A. Préliminaires

1. Je note $(\mathrm{X}+1)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \mathrm{X}^k$ où pour $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k = \binom{n}{k}$ selon la formule du binôme.
   Selon le cours, le coefficient de degré n du produit $(\mathrm{X}+1)^n(\mathrm{X}+1)^n$ est
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$
   or le coefficient de degré n de $(\mathrm{X}+1)^{2n} = (\mathrm{X}+1)^n(\mathrm{X}+1)^n$ est $\binom{2n}{n}$ selon la formule du binôme.
   On en déduit que $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$
2. D'après Stirling, on a $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ Ainsi
   $$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$
   donc $\boxed{\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}}$
3. Soit $\alpha > 0$. On note la fonction $f : t \longmapsto 1/t^\alpha$ qui est continue, décroissante et positive sur $]0, +\infty[$.
   Ainsi $\forall k \geqslant 2$, $\int_k^{k+1} f \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f$ et $\int_1^2 f \leqslant f(1) = 1$ donc
   $$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$
   Or pour $\mathrm{A} > 0$, on a $\int_1^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{t=1}^{t=\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{A}^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$. donc
   $$\frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$
   Si $\alpha \in]0, 1[$, on a $1-\alpha > 0$ et $n^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
   donc en utilisant le théorème des gendarmes et les théorèmes généraux, on obtient :
   $$\frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
   d'où $\boxed{\text{si } \alpha \in]0,1[\text{, on a } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$
   Si $\alpha > 1$, on obtient pour $\mathrm{N} \geqslant n \geqslant 1$:
   $$\int_{n+1}^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

la fonction f est intégrable sur $[1,+\infty[$ et la série étant convergente, par passage à la limite, on a :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

or $1-\alpha<0$ ainsi pour $\mathrm{A} \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{t=\mathrm{A}}^{t\to+\infty} = 0 - \frac{\mathrm{A}^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)\mathrm{A}^{\alpha-1}}$ donc

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Comme pour le cas précédent, on conclut que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$

4. Soir $x \in [2,+\infty[$. Les fonctions $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ et $g : t \longmapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2,x]$ de dérivées respectives $f' : t \mapsto \dfrac{-1}{t(\ln(t))^2}$ et $g : t \longmapsto 1$. Par théorème d'intégration par parties, on a donc

$$\mathrm{I}(x) = \left[\frac{t}{\ln(t)}\right]_{t=2}^{t=x} + \int_2^x \frac{t\mathrm{d}t}{t\,(\ln(t))^2}$$

On a bien la relation $\boxed{\mathrm{I}(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{2}{\ln(2)} + \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2}}$

Par croissances comparées, $tf(t) = \dfrac{t}{\ln(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(f(t)\right)$

Par comparaison de fonctions positives, la fonction f étant positive sur $[2,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ diverge.

De plus $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $f(t)^2 \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(f(t)\right)$

Par intégration des relations de comparaison dans le cas divergent avec une fonction de référence positive, on obtient :

$$\int_2^x f^2 \underset{x\to+\infty}{=} \int_2^x f \quad \text{ie} \quad \boxed{\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{I}(x))}$$

donc lorsque x tend vers $+\infty$, on a $\dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{2}{\ln(2)} = \mathrm{I}(x) + \mathrm{o}(\mathrm{I}(x))$

d'où $\mathrm{I}(x) \sim \dfrac{x}{\ln(x)} - \dfrac{2}{\ln(2)}$ or $\dfrac{x}{\ln(x)} \longrightarrow +\infty$

On en déduit $\boxed{\mathrm{I}(x) \sim \dfrac{x}{\ln(x)} \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty}$

5. D'après le cours, on a $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha-i)}{n!} x^n}$ avec la convention $\displaystyle\prod_{i=0}^{-1} \star = 1$.

Pour $\alpha = -1/2$, en ayant posé $a_n = (-1)^n \dfrac{\prod_{i=0}^{n-1}(-1/2-i)}{n!}$, cela devient

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+(-x))^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Pour $n = 0$, on a $a_0 = 1$ et $\dfrac{\binom{2\times 0}{0}}{4^0} = \dfrac{1}{1} = 1$ et pour $n \geqslant 1$

$$a_n = (-1)^n \frac{(-1)^n}{n!2^n} \prod_{i=0}^{n-1}(2i+1) = \frac{1}{n!2^n} \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} k}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(2i)} = \frac{(2n)!}{(n!2^n)^2} = \frac{\dbinom{2n}{n}}{4^n}$$

On en déduit la formule : $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n}$

B. Marches aléatoires, récurrence

Je note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé.

6. Les suites $(\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d)1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathbb{P}(\mathrm{R} = n)1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
 Ainsi selon le lemme d'Abel, les rayon de convergences les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d)x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\mathrm{R} = n)x^n$ sont $\geqslant 1$ ie $\boxed{\text{les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1}}$
 La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence donc $\boxed{\text{les fonctions F et G sont définies et de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-1,1[}$

 Comme R est à valeur dans $\mathbb{N}^* \bigcup \{+\infty\}$, on a $\Omega \setminus (\mathrm{R} = +\infty) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\mathrm{R} = n)$

 On a donc l'union disjointe $(\mathrm{R} \neq +\infty) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{R} = n)$ car $(\mathrm{R} = 0) = \emptyset$

 Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{R} \neq +\infty) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{R} = n)$ en particulier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\mathrm{R} = n)$ converge.
 Pour $n \in \mathbb{N}$, je note $g_n : x \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{R} = n)x^n$.
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[-1,1]$ (i) et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1],\ |g_n(x)| \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{R} = n)$$

 or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(\mathrm{R} = n)$ converge

 Ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$ de somme G (ii)

