

Partie I

1a. On a $(n | X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (X = kn)$ (réunion disjointe). Ainsi

$$\mathbb{P}(n | X) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = kn) = \zeta(s)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(kn)^s} = \zeta(s)^{-1} \zeta(s) n^{-s}$$

$$\text{d'où } \boxed{\mathbb{P}(n | X) = \frac{1}{n^s} = n^{-s}}$$

1b. Soit $J \subset \mathbb{N}^*$ une partie non vide. Comme les $(p_j^{\alpha_j})_{j \in J}$ sont deux à deux premiers entre eux, on a

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, (\forall j \in J, p_j^{\alpha_j} | x) \iff \prod_{j \in J} p_j^{\alpha_j} | x$$

Ainsi $\bigcap_{j \in J} \{p_j^{\alpha_j} | X\} = \left\{ \prod_{j \in J} p_j^{\alpha_j} | X \right\}$ or selon la question précédente, on a :

$$\mathbb{P} \left(\prod_{j \in J} p_j^{\alpha_j} | X \right) = \left(\prod_{j \in J} p_j^{\alpha_j} \right)^{-s} = \prod_{j \in J} (p_j^{\alpha_j})^{-s} = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(p_j^{\alpha_j} | X)$$

Donc

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{j \in J} \{p_j^{\alpha_j} | X\} \right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(\{p_j^{\alpha_j} | X\})$$

On a bien montré que $\boxed{\text{les évènements } \{p_1^{\alpha_1} | X\}, \{p_2^{\alpha_2} | X\}, \dots, \{p_k^{\alpha_k} | X\}, \dots \text{ sont mutuellement indépendants}}$

2a. On sait que si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants alors $(B_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants où $\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k \in \{A_k, \bar{A}_k\}$.

Ainsi les évènements $\{p_i \nmid X\}$ ($i \in \llbracket 1, r \rrbracket$) sont mutuellement indépendants.

De plus pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(\{p_i \nmid X\}) = 1 - \mathbb{P}(\{p_i | X\})$

Ainsi avec la question 1a, on a $\boxed{\mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^r \{p_i \nmid X\} \right) = \prod_{i=1}^r (1 - p_i^{-s})}$

2b. On a par continuité décroissante et à l'aide de la question précédente : $\mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \{p_i \nmid X\} \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^r (1 - p_i^{-s})$

Or $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} \{p_i \nmid X\} = \{X = 1\}$ et $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \zeta(s)^{-1}$ par définition de la loi zêta.

On en déduit que $\boxed{\zeta(s)^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - p_k^{-s})}$

3a. La variable aléatoire $\nu_{p_k}(X) + 1$ est à valeurs dans \mathbb{N}^* .

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(\nu_{p_k}(X) + 1 = m) = (\nu_{p_k}(X) = m - 1) = (p_k^{m-1} | X) \cap (p_k^m \nmid X) = (p_k^{m-1} | X) \setminus (p_k^m | X)$$

Or $(p_k^m | X) \subset (p_k^{m-1} | X)$ donc avec 1a :

$$\mathbb{P}(\nu_{p_k}(X) + 1 = m) = \mathbb{P}(p_k^{m-1} | X) - \mathbb{P}(p_k^m | X) = p_k^{-s(m-1)} - p_k^{-sm} = (1 - p_k^{-s}) (1 - (1 - p_k^{-s}))^{m-1}$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ la variable aléatoire } \nu_{p_k}(X) + 1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } (1 - p_k^{-s}) \in]0, 1[]}$

3b. Je note les événements $E_i = (\nu_{p_{k_i}}(X) = n_i)$ et $E_i^{(\varepsilon)} = (\nu_{p_{k_i}}(X) \geq n_i + \varepsilon)$ pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

On a remarque que $E_i \cup E_i^{(1)} = E_i^{(0)}$ (union disjointe)

Je vais montrer par récurrence sur $s \in \llbracket 1, r \rrbracket$ que pour tout $F \in \mathcal{A}$, on a

$$\mathbb{P}(E_1 \cap \dots \cap E_s \cap F) = \sum_{\ell=0}^s (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s = \ell}} \mathbb{P}(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \dots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap F)$$

Pour $s = 1$, on a
$$\sum_{\ell=0}^1 (-1)^\ell \sum_{\substack{\varepsilon_1 \in \{0,1\}^1 \\ \varepsilon_1 = \ell}} \mathbb{P}(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap F) = \mathbb{P}(E_1^{(0)} \cap F) - \mathbb{P}(E_1^{(1)} \cap F)$$

Or on a l'union disjointe : $E_1^{(0)} \cap F = (E_1^{(1)} \cap F) \cup (E_1 \cap F)$

d'où
$$\sum_{\ell=0}^1 (-1)^\ell \sum_{\substack{\varepsilon_1 \in \{0,1\}^1 \\ \varepsilon_1 = \ell}} \mathbb{P}(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap F) = \mathbb{P}(E_1 \cap F)$$
 ce qui établit l'initialisation.

Pour l'hérédité, on considère $s \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ tel que la propriété soit vraie au rang s .

Soit $F \in \mathcal{A}$. On a en appliquant l'hypothèse de récurrence à l'événement $E_{s+1} \cap F$:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap \dots \cap E_s \cap E_{s+1} \cap F) = \sum_{\ell=0}^s (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s = \ell}} \mathbb{P}(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \dots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1} \cap F)$$

or pour $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \in \{0, 1\}^s$, on a :

$$\mathbb{P}(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \dots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1} \cap F) = \mathbb{P}(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \dots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1}^{(0)} \cap F) - \mathbb{P}(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \dots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1}^{(1)} \cap F)$$

donc $\mathbb{P}(E_1 \cap \dots \cap E_s \cap E_{s+1} \cap F)$ est égal à :

$$\sum_{\ell=0}^s (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s + 0 = \ell + 0}} \mathbb{P}(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \dots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1}^{(0)} \cap F) + \sum_{\ell=0}^s (-1)^{\ell+1} \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s + 1 = \ell + 1}} \mathbb{P}(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \dots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1}^{(1)} \cap F)$$

En remarquant que $\{0, 1\}^{s+1} = (\{0, 1\}^s \times \{0\}) \cup (\{0, 1\}^s \times \{1\})$, on obtient par changement d'indice :

$$\mathbb{P}(E_1 \cap \dots \cap E_s \cap E_{s+1} \cap F) = \sum_{\ell=0}^{s+1} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s+1}) \in \{0,1\}^{s+1} \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{s+1} = \ell}} \mathbb{P}(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \dots \cap E_s^{(\varepsilon_s)} \cap E_{s+1} \cap F)$$

Ce qui établit l'hérédité.

