

alors d'après la question précédente, on a  $H(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(r \cos(t), r \sin(t)) dt$

On peut alors conclure en prenant la partie réelle de cette égalité.

**Q 34.** Soit  $r \in [0, R[$ , on a  $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos(t), r \sin(t)) dt$  d'après Q32.

La fonction  $t \mapsto f(r \cos(t), r \sin(t))$  est continue sur le segment  $[0, 2\pi]$  donc bornée selon le théorème des bornes atteintes et elle aussi  $2\pi$  périodique.

En utilisant l'inégalité de la moyenne (inégalité triangulaire continue), on a :

$$|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r \cos(t), r \sin(t))| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(r \cos(t), r \sin(t))| du$$

donc  $\forall r \in [0, R[, |f(0)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(r \cos(t), r \sin(t))|$

**Q 35.** On utilise Q33. et on fait comme en Q34. pour obtenir :

Soit  $g$  une fonction harmonique sur  $D(0, R)$  et  $r \in [0, R[$ . On a  $|g(0, 0)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(r \cos(t), r \sin(t))|$

**Q 36.** On suppose que  $|f|$  admet un maximum en 0.

**Si  $f(0, 0) = 0$  alors**  $f$  est identiquement nulle et donc constante sur  $D(0, R)$

**Si  $f(0, 0) = 1$  alors**  $\forall (x, y) \in D(0, R), |f(x, y)| \leq 1$ .

Je note  $u$  et  $v$  respectivement les parties réelle et imaginaire de  $f$ .

Ainsi  $u(0, 0) = 1$  et  $v(0, 0) = 0$

De plus  $\forall (x, y) \in D(0, R), |u(x, y)| \leq |f(x, y)| \leq 1$  d'où  $\forall (x, y) \in D(0, R), u(x, y) \leq 1$

D'après Q27.,  $u$  et  $v$  sont harmoniques sur  $D(0, R)$

donc selon Q33., pour  $r \in [0, R[$ , on a  $u(0) = 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos(t), r \sin(t)) dt$  donc

$$\int_0^{2\pi} (1 - u(r \cos(t), r \sin(t))) dt = 0 \text{ et la fonction } t \mapsto 1 - u(r \cos(t), r \sin(t)) \text{ est continue et positive sur } [0, 2\pi]$$

d'où  $\forall r \in [0, R[, \forall t \in [0, 2\pi], u(r \cos(t), r \sin(t)) = 1$

comme  $D(0, R) = \{(r \cos(t), r \sin(t)) \mid r \in [0, R[, t \in [0, 2\pi]\}$ ,

alors  $\forall (x, y) \in D(0, R), u(x, y) = 1$  et  $|u(x, y) + iv(x, y)| \leq 1$

donc  $\forall (x, y) \in D(0, R), v(x, y) = 0$  et ainsi  $\forall (x, y) \in D(0, R), f(x, y) = 1$

**Si  $f(0, 0) \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  alors** je note  $\tilde{f} = \frac{1}{f(0, 0)} f$

De sorte que  $\tilde{f}$  est développable en série entière sur  $D(0, R)$ ,  $\tilde{f}(0, 0) = 1$  et  $|\tilde{f}|$  admet un maximum en 0

En utilisant le cas précédent, on a :  $\forall (x, y) \in D(0, R), \tilde{f}(x, y) = 1$

et donc  $\forall (x, y) \in D(0, R), f(x, y) = f(0, 0)$

On a montré que si  $|f|$  admet un maximum en 0, alors  $f$  est constante sur  $D(0, R)$

**Q 37.** Par l'absurde, on suppose que  $P$  est un polynôme complexe non constant sans racine dans  $\mathbb{C}$ .

Donc  $\deg P > 0$  et on peut écrire  $P = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha_n \in \mathbb{C}^*$  et  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$

Pour  $z \neq 0$ , on a  $|P(z)| \geq |\alpha_n| \cdot |z|^n \cdot \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{\alpha_i}{\alpha_n z^{n-i}} \right| \right)$  donc  $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$