 D'après le cours, avec (i) et (ii), $\boxed{\text{G est définie et continue sur } [-1,1]}$

 de plus $\boxed{\mathrm{G}(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{R} = n) 1^n = \mathbb{P}(\mathrm{R} \neq +\infty)}$

7. Soit $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$.
 Si $k = 0$, on a $(\mathrm{R} = 0) = \emptyset$ donc $(\mathrm{S}_n = 0_d) \cap (\mathrm{R} = 0)) = \emptyset$
 donc $\mathbb{P}((\mathrm{S}_n = 0_d) \cap (\mathrm{R} = 0)) = 0 = \mathbb{P}(\mathrm{R} = 0) = \mathbb{P}(\mathrm{R} = 0)\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-0} = 0_d)$
 Si $k \geqslant 1$, on remarque que $(\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k = 0_d) = \left(\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} \mathrm{X}_i = 0_d\right)$ et $(\mathrm{R} = k) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{X}_i = 0_d\right) \bigcap \left(\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{j} \mathrm{X}_i \neq 0_d\right)\right)$

avec la convention $\bigcap_{j=1}^{0} \star_j = \Omega$ pour le cas $k=1$. Ainsi

$$(\mathrm{R}=k)=\left(\left(\sum_{i=1}^{1}\mathrm{X}_i,\sum_{i=1}^{2}\mathrm{X}_i,\dots,\sum_{i=1}^{k-1}\mathrm{X}_i,\sum_{i=1}^{k}\mathrm{X}_i\right)\in\left(\mathbb{Z}^d\setminus\{0_d\}\right)^{k-1}\times\{0_d\}\right)$$

Comme $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_k,\mathrm{X}_{k+1},\dots,\mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes, alors selon le lemme des coalitions les variables aléatoires $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n}\mathrm{X}_i$ et $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{1}\mathrm{X}_i,\sum_{i=1}^{2}\mathrm{X}_i,\dots,\sum_{i=1}^{k-1}\mathrm{X}_i,\sum_{i=1}^{k}\mathrm{X}_i\right)$ sont indépendantes.
D'où les événements $(\mathrm{R}=k)$ et $(\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_k=0_d)$ sont indépendants donc

$$\mathbb{P}\left((\mathrm{S}_n=0_d)\bigcap(\mathrm{R}=k)\right)=\mathbb{P}\left((\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_k=0_d)\bigcap(\mathrm{R}=k)\right)=\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_k=0_d\right)\mathbb{P}(\mathrm{R}=k)\quad(*)$$

Soit $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-k}\in\mathbb{Z}^d$, comme $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, on a

$$\mathbb{P}\left((\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_{n-k})=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-k})\right)=\prod_{i=1}^{n-k}\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_i=\varepsilon_i\right)=\prod_{i=1}^{n-k}\mathbb{P}\left(\mathrm{X}=\varepsilon_i\right)=\prod_{i=k}^{n}\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_i=\varepsilon_i\right)$$

d'où $\mathbb{P}\left((\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_{n-k})=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-k})\right)=\mathbb{P}\left((\mathrm{X}_{k+1},\dots,\mathrm{X}_n)=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-k})\right)$
donc $(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_{n-k})\sim(\mathrm{X}_{k+1},\dots,\mathrm{X}_n)$ ie les vecteurs $(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_{n-k})$ et $(\mathrm{X}_{k+1},\dots,\mathrm{X}_n)$ suivent la même loi.
Il reste à établir que $\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_k\sim\mathrm{S}_{n-k}$. Je vais proposer trois méthodes pour le faire. La première me paraît plus intuitive, la deuxième plus simple dans le cas présent et la troisième s'effectue par récurrence.
Pour la première méthode, établissons le lemme suivant : :

Soit $\mathrm{Z}\sim\mathrm{Y}$ deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ à valeurs dans E et $f\in\mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ alors $f(\mathrm{Z})\sim f(\mathrm{Y})$.

Je note $\Lambda=\mathrm{Z}(\Omega)\cup\mathrm{Y}(\Omega)$ qui est finie ou dénombrable par réunion finie d'ensembles finies dénombrables.
Soit $\lambda\in\Lambda$. Il suffit d'établir que $\mathbb{P}\left(f(\mathrm{Z})=\lambda\right)=\mathbb{P}\left(f(\mathrm{Y})=\lambda\right)$.
Avec la convention qu'une réunion indexée par l'ensemble vide est vide, on a :

$$(f(\mathrm{Z})=\lambda)=\left(\bigcup_{\substack{f(z)=\lambda\\ z\in\Lambda}}(\mathrm{Z}=z)\right)\bigcup\left(\bigcup_{\substack{f(z)=\lambda\\ z\in\mathrm{E}\setminus\Lambda}}(\mathrm{Z}=z)\right)=\bigcup_{\substack{f(t)=\lambda\\ t\in\Lambda}}(\mathrm{Z}=t)\ \text{(réunion dénombrable disjointe)}$$

En faisant le même travail sur Y et en utilisant qu'icelle suit la même loi que Z, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(f(\mathrm{Z})=\lambda\right)=\sum_{\substack{f(t)=\lambda\\ t\in\Lambda}}\mathbb{P}(\mathrm{Z}=t)=\sum_{\substack{f(t)=\lambda\\ t\in\Lambda}}\mathbb{P}(\mathrm{Y}=t)=\mathbb{P}\left(f(\mathrm{Y})=\lambda\right)$$

On applique le lemme aux variables aléatoires de même loi $\mathrm{Z}=(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_{n-k})$ et $\mathrm{Y}=(\mathrm{X}_{k+1},\dots,\mathrm{X}_n)$ et à l'application $\displaystyle(x_1,\dots,x_{n-k})\in\left(\mathbb{Z}^d\right)^{n-k}\mapsto\sum_{i=1}^{n-k}x_i\in\mathbb{Z}^d$.