On a prouvé par récurrence que la propriété est vrai pour tout $s \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et tout $F \in \mathcal{A}$

En particulier pour $s = r$ et $F = \Omega$, on obtient l'égalité voulue :

$$\mathbb{P}(\nu_{p_{k_1}}(X) = n_1, \dots, \nu_{p_{k_r}}(X) = n_r) \text{ est bien égal à}$$

$$\sum_{\ell=0}^r (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \{0,1\}^r \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r = \ell}} \mathbb{P}(\nu_{p_{k_1}}(X) \geq n_1 + \varepsilon_1, \nu_{p_{k_2}}(X) \geq n_2 + \varepsilon_2, \dots, \nu_{p_{k_r}}(X) \geq n_r + \varepsilon_r)$$

3c. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et p premier, on a $(\nu_p(X) \geq m) = (p^m \mid X)$. Ainsi selon 1b,

les événements $(\nu_{p_{k_1}}(X) \geq n_1 + \varepsilon_1), (\nu_{p_{k_2}}(X) \geq n_2 + \varepsilon_2), \dots, (\nu_{p_{k_r}}(X) \geq n_r + \varepsilon_r)$ sont mutuellement indépendants.

donc en reprenant les notations de 3b, on a $E_1^{(\varepsilon_1)}, E_2^{(\varepsilon_2)}, \dots, E_r^{(\varepsilon_r)}$ sont mutuellement indépendants et

$$\mathbb{P}(E_1 \cap \dots \cap E_{s-1} \cap E_s) = \sum_{\ell=0}^s (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s = \ell}} \mathbb{P}(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \dots \cap E_{s-1}^{(\varepsilon_{s-1})} \cap E_s^{(\varepsilon_s)})$$

qui est donc égal à $\sum_{\ell=0}^s (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s = \ell}} \mathbb{P} \left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \dots \cap E_{s-1}^{(\varepsilon_{s-1})} \right) \mathbb{P} \left(E_s^{(\varepsilon_s)} \right)$ donc égal à

$$\sum_{\ell=0}^{s-1} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s-1}) \in \{0,1\}^{s-1} \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{s-1} = \ell}} \mathbb{P} \left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \dots \cap E_{s-1}^{(\varepsilon_{s-1})} \right) \mathbb{P} \left(E_s^{(0)} \right) - \sum_{\ell=1}^s (-1)^{\ell-1} \sum_{\substack{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s-1}) \in \{0,1\}^{s-1} \\ \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{s-1} = \ell-1}} \mathbb{P} \left(E_1^{(\varepsilon_1)} \cap \dots \cap E_{s-1}^{(\varepsilon_{s-1})} \right) \mathbb{P} \left(E_s^{(1)} \right)$$

En réorganisant la somme et en utilisant l'union disjointe $E_s^{(0)} = E_s^{(1)} \cup E_s$

on trouve alors $\mathbb{P} (E_1 \cap \dots \cap E_{s-1} \cap E_s) = \mathbb{P} (E_1 \cap \dots \cap E_{s-1}) \mathbb{P} (E_s)$

puis en procédant par récurrence $\mathbb{P} (E_1 \cap \dots \cap E_{s-1} \cap E_s) = \mathbb{P} (E_1) \dots \mathbb{P} (E_{s-1}) \mathbb{P} (E_s)$

Ainsi on a montré : pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $k_1 < \dots < k_r$ dans \mathbb{N}^* et $(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ que

$$\mathbb{P} (\nu_{p_{k_1}}(X) = n_1, \dots, \nu_{p_{k_r}}(X) = n_r) = \mathbb{P} (\nu_{p_{k_1}}(X) = n_1) \mathbb{P} (\nu_{p_{k_2}}(X) = n_2) \dots \mathbb{P} (\nu_{p_{k_r}}(X) = n_r)$$

On en déduit que les variables aléatoires $\nu_{p_1}(X), \dots, \nu_{p_k}(X), \dots$ sont mutuellement indépendantes

4a. Soit m et n sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

Je pose $D(m) = \{d \in \mathbb{N}^* \mid d \mid m\}$ On remarque que $\chi_4 : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ d & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } d \equiv 1 [4] \\ -1 & \text{si } d \equiv 3 [4] \\ 0 & \text{si } d \equiv 0 [2] \end{cases} \end{cases}$

et $g(m) = \sum_{d \in D(m)} \chi_4(d)$ et de même $g(n) = \sum_{d \in D(n)} \chi_4(d)$

Ensuite je définis l'application $\varphi : \begin{cases} D(m) \times D(n) & \longrightarrow & D(mn) \\ (d_1, d_2) & \longmapsto & d_1 d_2 \end{cases}$

On constate facilement que cette application est bien définie.