Ceci nous fournit  $\rho > 0$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \geq \rho \implies |P(z)| \geq |P(0)|$

La fonction  $z \mapsto |P(z)|$  est continue sur le compact  $\overline{D(0, \rho)}$

Ce qui nous fournit  $z_0 \in \overline{D(0, \rho)}$  tel que  $\forall z \in \overline{D(0, \rho)}$ ,  $|P(z)| \geq |P(z_0)|$

Ainsi  $|P(0)| \geq |P(z_0)|$  et donc  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \geq \rho \implies |P(z)| \geq |P(z_0)|$

Ainsi  $z \mapsto |P(z)|$  admet un minimum sur  $\mathbb{C}$  atteint en  $z_0$

Je pose  $Q = P(X + z_0)$  alors  $Q$  est un polynôme non constant qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{C}$  et  $z \mapsto |Q(z)|$  admet un minimum sur  $\mathbb{C}$  atteint en 0

donc la fonction  $(x, y) \mapsto Q(x + iy)$  est une fonction non constante qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{C}$  telle que  $(x, y) \mapsto |Q(x + iy)|$  admet un minimum en  $(0, 0)$

Prenons  $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $Q(x_1 + iy_1) \neq Q(0)$ .

Je note alors  $R = \|(x_1, y_1)\| + 1$ , de sorte que  $(x, y) \mapsto Q(x + iy)$  est une fonction non constante sur  $D(0, R)$  et  $(x, y) \mapsto |Q(x + iy)|$  y admet un minimum en  $(0, 0)$

de plus  $(x, y) \mapsto Q(x + iy)$  est développable en série entière sur  $D(0, R)$  car  $Q$  est un polynôme

Selon Q28., comme  $Q$  n'a pas de racine :

la fonction  $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{Q(x + iy)}$  est développable en série entière sur  $D(0, R)$

De plus  $|f|$  admet un maximum en 0, donc  $f$  est constante sur  $D(0, R)$

d'où  $Q(x_1 + iy_1) = \frac{1}{f(x_1, y_1)} = \frac{1}{f(0, 0)} = Q(0)$  Absurde

d'où le théorème de D'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine

## V Résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$

**Q 38.** Soit  $|z| < 1$ . On a  $\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{2e^{it} - (e^{it} - z)}{e^{it} - z} = -1 + \frac{2}{1 - ze^{-it}}$  or  $|ze^{-it}| < 1$

donc par somme géométrique :  $\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = -1 + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} z^k e^{-kit}$

Ainsi on a le développement en série entière pour  $|z| < 1$ ,  $\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = -1 + \sum_{k=0}^{+\infty} 2z^k e^{-kit}$

Soit  $|z| < 1$ , je pose  $F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt$

ce qui est possible car  $t \mapsto h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$  est continue sur  $[0, 2\pi]$

La fonction  $h$  est bornée sur le segment  $[0, 2\pi]$  car  $h$  y est continue.

Ce qui nous fournit  $M > 0$  tel que  $\forall t \in [0, 2\pi], |h(t)| \leq M$

Je pose  $u_0 = h$  et pour  $n \geq 1$ ,  $u_n : t \mapsto 2e^{-nit} z^n h(t)$

(i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est continue sur  $[0, 2\pi]$

(ii) On a  $\forall t \in [0, 2\pi], |u_0(t)| \leq M$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 2\pi], |u_n(t)| \leq 2M|z|^n$$

or la série  $M + \sum_{n \geq 1} 2M|z|^n$  converge

donc la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge normalement donc uniformément sur  $[0, 2\pi]$

La somme de cette série de fonctions sur  $[0, 2\pi]$  est  $t \mapsto h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}$

Avec (i) et (ii), par théorème de cours, on a

$$2\pi F(z) = \int_0^{2\pi} h(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(t) dt = \int_0^{2\pi} h(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^{2\pi} e^{-nit} h(t) dt \right) z^n$$