On peut conclure que $\displaystyle\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_k=\sum_{i=k+1}^{n}\mathrm{X}_i\sim\sum_{i=1}^{n-k}\mathrm{X}_i=\mathrm{S}_{n-k}$

d'où avec $(*)$, on a bien $\boxed{\mathbb{P}((\mathrm{S}_n = 0_d) \cap (\mathrm{R} = k)) = \mathbb{P}(\mathrm{R} = k)\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-k} = 0_d)}$ dans tous les cas.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour $k > n$, $(\mathrm{R} = k) \cap (\mathrm{S}_n = 0_d) = \emptyset = (\mathrm{R} = +\infty) \cap (\mathrm{S}_n = 0_d)$
La famille $((\mathrm{R} = k))_{k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}}$ est un système complet d'événements ainsi selon la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d) = \mathbb{P}\left((\mathrm{R} = +\infty) \cap (\mathrm{S}_n = 0_d)\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left((\mathrm{R} = k) \cap (\mathrm{S}_n = 0_d)\right) = 0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left((\mathrm{R} = k) \cap (\mathrm{S}_n = 0_d)\right)$$

Avec l'égalité précédente, on en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{R} = k)\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-k} = 0_d)}$

Deuxième méthode : Je note $\Lambda = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n-k}) \in \left(\mathbb{Z}^d\right)^{n-k} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n-k} x_i = 0_d \right\}$.

L'ensemble Λ est fini ou dénombrable car $\left(\mathbb{Z}^d\right)^{n-k}$ est dénombrable en tant que produit d'ensembles dénombrables. Comme $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n-k}) \sim (\mathrm{X}_{k+1}, \ldots, \mathrm{X}_n)$, on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k = 0) = \mathbb{P}\left((\mathrm{X}_{k+1}, \ldots, \mathrm{X}_n) \in \Lambda\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{P}\left((\mathrm{X}_{k+1}, \ldots, \mathrm{X}_n) = \lambda\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{P}\left((\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n-k}) = \lambda\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{n-k} = 0\right)$$

Encore une troisième méthode pour établir que $(\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k) \sim \mathrm{S}_{n-k}$: on montre un autre lemme.

Soit A et B deux variables aléatoires réelles indépendante ayant même loi respectivement que les deux variables aléatoires indépendantes A' et B' sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ alors $\mathrm{A} + \mathrm{B} \sim \mathrm{A}' + \mathrm{B}'$

On remarque que $\mathrm{E} = \mathrm{A}(\Omega) \cup \mathrm{A}'(\Omega)$ et $\mathrm{F} = \mathrm{B}(\Omega) \cup \mathrm{B}'(\Omega)$ sont des ensembles dénombrables.
Ensuite soit $x \in \mathrm{E} + \mathrm{F}$. On a $(\mathrm{A} + \mathrm{B} = x) = \bigcup_{a \in \mathrm{E}} (\mathrm{A} = a, \mathrm{B} = x - a)$
Donc par réunion disjointe et par indépendances :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A} + \mathrm{B} = x) = \sum_{a \in \mathrm{E}} \mathbb{P}\left(\mathrm{A} = a\right) \mathbb{P}\left(\mathrm{B} = x - a\right) = \sum_{a \in \mathrm{E}} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}' = a\right) \mathbb{P}\left(\mathrm{B}' = x - a\right) = \mathbb{P}(\mathrm{A}' + \mathrm{B}' = x)$$

On procède ensuite par récurrence sur $m = n - k$, pour conclure. L'initialisation est vraie pour $m = 1$ et pour l'hérédité, on utilise le lemme.

8. Par produit de Cauchy de séries entières de rayon 1, on a

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \mathrm{F}(x)\mathrm{G}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{R} = k)\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-k} = 0_d) \right) x^n$$

Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0} \mathbb{P}(\mathrm{R} = k)\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-k} = 0_d) = \mathbb{P}(\mathrm{R} = 0)\mathbb{P}(\mathrm{S}_0 = 0_d) = 0$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{R} = k)\mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-k} = 0_d) = \mathbb{P}(\mathrm{R} = 0)\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d) + \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d)$$

$$\text{donc}\quad \forall x \in]-1,1[\,,\ \mathrm{F}(x)\mathrm{G}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d)x^n = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d)x^n = -1 + \mathrm{F}(x)$$

d'où $\boxed{\forall x \in]-1,1[\,,\ \mathrm{F}(x) = 1 + \mathrm{F}(x)\mathrm{G}(x)}$ et ainsi $\forall x \in]-1,1[\,,\ \mathrm{F}(x)\left(1 - \mathrm{G}(x)\right) = 1$

d'où $\forall x \in]-1,1[\,,\ 1 - \mathrm{G}(x) \neq 0$ et $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{G}(x)}$

Si $\mathbb{P}(\mathrm{R} \neq +\infty) = 1$ alors selon 6, on a $\forall x \in]-1,1[\,,\ \mathrm{G}(x) \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{R} = n) = \mathbb{P}(\mathrm{R} \neq +\infty) = 1$

donc $\forall x \in]-1,1[\,,\ 1 - \mathrm{G}(x) \geqslant 0$ or $\mathrm{G}(1) = 1$ et G est continue sur $[-1,1]$, donc $1 - \mathrm{G}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0^+$

donc $\boxed{\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty \text{ si } \mathbb{P}(\mathrm{R} \neq +\infty) = 1}$

Si $\mathbb{P}(\mathrm{R} \neq +\infty) \neq 1$ alors selon 6, $1 - \mathrm{G}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 1 - \mathbb{P}(\mathrm{R} \neq +\infty) > 0$

$\boxed{\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \dfrac{1}{1 - \mathbb{P}(\mathrm{R} \neq +\infty)} \text{ si } \mathbb{P}(\mathrm{R} \neq +\infty) \neq 1}$

9. Soit $\mathrm{A} > 0$. Comme la série à termes positifs $\sum c_k$ diverge, la suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$.