Soit (d_1, d_2) et $(d'_1, d'_2) \in D(m) \times D(n)$ tel que $d_1 d_2 = d'_1 d'_2$,

alors on a $d_1 \wedge d'_2 = 1$ et $d_1 \mid d'_1 d'_2$ donc $d_1 \mid d'_1$ selon Gauss

et de même $d'_1 \wedge d_1 = 1$ d'où $d_1 = d'_1$ puis $d_2 = d'_2$ d'où φ est injective

Enfin pour $d \in D(mn)$ on a $(d \wedge m, d \wedge n) \in D(m) \times D(n)$ et $\varphi(d \wedge n, d \wedge m) = d$

Ainsi φ est surjective

Donc φ est bijective d'où

$$g(m)g(n) = \sum_{d \in D(m)} \chi_4(d) \sum_{d' \in D(n)} \chi_4(d') = \sum_{(d, d') \in D(m) \times D(n)} \chi_4(dd') = \sum_{(d, d') \in D(m) \times D(n)} \chi_4(\varphi(d, d')) = \sum_{d \in D(mn)} \chi_4(d)$$

On a bien : $g(mn) = g(m)g(n)$

4b. On reprend les notations du 4a. On remarque que $D(p^n) = \{p^k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ de sorte que

$$g(p^n) = \sum_{k=0}^n \chi_4(p^k)$$

Si $p = 2$, alors $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\chi_4(p^k) = 0$ car $2 \mid p^k$ et donc $g(p^n) = \chi_4(p^0) + 0 = \rho(1) = 1$

Si $p \equiv 1 [4]$, alors $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $p^k \equiv 1 [4]$ donc $g(p^n) = \sum_{k=0}^n \chi_4(p^k) = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$

Si $p \equiv 3 [4]$, alors $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $p^k \equiv (-1)^k [4]$ donc $g(p^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)}$

Ainsi on a $g(p^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 2, \\ n + 1 & \text{si } p \equiv 1 [4], \\ \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) & \text{si } p \equiv 3 [4] \end{cases}$

5. Comme $h(X)$ est d'espérance finie, alors, selon la formule de transfert,

on a existence des membres et égalité : $\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{k=1}^{+\infty} h(k)\mathbb{P}(X = k)$. Par hypothèse on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, |f_n(k)\mathbb{P}(X = k)| \leq h(k)\mathbb{P}(X = k) \text{ et } |f(k)\mathbb{P}(X = k)| \leq h(k)\mathbb{P}(X = k) \text{ par passage à la limite}$$

donc les séries $\sum_{k \geq 1} f_n(k)\mathbb{P}(X = k)$ et $\sum_{k \geq 1} f(k)\mathbb{P}(X = k)$ convergent absolument.

D'où les existences des espérances : $\mathbb{E}(f_n(X)) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_n(k)\mathbb{P}(X = k)$ et $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)\mathbb{P}(X = k)$

On pose alors pour $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi_k : \begin{cases} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & f_n(k)\mathbb{P}(X = k) \end{cases}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, |\varphi_k(n)| \leq h(k)\mathbb{P}(X = k)$$

or on vient de voir que la série $\sum_{k \geq 1} h(k)\mathbb{P}(X = k)$ convergeait

Ainsi la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} \varphi_k$ converge normalement donc uniformément sur \mathbb{N}^* (voisinage de $+\infty$)

Je note S la fonction somme de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_n(k)\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(f_n(X))$$

De plus $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_k(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(k)\mathbb{P}(X = k) = f(k)\mathbb{P}(X = k)$

Ainsi selon le théorème de la double limite : $S(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(f(X))$

Autrement dit $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f_n(X)) = \mathbb{E}(f(X))}$

6a. On a $\zeta(s)^2 = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} (qm)^{-s}$ par linéarité

Ainsi pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{m \geq 1} (qm)^{-s}$ converge et la série $\sum_{q \geq 1} \sum_{m=1}^{+\infty} (qm)^{-s}$

Comme les termes sont positifs, la famille double est sommable et on a donc $\zeta(s)^2 = \sum_{(q,m) \in \mathbb{N}^*} (qm)^{-s}$

En sommant par paquets on donc $\zeta(s)^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\substack{(q,m) \in \mathbb{N}^* \\ qm=n}} (qm)^{-s} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\substack{(q,m) \in \mathbb{N}^* \\ qm=n}} n^{-s}$

Or pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $r(n) = \text{Card} \left(\left\{ (q, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid qm = n \right\} \right)$

Ainsi $\boxed{\sum_{n \geq 1} r(n)n^{-s}$ converge et sa somme vaut $\zeta(s)^2$

6b. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|g(n)| = |r_1(n) - r_3(n)| \leq \sum_{i=0}^3 r_i(n) = r(n)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|g(n)n^{-s}| \leq r(n)n^{-s}$

Par comparaison à une série à termes positifs $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} g(n)n^{-s} \text{ converge absolument donc converge}}$

7a. Soit $x \in \mathbb{N}^*$. Par décomposition de produit en facteurs premiers il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x = \prod_{k=1}^N p_k^{\nu_{p_k}(x)}$ puis

$$\forall n \geq N, x = \prod_{k=1}^n p_k^{\nu_{p_k}(x)} \text{ Ainsi } \left(x \mapsto \prod_{k=1}^n p_k^{\nu_{p_k}(x)} \right)_{n \geq 1} \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ converge simplement vers la fonction identité}$$

7b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a d'après 4b, $\forall x \in \mathbb{N}^*$, $g\left(p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right) \leq \nu_{p_k}(x) + 1$ donc $0 \leq g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right) \leq \nu_{p_k}(X) + 1$

or $\nu_{p_k}(X) + 1$ suit une loi géométrique (3a) donc $\nu_{p_k}(X) + 1$ puis $g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)$ est d'espérance finie

De plus, les $\nu_{p_k}(X)$ ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) sont mutuellement indépendantes selon 3c

Ainsi les $g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)$ ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) le sont également d'après le lemme des coalitions

donc $\prod_{k=1}^n g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)$ est d'espérance finie et en utilisant 4a. on a :

$$\prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left(g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right) = \mathbb{E}\left(g\left(\prod_{k=1}^n p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right)$$

Je pose $f_n : x \mapsto g\left(\prod_{k=1}^n p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)$ de sorte que (f_n) converge simplement vers g sur \mathbb{N}^* (suites stationnaires)

En utilisant 4a et 4b et comme $\forall x \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \geq x$, $p_k \geq k$ et $\nu_{p_k}(x) = 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \prod_{k=1}^n g\left(p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right) \leq \prod_{k=1}^n (\nu_{p_k}(x) + 1) \leq \prod_{k=1}^x (\nu_{p_k}(x) + 1) \leq r(x)$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leq r(x)$ et $r(X)$ est d'espérance finie qui vaut $\zeta(s)$ d'après 6a

$$\text{D'où } \mathbb{E}(g(X)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f_n(X)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left(g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right) \text{ selon 5}$$