Ainsi  $F$  est la somme d'une série entière de rayon  $\geq 1$

donc la fonction  $(x, y) \mapsto F(x + iy)$  est développable en série entière sur  $D(0, 1)$

or  $g = \operatorname{Re}(F)$  donc d'après Q27, la fonction  $(x, y) \mapsto g(x + iy)$  est une fonction harmonique sur  $D(0, 1)$

**Q 39.** Soit  $|z| < 1$ .

On applique le calcul précédent avec la fonction  $h$  constante égale à 1 qui est bien continue  $2\pi$ -périodique :

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^{2\pi} e^{-nit} dt \right) z^n = 2\pi$$

car pour  $k \in \mathbb{Z}^*$ , on a  $\int_0^{2\pi} e^{kit} dt = \left[ \frac{e^{kit}}{ki} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1 - 1}{ki} = 0$

en en prenant la partie réelle :  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t, z) dt = 1$

**Q 40.** Soit  $|z| < 1$ .

La fonction  $t \mapsto h(t)\mathcal{P}(t, z)$  est continue et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$

La fonction  $\psi : \alpha \mapsto \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t, z) dt$  est alors de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  par le théorème fondamental de l'analyse de dérivée :

$$\psi' : \alpha \mapsto h(\alpha + 2\pi)\mathcal{P}(\alpha + 2\pi, z) - h(\alpha)\mathcal{P}(\alpha, z) = 0$$

donc  $\psi$  est constante sur  $\mathbb{R}$  d'où  $\psi(0) = \psi(\varphi)$  ainsi  $g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} h(t)\mathcal{P}(t, z) dt$

**Q 41.** Soit  $r \in [0, 1[$  et  $t$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . En notant  $z = re^{i\theta}$  on a bien  $|z| < 1$ .

$$\text{On a } \mathcal{P}(t, re^{i\theta}) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} \right) = \frac{\operatorname{Re}((e^{it} + re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta}))}{(e^{it} - re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta})}$$

$$\text{On a } (e^{it} + re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta}) = 1 - r^2 + re^{i\theta}e^{-it} - re^{-i\theta}e^{it} = 1 - r^2 + 2i \operatorname{Im}(re^{i\theta}e^{-it})$$

$$\text{donc } \operatorname{Re}((e^{it} + re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta})) = 1 - r^2$$

$$\text{et } (e^{it} - re^{i\theta})(e^{-it} - re^{-i\theta}) = 1 + r^2 - r(\exp(i(\theta - t)) + \exp(i(t - \theta))) = 1 + r^2 - 2r \cos(t - \theta)$$

$$\text{On a bien } \boxed{\mathcal{P}(t, re^{i\theta}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2}}$$

**Q 42.** On peut faire bien plus simple par majoration en utilisant la question Q41.

Soit  $\delta \in ]0, \pi[$ .

Je note pour  $|z| < 1$ ,  $F_z : t \mapsto \mathcal{P}(t, z)$  définie sur  $[\delta, 2\pi - \delta]$ .

(i) Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ , la fonction  $F_z$  est continue sur  $[\delta, 2\pi - \delta]$

(ii) Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$  et  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

On se place sur  $\{Z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(Z) > 0 \text{ et } |Z| < 1\}$  qui est un voisinage de 1 relatif à  $\{Z \in \mathbb{C} \mid |Z| < 1\}$

On note  $z = re^{i\theta}$  où  $r < 1$  et  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$ .

$$\text{Quand } z \rightarrow 1, \text{ on a } \theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right) \rightarrow 0 \text{ et } 1 - r^2 \rightarrow 0$$

$$\text{Pour } t \in [\delta, 2\pi - \delta], \text{ on a } 1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2 \rightarrow 2 - 2 \cos(\delta) \text{ donc } \mathcal{P}(t, z) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} \rightarrow 0$$

donc la famille de fonctions  $(F_z)_z$  converge simplement sur  $[\delta, 2\pi - \delta]$  vers la fonction  $t \mapsto 0$  quand  $z$  tend vers 1

(iii) la fonction  $t \mapsto 0$  est continue sur  $[\delta, 2\pi - \delta]$

(iv) Je note  $V_\delta = \{Z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(Z) > \cos(\delta/2) \text{ et } |Z| < 1\}$  qui est un voisinage de 1 relatif à  $\{Z \in \mathbb{C} \mid |Z| < 1\}$