   Ce qui nous fournit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \geqslant \mathrm{A} + 1$.

   Comme la fonction polynomiale $\varphi : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} c_k x^k$ est continue sur $[-1,1]$ et que $\varphi(1) \geqslant \mathrm{A} + 1$,

   ceci nous fournit alors $\alpha \in]0,1[$ tel que $\forall x \in]1-\alpha, 1[$, $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} c_k x^k > \mathrm{A}$

   Comme tous les termes sont positifs, on a donc

$$\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in]0,1[\,,\ \forall x \in]1-\alpha,1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > \mathrm{A}$$

   ce qui signifie : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = +\infty}$

10. **$\Rightarrow$:** On suppose que $\sum \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d)$ est divergente.

    Alors la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d)1^n$ étant divergente, le rayon de la série entière $\sum \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d)x^n$ est de rayon inférieure ou égale à 1.

    Ainsi avec 6, cette série entière a pour rayon 1 de somme F or les coefficients sont dans $\mathbb{R}^+$
    donc d'après la question précédente $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.

    Ainsi d'après 8, nécessairement $\mathbb{P}(\mathrm{R} \neq +\infty) = 1$.

    $\Leftarrow$: On suppose que $\mathbb{P}(\mathrm{R} \neq +\infty) = 1$.

    On remarque que $\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$ d'après la question 8.

    Par l'absurde si la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d)$ était convergente. Comme il s'agit d'une série à termes positifs,

    cela nous fournirait $\mathrm{M} > 0$ tel que $\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d) \leqslant \mathrm{M}$ d'où

$$\forall x \in [0,1[\,,\ \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d)x^n \leqslant \mathrm{M}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ à x fixé, cela donne :

$$\forall x \in [0,1[\,,\ \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d)x^n \leqslant \mathrm{M}$$

Ainsi F serait majorée sur $[0,1[$ ce qui est en contradiction avec la limite en 1^-.

On bien montré que $\boxed{\text{la série } \sum \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0_d) \text{ est divergente si et seulement si } \mathbb{P}(\mathrm{R} \neq +\infty) = 1}$

11. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On remarque que : $(\mathrm{Y}_i = 1) = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{i-1} (\mathrm{S}_i \neq \mathrm{S}k)$ donc

$$(\mathrm{Y}_i = 0) = \bigcup_{k=0}^{i-1} (\mathrm{S}_i = \mathrm{S}k) = \bigcup_{k=0}^{i-1} \left(\sum_{j=k+1}^{i} \mathrm{X}_j = 0_d \right)$$

De façons analogues à la question 7, on montre que $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_i) \sim (\mathrm{X}_i, \ldots, \mathrm{X}_1)$ puis à l'aide de la fonction $(x_1, \ldots x_i) \in \left(\mathbb{Z}^d\right)^i \mapsto \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{i} x_j, \ldots, x_{i-1} + x_i, x_i \right) \in \left(\mathbb{Z}^d\right)^i$ on établit que

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{Y}_i = 0\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{i-1} \left(\sum_{j=k+1}^{i} \mathrm{X}_j = 0_d \right) \right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\ell=1}^{i} \left(\sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{X}_j = 0_d \right) \right)$$

or $\displaystyle\bigcup_{\ell=1}^{i} \left(\sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{X}_j = 0_d \right) = \bigcup_{\ell=1}^{i} (\mathrm{S}_\ell = 0_d) = (\mathrm{R} \leqslant i)$

ainsi $\mathbb{P}\left(\mathrm{Y}_i = 0\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{R} \leqslant i\right)$ en passant aux événements contraires, on obtient : $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{Y}_i = 1) = \mathbb{P}(\mathrm{R} > i)}$

On précise que $(\mathrm{R} > i) = (\mathrm{R} = +\infty) \bigcup (\mathrm{R} \in \{k \in \mathbb{N} \mid k > i\})$.

Or par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que $\mathrm{N}_n = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i$.

Les Y_i suivant des lois de Bernoulli, on a donc existences des membres et les inégalités :

$$\mathbb{E}(\mathrm{N}_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathrm{Y}_i\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{Y}_i = 1\right)$$

On en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{N}_n) = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{R} > i)}$

12. On remarque que $((\mathrm{R} > i))_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion. Ainsi par continuité décroissante, on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{R} > i) \xrightarrow[i \to +\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} (\mathrm{R} > j) \right) = \mathbb{P}(\mathrm{R} = +\infty)$$

Or d'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{N}_n)}{n} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{R} > i)$.

À l'aide du théorème de Cesàro, on peut conclure que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(\mathrm{N}_n)}{n} = \mathbb{P}(\mathrm{R} = +\infty)}$

C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

13. Soit $\omega \in \Omega$. On remarque que $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{X}_i(\omega) \equiv 1\ [2]$ donc $\forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_p(\omega) \equiv p\ [2]$
d'où $\mathrm{S}_{2n+1}(\omega) \equiv 1\ [2]$ ainsi $\mathrm{S}_{2n+1}(\omega) \neq 0$
On vient de montrer que $(\mathrm{S}_{2n+1} = 0) = \emptyset$ d'où $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n+1} = 0) = 0}$

Méthode 1 pour $\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0)$ (par dénombrement) : Je note $\Lambda = \left\{ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n}) \in \{-1,1\}^{2n} \;\middle|\; \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0 \right\}$.