8a. On suppose que p est un nombre premier tel que $p \equiv 1 [4]$.

$$\text{On a } g\left(p^{\nu_p(X)}\right) = \nu_p(X) + 1 \text{ (4b) et } \nu_p(X) + 1 \sim \mathcal{G}(1 - p^{-s}) \text{ selon 2b donc } \mathbb{E}\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

8b. Si p est un nombre premier vérifiant $p \equiv 3 [4]$, alors on a $g\left(p^{\nu_p(X)}\right) = \frac{1 + (-1)^{\nu_p(X)}}{2}$ (4b)

$(-1)^{\nu_p(X)}$ est bornée donc admet une espérance et $(-1)^{\nu_p(X)} = -(-1)^{1+\nu_p(X)}$

Comme $1 + \nu_p(X) \sim \mathcal{G}(1 - p^{-s})$ selon 2b, alors selon la formule de transfert, par somme géométrique :

$$\mathbb{E}\left((-1)^{\nu_p(X)}\right) = - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (1 - p^{-s}) (p^{-s})^{k-1} = - \frac{-(1 - p^{-s})}{1 + p^{-s}} = \frac{1 - p^{-s}}{1 + p^{-s}}$$

$$\text{donc } \mathbb{E}\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - p^{-s}}{1 + p^{-s}}\right) = \frac{1}{1 + p^{-s}}$$

8c. Si $p \equiv 3 [4]$ alors $\chi_4(p) = -1$ et si $p \equiv 1 [4]$ alors $\chi_4(p) = 1$

$$\text{Ainsi pour } p \text{ premier impair on vient de voir (8a et 8b) que : } \mathbb{E}\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \frac{1}{1 + \chi_4(p)p^{-s}}$$

$$\text{Par ailleurs, on a : } g\left(2^{\nu_2(X)}\right) = 1 \text{ donc } \mathbb{E}\left(g\left(2^{\nu_2(X)}\right)\right) = 1 = \frac{1}{1 + \chi_4(2)2^{-s}}$$

$$\text{Avec 7b, on peut alors conclure que : } \mathbb{E}(g(X)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \chi_4(p_k) p_k^{-s}}$$

9a. On remarque que $\chi_4(p^{\nu_p(X)}) = \chi_4(p)^{\nu_p(X)}$

Si $p = 2$, alors $\chi_4(p) = 0$ et donc $\chi_4(p)^{\nu_p(X)} = 0^{\nu_p(X)}$

Ainsi $\mathbb{E}(\chi_4(p)^{\nu_p(X)}) = 0\mathbb{P}(\nu_p(X) \geq 1) + 1\mathbb{P}(\nu_p(X) = 0) = 1 - \mathbb{P}(2 | X) = 1 - 2^{-s} = \frac{1 - 2^{-s}}{1 - \chi_4(2)2^{-s}}$

Si $p \equiv 3 [4]$ alors $\chi_4(p) = -1$ et on a vu en 8b que $\mathbb{E}(\chi_4(p)^{\nu_p(X)}) = \frac{1 - p^{-s}}{1 + p^{-s}} = \frac{1 - p^{-s}}{1 - \chi_4(p)p^{-s}}$

Si $p \equiv 1 [4]$ alors $\chi_4(p) = 1$ et $\mathbb{E}(\chi_4(p)^{\nu_p(X)}) = 1 = \frac{1 - p^{-s}}{1 - \chi_4(p)p^{-s}}$

Dans tous les cas si p est un nombre premier, $\mathbb{E}(\chi_4(p^{\nu_p(X)})) = \frac{1 - p^{-s}}{1 - \chi_4(p)p^{-s}}$

9b. On procède comme en 7b. on sait déjà que $\mathbb{E}(\chi_4(p^{\nu_p(X)}))$ existe et aussi $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$, $\chi_4(nm) = \chi_4(n)\chi_4(m)$

On pose $f_n : x \mapsto \chi_4\left(\prod_{k=1}^n p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)$ de sorte que la suite (f_n) converge simplement vers χ_4 sur \mathbb{N}^* (suites stationnaires).

Il suffit de trouver une fonction h positive tel que $h(X)$ est d'espérance finie et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(k)| \leq h(k)$
La fonction constante égale à 1 fait l'affaire.

Ainsi comme en 7b : $\mathbb{E}(\chi_4(X)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1 - p_k^{-s}}{1 - \chi_4(p_k)p_k^{-s}}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - p_k^{-s}) = \frac{1}{\zeta(s)} \neq 0$ selon 2b

donc $\left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \chi_4(p_k)p_k^{-s}}\right)_n$ converge et

ainsi $\mathbb{E}(\chi_4(X)) = \frac{1}{\zeta(s)} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \chi_4(p_k)p_k^{-s}}$

9c. Donc avec 8c et le transfert, on a

$$\mathbb{E}(g(X)) = \zeta(s)\mathbb{E}(\chi_4(X)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta(s)\chi_4(k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi_4(k)}{k^s}$$

Comme $\chi_4(X)$ est d'espérance finie, la série est absolument convergente, on peut regrouper et ré-indexer (famille sommable) donc

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{\chi_4(k)}{k^s} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{\chi_4(k)}{k^s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\chi_4(2n+1)}{(2n+1)^s} + 0$$

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$ est convergente et que sa somme vaut $\mathbb{E}(g(X))$

Partie II

10a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $e^{i(2n+1)\theta} = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \sin^k(\theta) \cos^{2n+1-k}(\theta)$

En séparant termes pairs et impairs :

$$e^{i(2n+1)\theta} = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} i(-1)^p \sin^{2p+1}(\theta) \cos^{2(n-p)}(\theta) + \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p} (-1)^p \sin^{2p}(\theta) \cos^{2(n-p)+1}(\theta)$$

En prenant la partie imaginaire : $\sin((2n+1)\theta) = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \sin^{2p+1}(\theta) (1 - \sin^2(\theta))^{n-p}$

Je pose $P_n = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^p (1-X)^{n-p}$ de sorte que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta)P_n(\sin^2(\theta))$

10b. On remarque que P_n est unique car caractérisé par les valeurs prises sur $]0, 1]$ qui est infini.