Soit  $z \in V_\delta$ . Soit  $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ .

$$\text{On a } F_z(t) = \mathcal{P}(t, re^{i\theta}) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} \text{ d'après le calcul fait en Q.43.}$$

$$\text{donc } |F_z(t)| = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} \text{ or } 0 \leq 1 - |z|^2 \leq 1 \text{ et } |e^{it} - z| \geq \operatorname{Re}(-e^{it} + z) \geq \cos(\delta/2) - \cos(\delta) > 0$$

d'où l'hypothèse de domination :

$$\forall z \in V_\delta, \forall t \in [\delta, 2\pi - \delta], |F_z(t)| \leq \frac{1}{(\cos(\delta/2) - \cos(\delta))^2}$$

$$\text{et } t \mapsto \frac{1}{(\cos(\delta/2) - \cos(\delta))^2} \text{ est continue et intégrable sur le segment } [\delta, 2\pi - \delta]$$

**Conclusion :** Avec (i), (ii), (ii) et (iv), l'extension du théorème de convergence dominée s'applique

$$\int_{\delta}^{2\pi - \delta} \mathcal{P}(t, z) dt \xrightarrow{z \rightarrow 1} 0$$

Soit maintenant  $\varphi \in \mathbb{R}$ , on a par changement de variable de classe  $\mathcal{C}^1 : u = t - \varphi, du = dt :$

$$\int_{\varphi + \delta}^{\varphi + 2\pi - \delta} \mathcal{P}(t, z) dt = \int_{\delta}^{2\pi - \delta} \mathcal{P}(u + \varphi, z) du = \int_{\delta}^{2\pi - \delta} \mathcal{P}(t, ze^{-i\varphi}) dt$$

Quand  $z \rightarrow e^{i\varphi}$ , on a  $ze^{-i\varphi} \rightarrow 1$

$$\text{donc en utilisant la limite précédente par composition : } \boxed{\int_{\varphi + \delta}^{\varphi + 2\pi - \delta} \mathcal{P}(t, z) dt \xrightarrow{z \rightarrow e^{i\varphi}} 0}$$

**Q 43.** Soit  $\varepsilon > 0$ . On considère  $\delta > 0$ .

Soit  $\varphi \in \mathbb{R}$  et  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ .

On a selon Q39.,  $2\pi = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(t, z) dt = \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt$  en faisant comme en 40.

d'où  $2\pi h(\varphi) = \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) h(\varphi) dt$

Ainsi  $2\pi |g(z) - h(\varphi)| = \left| \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} (h(t)\mathcal{P}(t, z) - h(\varphi)\mathcal{P}(t, z)) dt \right|$  d'après Q40.

donc selon Chasles et l'inégalité triangulaire et comme  $\mathcal{P}(t, z) \geq 0$  pour  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$2\pi |g(z) - h(\varphi)| \leq \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z) dt + \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t, z) |h(t) - h(\varphi)| dt$$

La fonction  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $2\pi$ -périodique donc elle est uniformément continue sur le segment  $[0, 4\pi]$  selon le théorème de Heine. ce qui nous fournit  $\delta \in ]0, \pi/2]$  tel que

$$\forall t, t' \in [0, 4\pi], |t - t'| \leq \delta \implies |h(t) - h(t')| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

Ainsi ce  $\delta$  que nous choisissons ne dépend que de  $\varepsilon$ , on a en plaçant  $t$  et  $t'$  dans le bon intervalle  $[2k\pi, (2k+4)\pi]$  :

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, |t - t'| \leq \delta \implies |h(t) - h(t')| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

on a donc  $\forall t \in [\varphi - \delta, \varphi + \delta], |h(t) - h(\varphi)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$

et ainsi

$$0 \leq \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t, z) |h(t) - h(\varphi)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t, z) dt$$

or  $0 \leq \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t, z) dt \leq \int_{\varphi-\delta}^{\varphi-\delta+2\pi} \mathcal{P}(t, z) dt \leq 2\pi$  d'après Q39.

et donc en choisissant ce  $\delta$ , on a : pour tout nombre réel  $\varphi$  et tout nombre complexe  $z$  vérifiant  $|z| < 1$ , on a bien

$$0 \leq \int_{\varphi-\delta}^{\varphi+\delta} \mathcal{P}(t, z) |h(t) - h(\varphi)| dt \leq \varepsilon$$

Soit  $\varphi \in \mathbb{R}$  et  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $|z| < 1$ .