Comme les X_i sont presque sûrement à valeurs dans $\{-1,1\}$, on a alors

$$(\mathrm{S}_{2n} = 0) = \left(\sum_{i=1}^{2n} \mathrm{X}_i = 0 \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} ((\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{2n}) = \lambda)$$

comme la réunion est finie et disjointe on a donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{P}\left((\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{2n}) = \lambda\right)$$

Soit $\lambda \in \Lambda$. On écrit $\lambda = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n})$.
On remarque que nécessairement $|\{i \in [\![1, 2n]\!] \mid \varepsilon_i = 1\}| = |\{i \in [\![1, 2n]\!] \mid \varepsilon_i = -1\}| = n$
donc par indépendance mutuelle des X_i qui suivent toutes la même loi que X, on a :

$$\mathbb{P}\left((\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{2n}) = \lambda\right) = \prod_{i=1}^{2n} \mathbb{P}\left(\mathrm{X} = \varepsilon_i\right) = p^n q^n = (pq)^n$$

De plus pour caractériser un élément de Λ, il suffit de choisir la position des n « 1 » d'un $2n$-uplet de $\{-1,1\}^{2n}$; ainsi $|\Lambda| = \dbinom{2n}{n}$ donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (pq)^n = |\Lambda| \times (pq)^n = \binom{2n}{n} (pq)^n$$

Méthode 2 pour $\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0)$ (utilisation d'une loi binomiale) : Je note pour $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Y}_i = \dfrac{1 + \mathrm{X}_i}{2}$ de sorte que $\mathrm{Y}_i \sim \mathcal{B}(p)$ (loi de Bernoulli de paramètre p).
On remarque que par lemme des coalitions que les Y_i sont mutuellement indépendants.
Je note alors $\mathrm{T}_{2n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \mathrm{Y}_i$ de sorte que $\mathrm{T}_{2n} \sim \mathcal{B}(2n, p)$. On remarque

$$\mathrm{T}_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1 + \mathrm{X}_i}{2} = n + \frac{\mathrm{S}_{2n}}{2}$$

donc $(\mathrm{S}_{2n} = 0) = (\mathrm{T}_{2n} = n)$. Ainsi

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_{2n} = n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^{2n-n} = \binom{2n}{n} p^n q^n$$

On a bien justifié l'égalité $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n}=0)=\binom{2n}{n}(pq)^n}$

14. Soit $x\in]-1,1[$. On a, à l'aide de 13, en passant par des sommes partielles :

$$\mathrm{F}(x)=0+\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n}=0)x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\left(pqx^2\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\left(4pqx^2\right)^n$$

On a $pq=p(1-p)$ et $p\in]0,1[$
or une étude de la fonction $t\mapsto t(1-t)$, montre que $\forall t\in[0,1],\ 0\leqslant t(1-t)\leqslant 1/4$ (maximum atteint en $1/2$).
Comme $x^2\in[0,1[$, alors on a $4pqx^2\in[0,1[$.
donc en utilisant la question 5, on obtient $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}\neq 0$
Ainsi selon 8, on a $\mathrm{G}(x)=1-\dfrac{1}{\mathrm{F}(x)}$ d'où $\boxed{\mathrm{G}(x)=1-\sqrt{1-4pqx^2}}$
Selon 6, G est continue sur $[-1,1]$ et on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{R}\neq+\infty)=\mathrm{G}(1)=\lim_{x\to1^-}\mathrm{G}(x)=1-\sqrt{1-4pq}=1-\sqrt{1-4p+4p^2}=1-\sqrt{(1-2p)^2}$$

donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{R}=+\infty)=1-\mathbb{P}(\mathrm{R}\neq+\infty)=|2p-1|$$

or $p-q=p-(1-p)=2p-1$
On a donc $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{R}=+\infty)=|p-q|}$ Puis en utilisant 5, on a

$$\sqrt{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(1/2-i)}{n!}(-1)^nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(2i-1)}{2^nn!}x^n=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(2i-1)}{2^nn!}x^n=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}\left((n-1)!\right)2^nn!}x^n$$

donc $\sqrt{1-x}=1-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\binom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}n}x^n$
Il eût été sans doute plus simple de primitiver la série entière du 5 sur son intervalle ouvert de convergence
comme $4pqx^2\in]-1,1[$, on a alors

$$\mathrm{G}(x)=1-\sqrt{1-4pqx^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\binom{2n-2}{n-1}4^n(pq)^n}{2^{2n-1}n}x^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n}{n}x^{2n}$$

On remarque que R est à valeurs dans $2\mathbb{N}^*\bigcup\{+\infty\}$ car $\forall j\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2j+1}=0)=0$
Par unicité du développement en séries entières, on obtient la loi de R :

$$\boxed{\text{R est à valeurs dans } 2\mathbb{N}^*\bigcup\{+\infty\} \text{ et } \mathbb{P}(\mathrm{R}=+\infty)=|p-q| \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{R}=2n)=\frac{2\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n}{n}}$$

15. Comme $p=q=1/2$, quand $n\longrightarrow+\infty$, on a $\mathbb{P}(\mathrm{R}=2n)=\dfrac{2\binom{2n-2}{n-1}}{n4^n}$.
Or d'après 2, $\dbinom{2n-2}{n-1}\sim\dfrac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n-1}}\sim\dfrac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$

donc $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{R}=2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}}$

On remarque que $\mathbb{P}(\mathrm{R}=+\infty) = |p-q| = 0$ donc R est presque sûrement à valeurs dans $2\mathbb{N}^*$.