En évaluant en $\theta = \pi/2$ l'identité du 10a, on voit que P_n est non nul de plus $\deg(P_n) \leq n$ par somme.

Soit $\theta \in]0, \pi/2]$. On a $\sin(\theta) \neq 0$ et $(2n+1)\theta \in]0, n\pi + \pi/2]$ donc

$$P_n(\sin^2(\theta)) = 0 \iff \sin((2n+1)\theta) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, (2n+1)\theta = k\pi \iff \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \theta = \frac{k\pi}{2n+1}$$

La fonction \sin est strictement croissante sur $]0, \pi/2]$ et positive donc \sin^2 y est injective.

On a donc trouvé au moins n racines distincts de P_n : les $\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ pour k parcourant $\llbracket 1, n \rrbracket$

Ainsi P_n est exactement de degré n de racines distinctes les $\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

On peut donc écrire $P_n(X) = \mu \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{X}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$ avec $\mu \in \mathbb{R}^*$.

À l'aide de 10a et comme $t \mapsto P_n(t)$ est continue et que $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, on a :

$$\mu = P_n(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} P_n(\sin^2(\theta)) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)} = 2n+1$$

On en déduit que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$.

10c. On applique 10a à $\theta = \pi x/(2n+1)$ puis 10b

et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi x) = (2n+1) \sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$

11a. Soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$. À l'aide de l'équivalent de \sin en 0, on a

$$\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{x^2}{k^2} \quad \text{et} \quad (2n+1) \sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi x$$

donc par produit fini : $u_{m,n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi x \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{(-1)^m \prod_{k=-m}^m (x-k)}{(m!)^2}$

Comme $x \notin \mathbb{Z}$, on a $\frac{(-1)^m \prod_{k=-m}^m (x-k)}{(m!)^2} \neq 0$ donc $(u_{m,n}(x))_{n>m}$ est convergente dans \mathbb{R}^*

Ainsi il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0, u_{m,n}(x) \neq 0$

Pour $n \geq n_0$, on a selon 10c :

$$v_{m,n}(x) = \frac{v_{m,n}(x)u_{m,n}(x)}{u_{m,n}(x)} = \frac{\sin(\pi x)}{u_{m,n}(x)}$$

or $\sin(\pi x) \neq 0$ donc $(v_{m,n}(x))_{n>m}$ est convergente dans \mathbb{R}^* par quotient

11b. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > m$. Soit $k \in \llbracket m+1, n \rrbracket$.

On a par concavité de \sin sur $]0, \pi/2[: \forall \theta \in]0, \pi/2[, 0 < \frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta) \leq \theta$

Comme $m > |x|$, alors on a $k > |x|$ et $0 < \frac{|x|\pi}{2n+1} < \frac{k\pi}{2n+1} < \pi/2$

Comme $t \mapsto t^2$ est croissante sur \mathbb{R}^+ et \sin est croissante sur $]0, \pi/2[$ à valeurs positives.

On obtient :

$$0 \leq \frac{\sin^2\left(\frac{|x|\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leq \frac{\left(\frac{|x|\pi}{(2n+1)}\right)^2}{\left(\frac{2k\pi}{(2n+1)\pi}\right)^2} = \frac{\pi^2 x^2}{4k^2} < 1$$

d'où par parité de \sin^2 , on a : $1 \geq 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \geq 1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2} > 0$

Par produit de réels positifs : $1 \geq v_{m,n}(x) \geq \prod_{k=m+1}^n \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right) > 0$

En passant au \ln avec des quantités > 0 , on a : $0 \geq \ln(v_{m,n}(x)) \geq \sum_{k=m+1}^n \ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)$

Comme $-\ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}$, alors par comparaison entre séries à termes positifs,

la série $\sum_{k \geq m+1} \ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)$ converge

Comme \ln est continue sur $]0, +\infty[$ et que $v_m(x) > 0$ en tant que limite non nulle de réels positifs, on obtient par prolongement des inégalités :

$$0 \geq \ln(v_m(x)) \geq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)$$

Comme $\sum_{k=m+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ (reste d'une série convergente)

Ainsi par théorème des gendarmes : $\ln(v_m(x)) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ puis par continuité de \exp : $\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m(x) = 1$

11c. Si $x = 0$, on a $\sin(\pi x) = 0 = \pi x \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = 0$ car $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = 1$

Si $x \in \mathbb{Z}^*$, alors pour $n \geq |x|$, on a $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = 0$ donc $\sin(\pi x) = 0 = \pi x \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$

Si $x \notin \mathbb{Z}$. On considère m et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $|x| < m < n$, on a $\sin(\pi x) = u_{m,n}(x)v_{m,n}(x)$ selon 11a.

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) v_m(x)$ selon 11a encore

Pour m assez grand, on a $v_m(x) \neq 0$ car $\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m(x) = 1$ selon 11b

Ainsi $\prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x v_m(x)}$ et on en déduit que $\left(\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge

et que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \sin(\pi x) = \pi x \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)}$

Partie III

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 < 1 + xk^{-1}$ donc $\ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{e^{xk^{-1}}}{1 + xk^{-1}} \right) = \sum_{k=1}^n (xk^{-1} - \ln(1 + xk^{-1}))$.