On a déjà vu que  $h$  est borné sur  $[0, 2\pi]$  or comme  $h$  est périodique  $h([0, 2\pi]) = h(\mathbb{R})$  donc  $h$  est bornée sur  $\mathbb{R}$

Ainsi pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|h(t) - h(\varphi)| \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|$

et donc  $\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} |h(t) - h(\varphi)| \mathcal{P}(t, z) dt \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)| \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt$

Ainsi pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout nombre réel  $\varphi$

et tout nombre complexe  $z$  vérifiant  $|z| < 1$ ,

$$|g(z) - h(\varphi)| \leq \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt + \varepsilon$$

**Q 44.** On va établir l'existence et l'unicité.

**Unicité** Soit  $f_1$  et  $f_2$  deux solutions du problème de Dirichlet.

Je note  $U = D(0, 1)$  ainsi  $\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| = 1\}$

Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont continues sur  $\bar{U}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  et harmonique sur  $U$  et égales sur  $\partial U$  car  $\forall t \in \mathbb{R}, f_1(\cos(t), \sin(t)) = h(t) = f_2(\cos(t), \sin(t))$

Ainsi Q25. s'applique et on a  $f_1 = f_2$  égale sur  $U$  donc sur  $\overline{D(0, 1)}$

**Existence :** Je considère  $f$  définie sur  $\overline{D(0, 1)}$  par :

pour  $(x, y) \in D(0, 1)$ ,  $f(x, y) = g(x + iy)$  et pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(\cos(t), \sin(t)) = h(t)$

Selon Q38.  $f$  est  $\mathcal{C}^2$  et harmonique sur  $D(0, 1)$ , il reste à établir la continuité de  $f$  en tout point de  $\partial D(0, 1)$

Soit  $a \in \partial D(0, 1)$ . On peut écrire  $a = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$  avec  $\varphi \in \mathbb{R}$

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Je prends  $\delta > 0$  comme à la question précédente.

On a quand  $(x, y) \rightarrow a$  avec  $\|(x, y)\| < 1$ ,  $x + iy \rightarrow e^{i\varphi}$

donc  $|f(x, y) - f(a)| = |g(x + iy) - h(\varphi)| \leq \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt + \varepsilon$

or  $\frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|}{\pi} \int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} \mathcal{P}(t, z) dt \rightarrow 0$  d'après Q42.

ce qui nous fournit  $V_1$  un voisinage de  $a$ , tel que  $\forall (x, y) \in V_1 \cap D(0, 1)$ ,  $|f(x, y) - f(a)| \leq 2\varepsilon$

de plus l'application définie sur  $D(a, 1) \cap \partial D(0, 1) : (\cos(t), \sin(t)) \mapsto t$  est continue en utilisant soit arccos soit arcsin

Ainsi la fonction  $f$  est continue en  $a$  sur  $\partial D(0, 1)$  par composition avec  $h$

ce qui nous fournit  $V_2$  un voisinage de  $a$  relatif  $\partial D(0, 1)$  tel que  $\forall (x, y) \in V_2$ ,  $|f(x, y) - f(a)| \leq 2\varepsilon$

d'où  $\forall (x, y) \in V_2 \cup (V_1 \cap D(0, 1))$ ,  $|f(x, y) - f(a)| \leq 2\varepsilon$

comme  $V_2 \cup (V_1 \cap D(0, 1))$  est un voisinage de  $a$  relatif à  $\overline{D(0, 1)}$

On a bien la continuité voulue en  $a$  ce qui termine ce problème