On a pour $p \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{R} > 2p) = (\mathrm{R} > 2p+1) = \displaystyle\bigcap_{k=p+1}^{+\infty} (\mathrm{R}=2k)$ (union disjointe) donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{R} > 2p) = \mathbb{P}(\mathrm{R} > 2p+1) = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{R}=2k)$$

Ainsi en utilisant la sommation des relation de comparaison dans le cas convergent avec une série de référence à termes positifs et avec 3, on a quand p tend vers $+\infty$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{R} > 2p) = \mathbb{P}(\mathrm{R} > 2p+1) \sim \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}} \sim \frac{1}{(3/2-1)2\sqrt{\pi}p^{3/2-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}p^{1/2}}$$

donc $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(2p)^{1/2}\mathbb{P}(\mathrm{R} > 2p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$ et $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(2p+1)^{1/2}\mathbb{P}(\mathrm{R} > 2p+1) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$

ainsi par théorème de cours $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} i^{1/2}\mathbb{P}(\mathrm{R} > i) \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1$ donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{R} > i) \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}i^{1/2}}$$

À nouveau en utilisant 3 et les sommations des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{R} > i) \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}n^{1-1/2}}{\sqrt{\pi}(1-1/2)}$$

Comme $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\mathbb{E}(\mathrm{N}_n) = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{R} > i)$ selon 11

On en déduit l'équivalent $\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{N}_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}}}$

D. Un résultat asymptotique

16. On a, par décroissance de (a_p), et stricte positivité de (b_p) :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} = a_n \sum_{j=0}^{n} b_j = a_n \mathrm{B}_n$$

d'où $\boxed{a_n \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{B}_n}}$ car $\mathrm{B}_n > 0$ et

$$1 = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{m-k} + \sum_{k=n}^{m} a_k b_{m-k} \leqslant a_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{m-k} + a_n \sum_{k=n}^{m} b_{m-k}$$

or $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} b_{m-k} = \sum_{j=0}^{m-n} b_j$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_{m-k} = \sum_{j=m-n+1}^{m} b_j = \mathrm{B}_m - \mathrm{B}_{m-n}$

d'où $\boxed{1 \leqslant a_n \mathrm{B}_{m-n} + a_0(\mathrm{B}_m - \mathrm{B}_{m-n})}$

17. Pour n assez grand, on a $m_n > n$ donc à l'aide de la question précédente et par stricte positivité de (B_p), on a

$$\frac{1 - a_0(\mathrm{B}_{m_n} - \mathrm{B}_{m_n-n})}{\mathrm{B}_{m_n-n}} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{\mathrm{B}_n}$$

donc

$$\frac{\mathrm{B}_n}{\mathrm{B}_{m_n-n}} \left(1 - a_0(\mathrm{B}_{m_n} - \mathrm{B}_{m_n-n})\right) \leqslant a_n \mathrm{B}_n \leqslant 1$$

Par hypothèse on a $\dfrac{\mathrm{B}_n}{\mathrm{B}_{m_n-n}} \left(1 - a_0(\mathrm{B}_{m_n} - \mathrm{B}_{m_n-n})\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Ainsi selon les gendarmes $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{B}_n}}$

18. En utilisant une comparaison série/intégrale avec la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{C}}{t}$ qui est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{C}}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{C}\ln(n)$ puis par sommation des relation de comparaisons, on a

$$\mathrm{B}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{C}\ln(n)$$

d'où $\mathrm{B}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{C}\ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right)$

Je pose $m_n = \lfloor n\ln(n) \rfloor$ si $n \geqslant 1$ et $m_0 = 0$.
Pour $n \geqslant \mathrm{e}^2$, on a $m_n \geqslant 2n > n$ (i)
De plus pour n assez grand, on a $n\ln(n) \leqslant m_n \leqslant n\ln(n) + 1$
donc quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $m_n \sim n\ln(n)$
puis $m_n - n = n\ln(n) - n + \mathrm{o}\left(n\ln(n)\right) = n\ln(n) + \mathrm{o}\left(n\ln(n)\right)$ donc

$$\mathrm{B}_{m_n-n} = \mathrm{C}\ln\left(m_n - n\right) + \mathrm{o}\left(\ln\left(m_n - n\right)\right)$$

Or $\ln\left(m_n - n\right) = \ln\left(n\ln(n) + \mathrm{o}\left(n\ln(n)\right)\right) = \ln(n) + \ln(\ln(n)) + \ln(1 + \mathrm{o}(1)) = \ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right)$. Ainsi

$$\mathrm{B}_{m_n-n} \sim \mathrm{C}\ln(n) \sim \mathrm{B}_n \qquad \text{(ii)}$$

Et enfin $\mathrm{B}_{m_n} - \mathrm{B}_{m_n-n} = \displaystyle\sum_{k=m_n-n+1}^{m_n} b_k$

L'équivalent, $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{C}}{n}$,

nous fournit $\mathrm{A} \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k \geqslant \mathrm{A},\ 0 < b_k \leqslant \dfrac{2\mathrm{C}}{k}$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} m_n - n + 1 = +\infty$ ceci nous fournit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow m_n - n + 1 \geqslant \mathrm{A}$

Ainsi pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on a

$$0 \leqslant \mathrm{B}_{m_n} - \mathrm{B}_{m_n-n} \leqslant \sum_{k=m_n-n+1}^{m_n} \frac{2\mathrm{C}}{k} \leqslant \frac{2\mathrm{C}n}{km_n - n + 1}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2\mathrm{C}n}{km_n - n + 1} = 0$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{B}_{m_n} - \mathrm{B}_{m_n-n} = 0$ (iii)

Avec (i), (ii) et (iii), les hypothèses de la question 17 sont vérifiées et donc on a bien $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{C}\ln(n)}}$

E. La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$: un théorème d'Erdös et Dvorestsky

19. Je considère H somme de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}\left(\mathrm{R}>k\right)x^k$.

    On montre comme 6, que le rayon de convergence est $\geqslant 1$.