Or quand $k \rightarrow +\infty$, $xk^{-1} - \ln(1 + xk^{-1}) = \frac{(xk^{-1})^2}{2} + o((xk^{-1})^2) = O(1/k^2)$

Ainsi la série $\sum_{k \geq 1}^n (xk^{-1} - \ln(1 + xk^{-1}))$ converge. On note S sa somme ainsi

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \exp \left(\sum_{k=1}^n (xk^{-1} - \ln(1 + xk^{-1})) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} e^{-\gamma x} e^S > 0$$

d'où la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction $\Gamma :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$

13. Soit $x \in]0, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\ln(x\Gamma_n(x)) = \ln(x) - \ln(x) - \gamma x + \sum_{k=1}^n (xk^{-1} - \ln(1 + xk^{-1}))$

donc $\ln(x\Gamma_n(x)) - \ln(\Gamma_n(x+1)) = \ln(x+1) + \gamma + \sum_{k=1}^n (-k^{-1} - \ln(1 + xk^{-1}) + \ln(1 + (x+1)k^{-1}))$

ainsi $\ln(x\Gamma_n(x)) - \ln(\Gamma_n(x+1)) = \ln(x+1) + \gamma + \sum_{k=1}^n (-k^{-1} + \ln(k + (x+1)) - \ln(k+x))$

donc $\ln(x\Gamma_n(x)) - \ln(\Gamma_n(x+1)) = +\gamma + \ln(n+1+x) - \sum_{k=1}^n k^{-1}$ après télescopage

d'où $\ln(x\Gamma_n(x)) - \ln(\Gamma_n(x+1)) = \ln(n+1+x) - \ln(n) - \left(\sum_{k=1}^n k^{-1} - \ln(n) - \gamma \right)$

Comme $\ln(n+1+x) - \ln(n) = \ln(1 + (1+x)/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\sum_{k=1}^n k^{-1} - \ln(n) - \gamma \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (selon le rappel III)

Ainsi en passant à la limite $\ln(x\Gamma(x)) - \ln(\Gamma(x+1)) = 0$ et on a bien $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

14a. Je note $g_0 : x \mapsto -\ln(x) - \gamma x$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g_k : x \mapsto \ln \left(\frac{e^{xk^{-1}}}{1 + xk^{-1}} \right) = xk^{-1} - \ln(1 + xk^{-1})$

(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction g_k est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$

de dérivées : $g'_0 : x \mapsto -\frac{1}{x} - \gamma$ et $g'_k : x \mapsto k^{-1} - \frac{k^{-1}}{1+xk^{-1}} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ si $k > 0$

et de dérivées secondes : $g''_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $g''_k : x \mapsto \frac{1}{(k+x)^2}$ si $k > 0$

(ii) Selon 12, la série $\sum_{k \geq 0} g_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ de somme $\ln(\Gamma)$

(iii) Soit $x > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $|g'_k(x)| = \frac{x}{k(k+x)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$

Ainsi la série $\sum_{k \geq 0} g'_k(x)$ converge donc la série $\sum_{k \geq 0} g'_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$

(iv) Soit $a < b$ dans $]0, +\infty[$. On a

$$\forall x \in [a, b], \forall k \in \mathbb{N}, |g''_k(x)| \leq \frac{1}{(k+a)^2}$$

Or la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+a)^2}$ converge donc la série $\sum_{k \geq 0} g''_k$ converge normalement sur $[a, b]$

Ainsi la série $\sum_{k \geq 0} g''_k$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$

Par théorème de cours, avec (i), (ii), (iii) et (iv), la fonction $\ln(\Gamma) = \ln \circ \Gamma$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \ln(\Gamma)''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g''_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

Par composition la fonction $\Gamma = \exp \circ \ln(\Gamma)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$

14b. En reprenant les notations du 14a et la majoration $\forall x \in [1, +\infty[\forall k \in \mathbb{N}, |g_k''(x)| \leq \frac{1}{(k+1)^2}$

Ainsi la série $\sum_{k \geq 0} g_k''$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ de somme $\ln(\Gamma)''$

De plus $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} g_k''(x) = 0$

Alors le théorème de la double limite nous donne l'existence des membres et l'égalité : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\Gamma)''(x) = 0$

15a. Soit $x > 0$, on a $S(x+1) = \ln\left(\frac{f(x+1)}{\Gamma(x+1)}\right) = \ln\left(x \frac{f(x)}{\Gamma(x)}\right) = S(x)$

Ainsi S est 1-périodique

On a $f'(x+1) = f(x) + xf'(x)$ donc $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(x+1)}{xf(x)} - \frac{1}{x} = \frac{f'(x+1)}{f(x+1)} - \frac{1}{x}$

Ainsi $\ln(f)'(x) = \ln(f)'(x+1) - \frac{1}{x}$ d'où $\ln(f)''(x) = \frac{1}{x^2} + \ln(f)''(x+1)$

Par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(f)''(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)^2} = \ln(f)''(x+n+1) \geq 0$ par convexité de $\ln(f)$

Ainsi on par passage à la limite $S''(x) = \ln(f)''(x) - \ln(\Gamma)''(x) \geq 0$

d'où S est convexe

15b. Soit $x \in [3, 4]$. Comme S est convexe, en utilisant l'inégalité des pentes on a

$$\frac{S(2) - S(1)}{2-1} \leq \frac{S(x) - S(2)}{x-2} \leq \frac{S(4) - S(2)}{4-2}$$

donc comme S est 1-périodique alors $S(1) = S(2) = S(4)$ puis $S(x) = S(2)$.

Ainsi S est constante sur $[3, 4]$ d'où S est constante sur $]0, +\infty[$

or $S(1) = \ln(1/1) = 0$ donc $S = \ln(f/\Gamma)$ est identiquement nulle d'où $f = \Gamma$

16. Soit $a > 0$. On a $\Gamma(a) > 0$ selon 12.

Je pose $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}} dt$, $f : x \mapsto \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} g(x)$ et $G : \begin{cases}]0, +\infty[^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}} \end{cases}$.

(i) Soit $t \in]0, +\infty[$. La fonction $G(\cdot, t) : x \mapsto G(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$

de dérivées successives $\frac{\partial G}{\partial x}(\cdot, t) : x \mapsto \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}$ et $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\cdot, t) : x \mapsto \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)^2 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}$

En utilisant le fait que pour $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto \alpha^x = \exp(\ln(\alpha)x)$ est de classe \mathcal{C}^1 de dérivée : $x \mapsto \ln(\alpha)\alpha^x$.

