# Mines-Ponts Mathématiques 1 MP 2021 : un corrigé
# Théorème de De Moivre - Laplace

Jérémy Larochette (avec la contribution de Rémi Souveton) – Lycée Carnot – Dijon

Avril 2021

## Résultats préliminaires

**1** ▷ La formule de Stirling dit que $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ et donc, par définition d'un équivalent (le quotient tend vers 1), on a une suite $(\epsilon_n)$ tendant vers 0 telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\boxed{n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n (1+\epsilon_n).}$

---

**2** ▷ Soit $\lambda \in \mathbf{R}_*^+$ et $\mu \in \mathbf{R}$. Des inégalités successives découlant de la définition

$$\lambda x + \mu - 1 < \lfloor \lambda x + \mu \rfloor \leqslant \lambda x + \mu \leqslant \lceil \lambda x + \mu \rceil < \lambda x + \mu + 1$$

on tire, en faisant l'hypothèse que $x > 0$ (ce qui ne pose pas de problème car on veut $x \to +\infty$)

$$1 + \frac{\mu - 1}{\lambda x} < \frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda x} \leqslant 1 + \frac{\mu}{\lambda x} \leqslant \frac{\lceil \lambda x + \mu \rceil}{\lambda x} < 1 + \frac{\mu + 1}{\lambda x}$$

donc par encadrement $\frac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ et $\frac{\lceil \lambda x + \mu \rceil}{\lambda x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ donc $\boxed{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \sim \lambda x \text{ et } \lceil \lambda x + \mu \rceil \sim \lambda x.}$

---

**3** ▷ Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \end{array} \right.$ : il s'agit d'une fonction continue et positive sur $\mathbf{R}$.

Comme $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$ par croissances comparées, et comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann, $2 > 1$), $\varphi$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$ également.
De même, ou par un argument de parité, $\varphi$ est intégrable sur $]-\infty, 0]$.
Donc $\varphi$ est intégrable sur $\mathbf{R}$ et donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

---

**4** ▷ Avec les développements limités usuels au voisinage de 0,

$$\zeta(x) = (1+x)\ln(1+x) = (1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)$$

donc $\boxed{\zeta(x) = x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}$ après développement.

## Étude asymptotique d'une suite

**5** ▷ Pour montrer que $p_n$ est le plus grands des $P(X_n = k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, il suffit de montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X_n = k) \leqslant P(X_n = x_n) = p_n$.
Ayant en tête l'allure en cloche de la loi binomiale, nous montrons $(P(X_n = k))_k$ est croissant jusqu'à $x_n$ puis décroissant ce qui permet bien de conclure.

Or, les probabilités avec la loi binomiale étant strictement positive, si $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{P(X_n = k)}{P(X_n = k-1)} = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{p}{q} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} = \left(\frac{n+1}{k} - 1\right) \frac{p}{q}$$

et

$$\left(\frac{n+1}{k} - 1\right) \frac{p}{q} \geqslant 1 \iff \frac{n+1}{k} - 1 \geqslant \frac{q}{p} \iff \frac{n+1}{k} \geqslant \frac{1}{p} \iff k \leqslant (n+1)p$$

Or $x_n = \lceil np - q \rceil \leqslant np - q + 1 = np + p = (n+1)p$ (l'inégalité est même stricte), donc, pour $1 \leqslant k \leqslant x_n$,

$$P(X_n = k-1) \leqslant P(X_n = k).$$

Et $x_n + 1 = \lceil np - q \rceil + 1 \geqslant np - q + 1 = (n+1)p$, donc pour $x_n + 1 \leqslant k \leqslant n$,

$$P(X_n = k-1) \geqslant P(X_n = k).$$

On a donc bien que $\boxed{\text{le maximum des } P(X_n = k) \text{ est atteint pour } k = x_n \text{ et vaut } p_n.}$

---

**6** ▷ Avec la question **2** (et $p > 0$), on a directement $x_n = \lceil np - q \rceil \sim np \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $\boxed{x_n \to +\infty.}$
Et comme $np - q \leqslant x_n < np - q + 1$,

$$n - np + q - 1 = (n+1)q - 1 < n - x_n \leqslant n - np + q = (n+1)q$$

donc, toujours avec la question **2** (et cette fois $q > 0$), $n - x_n = \lfloor (n+1)q \rfloor \sim (n+1)q \sim nq$ donc $\boxed{n - x_n \to +\infty.}$
Ainsi, en utilisant trois fois la formule de Striling,

$$\begin{aligned}
\sqrt{npq}\, p_n &= \sqrt{npq} \frac{n!}{x_n!(n-x_n)!} p^{x_n} q^{n-x_n} \\
&\sim \sqrt{npq} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}{\sqrt{2\pi x_n} \left(\frac{x_n}{\mathrm{e}}\right)^{x_n} \sqrt{2\pi(n-x_n)} \left(\frac{n-x_n}{\mathrm{e}}\right)^{n-x_n}} p^{x_n} q^{n-x_n} = \sqrt{\frac{n^2 pq}{x_n(n-x_n)}} \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi} x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}} \\
&\sim \sqrt{\frac{n^2 pq}{np \cdot nq}} \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi} x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\sqrt{npq}\, p_n \sim \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi} x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}}.}$