    Soit $x\in]-1,1[$. On sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ (somme de série entière de rayon 1). De plus

    $$\forall k\in\mathbb{N},\ \Omega\setminus(\mathrm{R}>k)=(\mathrm{R}\leqslant k)=\bigcup_{i=0}^{k}(\mathrm{R}=i)\quad\text{(union disjointe)}$$

    On a donc existences des membres et l'égalité :

    $$\mathrm{H}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\mathrm{R}\leqslant n\right)x^n=\frac{1}{1-x}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}\left(\mathrm{R}=i\right)\right)x^n=\frac{1}{1-x}-\frac{\mathrm{G}(x)}{1-x}$$

    On a reconnu un produit de Cauchy de deux séries entières de rayon 1.
    En effectuant un nouveau produit de Cauchy puis en utilisant 8, on a

    $$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{S}_k=0_d)\mathbb{P}(\mathrm{R}>n-k)\right)x^n=\mathrm{F}(x)\mathrm{H}(x)=\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x)\mathrm{G}(x)}{1-x}=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$$

    Par unicité du développement en série entière au voisinage de 0, on a $\boxed{1=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(\mathrm{S}_k=0_d)\mathbb{P}(\mathrm{R}>n-k)}$

20. Pour $n=0$, on a $(\mathrm{S}_{2\cdot 0}=0_2)=(\mathrm{S}_0=0_2)=\Omega$ et on a bien $\left(\frac{\binom{2\cdot 0}{0}}{4^0}\right)^2=1=\mathbb{P}(\Omega)$.

    On suppose désormais que $n>0$.

    Méthode 1 pour $\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n}=0)$ (par dénombrement) : Je note $e_1=(1,0)$ et $e_2=(0,1)$ et

    $$\Lambda=\left\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n})\in\{e_1,-e_1,e_2,-e_2\}\;\middle|\;\sum_{j=0}^{2n}\varepsilon_j=0_2\right\}$$

    En faisant comme en 13, on peut montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n}=0)=|\Lambda|\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2n}$

    Pour $k\in[\![0,n]\!]$, je note $\Lambda_k=\{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n})\in\Lambda\mid\operatorname{card}(\{i\in[\![1,2n]\!]\mid\varepsilon_i=e_1\})=k\}$ de sorte que l'on ait l'union disjointe

    $$\Lambda=\bigcup_{k=0}^{n}\Lambda_k\quad\text{puis}\quad|\Lambda|=\sum_{k=0}^{n}|\Lambda_k|$$

    Soit $k\in[\![0,n]\!]$. On va dénombrer les éléments de Λ_k.
    Pour caractériser un élément de cet ensemble, on commence par choisir les positions des e_1, puis des $-e_1$ et enfin des e_2 ; les places restantes seront attribuées aux $-e_2$.
    Parmi les places dévolues aux e_1, on choisit les k positions des e_1, on en trouve $\binom{2n}{k}$ possibles.
    Parmi les places dévolues aux $-e_1$, il y en a nécessairement k également pour que la somme soit nulle, on en trouve $\binom{2n-k}{k}$ possibles.

Il reste alors $2n-2k$ places à attribuer à parts égales aux e_2 et $-e_2$
Il y a donc $\binom{2n-2k}{n-k}$ possibilités pour les e_2. Ainsi

$$|\Lambda_k| = \binom{2n}{k}\times\binom{2n-k}{k}\times\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{(2n)!\cdot(2n-k)!\cdot(2n-2k)!}{(2n-k)!\cdot k!\cdot(2n-2k)!\cdot k!\cdot(n-k)!\cdot(n-k)!} = \binom{2n}{n}\times\left(\binom{n}{k}\right)^2$$

donc en utilisant la question 1 :

$$|\Lambda| = \binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\right)^2 = \binom{2n}{n}\times\binom{2n}{n}$$

.

Méthode 2 pour $\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n}=0)$ (utilisation de lois binomiales) : Pour $i\in\{1,2\}$ et $k\in\mathbb{N}^*$, je note $\pi_i : (a_1,a_2)\in\mathbb{Z}^2\longmapsto a_i\in\mathbb{Z}$ et $\mathrm{X}_k^{(i)}=\pi_i(\mathrm{X}_k)$. Puis je note $u_k=\mathrm{X}_k^{(1)}+\mathrm{X}_k^{(2)}$ et $v_k=\mathrm{X}_k^{(1)}-\mathrm{X}_k^{(2)}$ de sorte que u_k et v_k suivent des lois uniformes sur $\{-1,1\}$.

On remarque que $((u_k,v_k)=(1,1))=(\mathrm{X}=(1,0))$ donc

$$\mathbb{P}\left((u_k,v_k)=(1,1)\right)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}\left(u_k=1\right)\cdot\mathbb{P}\left(v_k=1\right)$$

On montre de même que

$$\forall(\varepsilon,\varepsilon')\in\{-1,1\}^2,\ \mathbb{P}\left((u_k,v_k)=(\varepsilon,\varepsilon')\right)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}\left(u_k=\varepsilon\right)\cdot\mathbb{P}\left(v_k=\varepsilon'\right)$$

d'où u_k et v_k sont des variables aléatoires sont indépendantes.
Je note aussi pour $m\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{U}_m=\sum_{k=1}^{m}u_k$ et $\mathrm{V}_m=\sum_{k=1}^{m}v_k$.
On remarque $(\mathrm{S}_{2n}=0_2)=(\mathrm{U}_{2n}=0)\bigcap(\mathrm{V}_{2n}=0)$
Montrons par récurrence sur $m\in\mathbb{N}^*$, l'indépendance de U_m et V_m.
<u>L'initialisation</u> a été établi pour $m=1$ car $\mathrm{U}_1=u_1$ et $\mathrm{V}_1=v_1$.
Pour <u>l'hérédité</u>, on considère $m\in\mathbb{N}^*$ tel que U_m et V_m soient indépendantes.
Soit $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{Z}$ et $a,b\in\{-1,1\}$. On a

$$((\mathrm{U}_m,u_{m+1})=(\mathrm{A},a),(\mathrm{V}_m,v_{m+1})=(\mathrm{B},b))=((\mathrm{U}_m,\mathrm{V}_m)=(\mathrm{A},\mathrm{B}),(u_{m+1},v_{m+1})=(a,b))$$