(ii) Soit $x \in]0, +\infty[$. Les fonctions $G(x, \cdot)$, $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \cdot)$ sont continues sur $]0, +\infty[$.

On a $G(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{a+1}}$ et $a+1 > 1$ donc $G(x, \cdot)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On a $G(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ et $1-x < 1$ donc $G(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0, 1]$. Ainsi $G(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On a $\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ par composition ainsi $\frac{\partial G}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{a+1}}\right)$ donc $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On a $\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) = \ln(t) - \ln(t+1) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$ donc $\frac{\partial G}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t) \frac{1}{t^{1-x}} = \ln(t) t^{x/2} \frac{1}{t^{1-x/2}}$

ainsi par croissance comparée, $\frac{\partial G}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-x/2}}\right)$ et $1-x/2 < 1$ donc $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0, 1]$

d'où $\frac{\partial G}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

(iii) Soit $\alpha < \beta$ dans $]0, +\infty[$. Je pose : $\varphi : \begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)^2 \left(\frac{t}{1+t}\right)^\alpha \frac{1}{t(1+t)^\alpha} \end{cases}$.

La fonction φ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ en faisant comme en (ii).

De plus comme $\forall t > 0$, $0 < \frac{t}{1+t} \leq 1$, on a l'hypothèse de domination (sur tous segments) :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \forall x \in [\alpha, \beta], \left| \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Avec (i), (ii) et (iii), le théorème des intégrales à paramètre s'applique

ainsi g est définie et de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ puis par produit f est définie et de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ (•)

Soit $x > 0$, on a $G(x, \cdot)$ continue, positive et non identiquement nulle donc $x \mapsto \int_0^{+\infty} G(x, t) dt$ est à valeurs > 0

Il en est de même pour Γ puis par produit

$$f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\quad (\bullet\bullet)$$

En utilisant 13, on a :

$$f(1) = \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^{1+a}} dt = a \left[\frac{1}{a(1+t)^a} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = 1 \quad (\bullet\bullet\bullet)$$

Soit $x > 0$. On a $f(x+1) = \frac{\Gamma(x+1+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^{x+1+a}} dt = \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{(x+a)t^x}{(1+t)^{x+1+a}} dt$.

On effectue alors une intégration par parties avec des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sous réserve de validité. On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+a)t^x}{(1+t)^{x+1+a}} dt = \left[\frac{-t^x}{(1+t)^{x+a}} \right]_{t \rightarrow 0^+}^{t \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-xt^{x-1}}{(1+t)^{x+a}} dt$$

Le bloc tout intégré étant nul, le calcul est valide. Ainsi

$$f(x+1) = x \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}} dt = xf(x) \quad (\bullet\bullet\bullet\bullet)$$

Enfin on a $\ln(f)' = \frac{f'}{f}$ et $\ln(f)'' = \frac{f''f - (f')^2}{f^2}$.

Pour établir la convexité de $\ln(f)$ il suffit d'établir que $\ln(f)'' \geq 0$.

Soit $x > 0$. On a $\ln(f(x)) = \ln(\Gamma(x+a)) - \ln(\Gamma(a)) + \ln(g(x))$

Ainsi $\ln(f)''(x) = \ln(\Gamma)''(x+a) + \ln(g)''(x) = \ln(\Gamma)''(x+a) + \frac{g''(x)g(x) - (g'(x))^2}{g(x)^2}$.

Il suffit donc d'établir que : $(g'(x))^2 \leq g(x)g''(x)$.

Je pose $\varphi_1 : t \mapsto \sqrt{G(x, t)}$ et $\varphi_2 : t \mapsto \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) \sqrt{G(x, t)}$ qui sont continues sur $]0, +\infty[$

Soit $\alpha < \beta$ dans $]0, +\infty[$.

Selon Cauchy-Schwarz, on a : $\left(\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_1 \varphi_2 \right)^2 \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_1^2 \right) \left(\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_2^2 \right)$ donc

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) G(x, t) dt \right)^2 \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} \ln\left(\frac{t}{1+t}\right)^2 G(x, t) dt \right) \left(\int_{\alpha}^{\beta} G(x, t) dt \right)$$

Les intégrandes sont toutes intégrables sur $]0, +\infty[$ ce qui permet de passer aux limites $\alpha \rightarrow 0$ et $\beta \rightarrow +\infty$.

Ainsi on a bien $(g'(x))^2 \leq g(x)g''(x)$

donc $\ln(f)$ est convexe (••••)

Avec 15, on peut alors conclure que $f = \Gamma$ ce qui donne $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}}$

17. Soit $x \in]0, 1[$. En posant $a = 1 - x$, on a $a > 0$ et comme $\Gamma(1) = 1$, on d'après 16 et 12 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x) = \frac{1}{x(1-x)} e^{-\gamma(x+(1-x))} \prod_{k=1}^n \frac{e^{(x+1-x)k^{-1}}}{(1+xk^{-1})(1+(1-x)k^{-1})}$ donc

$$\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x) = \exp\left(\sum_{k=1}^n k^{-1} - \gamma\right) (n!)^2 \left(\prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i-x}\right) \left(\prod_{k=0}^n \frac{1}{k+x}\right) = \frac{\exp\left(\sum_{k=1}^n k^{-1} - \gamma\right)}{(n+1-x)x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)}$$

d'où

$$\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x) = \frac{n}{n+1-x} \times \frac{\exp\left(\sum_{k=1}^n k^{-1} - \ln(n) - \gamma\right)}{x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)}$$

En passant à la limite à l'aide de 12 et 11c, on obtient par opérations sur les limites : $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$

Partie IV

18a. Soit $x \in]0, 1[$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in]0, 1[$. Par somme géométrique, on a :

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{n+x-1} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n t^{n+x-1} + \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n t^{n+x-1} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n t^{n+x-1} + (-1)^N \frac{t^{N+x-1}}{1+t}$$

Comme on a une somme de $N+1$ fonctions intégrables sur $]0, 1[$, on a

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \int_0^1 t^{n+x-1} dt + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{N+x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n+x} + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{N+x-1}}{1+t} dt$$