Avec le lemme des coalitions, on a l'indépendance de $(\mathrm{U}_m,\mathrm{V}_m)$ et de (u_{m+1},v_{m+1}) fonctions respectives de $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_m$ et de X_{m+1}. Ainsi :

$$\mathbb{P}\left[(\mathrm{U}_m,u_{m+1})=(\mathrm{A},a),(\mathrm{V}_m,v_{m+1})=(\mathrm{B},b)\right]=\mathbb{P}\left((\mathrm{U}_m,\mathrm{V}_m)=(\mathrm{A},\mathrm{B})\right)\cdot\mathbb{P}\left((u_{m+1},v_{m+1})=(a,b)\right)$$

Puis on a $\mathbb{P}\left[(\mathrm{U}_m,u_{m+1})=(\mathrm{A},a),(\mathrm{V}_m,v_{m+1})=(\mathrm{B},b)\right]=\mathbb{P}\left(\mathrm{U}_m=\mathrm{A}\right)\cdot\mathbb{P}\left(\mathrm{V}_m=\mathrm{B}\right)\cdot\mathbb{P}\left(u_{m+1}=a\right)\cdot\mathbb{P}\left(v_{m+1}=b\right)$
En réutilisant le lemme des coalitions, on obtient

$$\mathbb{P}\left[(\mathrm{U}_m,u_{m+1})=(\mathrm{A},a),(\mathrm{V}_m,v_{m+1})=(\mathrm{B},b)\right]=\mathbb{P}\left[(\mathrm{U}_m,u_{m+1})=(\mathrm{A},a)\right]\cdot\mathbb{P}\left[(\mathrm{V}_m,v_{m+1})=(\mathrm{B},b)\right]$$

On a établi que (U_m,u_{m+1}) et (V_m,v_{m+1}) sont indépendantes.
Puis avec le lemme des coalitions, $\mathrm{U}_{m+1}=\mathrm{U}_m+u_{m+1}$ et $\mathrm{V}_{m+1}=\mathrm{V}_m+v_{m+1}$ sont indépendantes.

Ainsi on <u>conclut</u> que la récurrence est établie. En particulier U_{2n} et V_{2n} sont indépendantes.
Ainsi $\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{2n}=0\right)=\mathbb{P}\left(\mathrm{U}_{2n}=0\right)\cdot\mathbb{P}\left(\mathrm{V}_{2n}=0\right)$
En faisant comme en 13, on montre que : $\mathbb{P}\left(\mathrm{U}_{2n}=0\right)=\mathbb{P}\left(\mathrm{V}_{2n}=0\right)=\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

On bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0_2) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2}$

21. En utilisant la question 2, on montre que $\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{2n} = 0_2\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 19, on a $1 = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(\mathrm{S}_k = 0_2)\mathbb{P}(\mathrm{R} > 2n-k) = \sum_{p=0}^{2n} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n-p} = 0_2)\mathbb{P}(\mathrm{R} > p)$

De plus on remarque que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\mathrm{S}_{2i+1} = 0_2\right) = 0$ comme en 13. Ainsi :

$$1 = 0 + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n-2k} = 0_2)\mathbb{P}(\mathrm{R} > 2k)$$

En posant $a_n = \mathbb{P}(\mathrm{R} > 2n)$ et $b_n = \mathbb{P}(\mathrm{S}_{2n} = 0_2)$

À l'aide de la question précédente (b_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ de plus, on a $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1/\pi}{n}$.

On a bien (a_n) est décroissante à valeurs positives

On suppose que la suite (a_n) s'annule ceci nous fournit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{R} > \mathrm{N}) = a_\mathrm{N} = 0$.

donc $\forall k \geqslant \mathrm{N}$, $\mathbb{P}(\mathrm{R} > k) = 0$ car $(\mathrm{R} > k) \subset \mathbb{P}(\mathrm{R} > \mathrm{N})$ donc on aurait avec 19 :

$$\forall n \geqslant \mathrm{N},\ 1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{S}_k = 0_d)\mathbb{P}(\mathrm{R} > n-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-k} = 0_d)\mathbb{P}(\mathrm{R} > k) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-k} = 0_d)\mathbb{P}(\mathrm{R} > k)$$

donc en remarquant que $\mathrm{S}_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ (termes pairs et impairs), on a obtient par combinaison linéaire

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-k} = 0_d)\mathbb{P}(\mathrm{R} > k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où $0 = 1$ ce qui n'est pas d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$.

Les hypothèses de la partie D étant vérifiée ainsi que celle de la question 18, on déduit que

$$\mathbb{P}(\mathrm{R} > 2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi \ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi \ln(2n)}$$

De manière analogue à 15, on a $\mathbb{P}(\mathrm{R} > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi \ln(n)}$

Puis en utilisant 11, une comparaison série-intégrale comme en 3 et à l'aide de 4 et d'une sommation de relation de comparaison (cas divergent), on trouve

$$\mathbb{E}(\mathrm{N}_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{R} > i) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi \ln(n)}$$