Ainsi

$$\left| \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n+x} \right| = \int_0^1 \frac{t^{N+x-1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{N+x-1} dt = \frac{1}{N+x}$$

Or $\frac{1}{N+x} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ ainsi les gendarmes nous donnent l'existence des membres et l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \quad (\star)$$

On effectue un changement de classe \mathcal{C}^1 strictement décroissant bijectif : $t = 1/u$; $dt = -(1/u)^2 du$. Ainsi

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_1^0 \frac{-(1/u)^{x-1+2}}{1+1/u} du = \int_0^1 \frac{t^{1-x+1-2}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{(1-x)-1}}{1+t} dt$$

Comme $1-x \in]0, 1[$, on peut lui appliquer (\star) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}$$

Avec la relation de Chasles, on a $\boxed{\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}}$

On remarque que la semi-convergence des séries nous annonce que les théorèmes d'interversion série-intégrale ne s'appliquent pas. On aurait pu utiliser le théorème de convergence dominée.

18b. Soit $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On a $\cos(\pi x) > 0$. À l'aide de la question précédente appliqué à $1/2 - x \in]0, 1[$:

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \frac{\pi}{\sin(\pi/2 - \pi x)} = \frac{\pi}{\sin(\pi(1/2 - x))} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1/2 - x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1/2 + x}$$

or pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\left| \frac{2x}{2n+1} \right| \leq \frac{1}{2}$ et donc

$$\frac{(-1)^n}{n + 1/2 - x} = \frac{2(-1)^n}{2n+1} \times \frac{1}{1 - 2x/(2n+1)} = \frac{2(-1)^n}{2n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} (2x/(2n+1))^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{p+1}(-1)^n x^p}{(2n+1)^{p+1}}$$

En remarquant que $-x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, on a donc $\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{2^{p+1}(-1)^n x^p}{(2n+1)^{p+1}} + \frac{2^{p+1}(-1)^n (-x)^p}{(2n+1)^{p+1}} \right)$

puis pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{p+1}((-1)^n x^p + (-x)^p)}{(2n+1)^{p+1}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^{2N} \frac{2^{p+1}((-1)^n x^p + (-x)^p)}{(2n+1)^{p+1}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{2^{2k+1}((-1)^n x^{2k} + (-x)^{2k})}{(2n+1)^{2k+1}}$$

d'où par linéarité

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{2k+2}(-1)^n x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^2(-1)^n}{(2n+1)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k+2}(-1)^n x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}}$$

On va maintenant montrer la sommabilité de la famille double pour utiliser Fubini.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k+2} x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{8x^2}{(2n+1)^3 \left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2}\right)} = \frac{8x^2}{(2n+1)^3 - 4x^2(2n+1)}$

De plus la série $\sum_{n \geq 0} \frac{8x^2}{(2n+1)^3 - 4x^2(2n+1)}$ converge car $\frac{8x^2}{(2n+1)^3 - 4x^2(2n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{n^3}$ si $x \neq 0$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k \geq 1} \left| \frac{2^{2k+2}(-1)^n x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} \right|$ converge

et la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{2^{2k+2}(-1)^n x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} \right|$ converge

Ainsi la famille $\left(\frac{2^{2k+2}(-1)^n x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} \right)_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ donc selon Fubini

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^2(-1)^n}{(2n+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2k+2}(-1)^n x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}}$$

on peut alors conclure que $\boxed{\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \right) 2^{2k+2} x^{2k}}$

Remarque : on n'a pas la sommabilité de la famille indexée sur \mathbb{N}^2 car la série $\sum_{n \geq 0} \frac{2^2(-1)^n}{2n+1}$ ne converge pas absolument.

18c. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a $x/\pi \in]-1/2, 1/2[$ donc selon la question précédente :

$$v(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \right) 2^{2k+2} \frac{x^{2k}}{\pi^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \right) \frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}} x^{2k}$$

Ainsi v est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors par unicité du développement en série entière : $\frac{E_{2k}}{(2k)!} = \frac{v^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \right) \frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}}$.

d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!} E_{2k}$

19a. Les séries entières $\sum_{k \geq 0} \frac{E_{2k} x^{2k}}{(2k)!}$ et $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ ont respectivement pour sommes v et \cos de rayons $\geq \pi/2$.

Ainsi par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on a pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$1 = \cos(x)v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{E_{2k} x^{2k}}{(2k)!} \times \frac{(-1)^{n-k} x^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2n)!}{(2n-2k)!(2k)!} E_{2k} \right) x^{2n}$$

Par unicité du développement en série entière, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$

on a $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} E_{2k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2n)!}{(2n-2k)!(2k)!} E_{2k} = 0$

Par définition on a $E_0 = v(0) = 1$

Puis $0 = (-1)^0 \binom{2}{0} E_0 + (-1)^1 \binom{2}{2} E_2 = 1 - E_2$ donc $E_2 = 1$

et $0 = (-1)^0 \binom{4}{0} E_0 + (-1)^1 \binom{4}{2} E_2 + (-1)^2 \binom{4}{4} E_4$

donc $0 = 1 - 6 + E_4$ donc $E_4 = 5$

19b. Si X est une variable aléatoire suivant la loi zêta de paramètre $s = 3$. Alors selon 9(c)

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2 \times 1 + 1}} = \frac{\pi^{2 \times 1 + 1}}{2^{2 \times 1 + 2} (2 \times 1)!} E_{2 \times 1} = \frac{\pi^3}{2^5}$$

donc lorsque le paramètre est 3, $\mathbb{E}(g(X)) = \frac{\pi^3}{32}$

Si le paramètre est $s = 5$, alors

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2 \times 2 + 1}} = \frac{\pi^{2 \times 2 + 1}}{2^{2 \times 2 + 2} (2 \times 2)!} E_{2 \times 2} = \frac{\pi^5}{2^6 \times 4!} \times 5$$

Si le paramètre est $s = 5$ $\mathbb{E}(g(X)) = \frac{5\pi^5}{2^9 \times 3}$