---

**7** ▷ On suppose que $n > \max\left(\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right)$. Alors $np - q > 0$ donc $x_n = \lceil np - q \rceil \geqslant 1$ et $0 < nq - p = nq + q - 1 = (n+1)q - 1$ donc $n - x_n = \lfloor (n+1)q \rfloor \geqslant 1$. On peut donc écrire, d'une part,

$$\frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}} = \mathrm{e}^{n \ln n + x_n \ln p + (n-x_n) \ln q - x_n \ln x_n - (n-x_n) \ln(n-x_n)}.$$

D'autre part, (le fait que $0 < x_n < n$ légitime l'utilisation de $\zeta$)

$$np\, \zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = x_n \ln\left(\frac{x_n}{np}\right) = x_n \ln x_n - x_n \ln n - x_n \ln p$$

et

$$nq\, \zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right) = (n - x_n) \ln\left(\frac{n - x_n}{nq}\right) = (n-x_n)\ln(n-x_n) - (n-x_n)\ln n - (n-x_n)\ln q$$

ce qui permet finalement d'aboutir à l'égalité voulue $\boxed{\frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}} = \mathrm{e}^{-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right)}.}$

---

**8** ▷ Pour utiliser le développement limité de la question **4** dans l'expression de la question précédente, on vérifie que $\frac{x_n - np}{np} \to 0$ et $\frac{np - x_n}{nq} \to 0$. Comme $n \to +\infty$, on peut supposer que $n > \max\left(\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right)$. On a par définition

$$np - q \leqslant x_n \leqslant np - q + 1 = (n+1)p$$

donc

$$-\frac{q}{np} \leqslant \frac{x_n - np}{np} \leqslant \frac{p}{np} = \frac{1}{n}$$

donc, par encadrement, $\frac{x_n - np}{np} \to 0$. Puis

$$-\frac{p}{nq} \leqslant \frac{np - x_n}{nq} \leqslant \frac{q}{nq} = \frac{1}{n}$$

donc, par encadrement, $\frac{np - x_n}{nq} \to 0$.

Alors, avec **4**,

$$np\,\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = x_n - np + \frac{(x_n - np)^2}{2np} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

(avec $(x_n - np)_n$ borné, intégré au $o$) et de même

$$nq\,\zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right) = np - x_n + \frac{(x_n - np)^2}{2nq} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc,

$$-np\,\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) - nq\,\zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right) = -\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\frac{(x_n - np)^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $(x_n - np)_n$ borné et $\frac{1}{n} \to 0$ donc $o\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$.

Ainsi, en utilisant les question **6** et **7** et la continuité de l'exponentielle en 0, $\boxed{\sqrt{npq}\,p_n \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$.

## Convergence en loi

**9** ▷ Comme $X_n$ suit une loi binomiale de paramètre $(n, p)$, $\boxed{\text{les valeurs prises par les } Y_n \text{ sont les } \tau_{n,k} \text{ pour } k \in [\![0, n]\!]}$,

et pour un tel $k$, $\boxed{P(Y_n = \tau_{n,k}) = P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$.

De plus, $np$ est l'espérance de $X_n$ et $npq$ sa variance donc $\boxed{Y_n \text{ est la variable aléatoire centrée réduite}}$ associée à $X_n$ : on a directement que $E(Y_n) = 0$ et $V(Y_n) = 1$.

---

**10** ▷ Comme $\frac{1}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a un rang $N_1 \in \mathbf{N}^*$ à partir duquel $\frac{1}{\sqrt{npq}} \leqslant b - a$.

Comme $\tau_{n,0} = -\sqrt{\frac{np}{q}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, on a un rang $N_2 \in \mathbf{N}^*$ à partir duquel $\tau_{n,0} \leqslant a$.

Comme $\tau_{n,n} = \sqrt{\frac{nq}{p}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a un rang $N_3 \in \mathbf{N}^*$ à partir duquel $\tau_{n,n} \geqslant b$.

Soit $\boxed{N = \max(N_1, N_2, N_3) \in \mathbf{N}^*. \text{ Alors pour tout } n \geqslant N,\ [a, b] \subset [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}] \text{ et } \frac{1}{\sqrt{npq}} \leqslant b - a.}$

---

**11** ▷ Par définition et croissance de la partie entière, $k_n$ est une fonction croissante en escalier de subdivision adaptée $\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)_{k\in\mathbf{Z}} = (\tau_{n,k})_{k\in\mathbf{Z}}$. $\boxed{\text{C'est donc aussi le cas de } e_n : t \mapsto \frac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}}.}$

De plus, par définition de la partie entière, , pour tout $t \in \mathbf{R}$, $k_n(t) \leqslant \sqrt{npq}t + np < k_n(t) + 1$ donc $\boxed{e_n(t) \leqslant t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}.}$

Ainsi, pour $t \in \mathbf{R}$ fixé, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $t - \frac{1}{\sqrt{npq}} < e_n(t) \leqslant t$, donc par encadrement, $e_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} t$ : $\boxed{(e_n)_n \text{ converge simplement vers } \mathrm{id}_{\mathbf{R}}}$ (et même uniformément, avec l'encadrement précédent).

---

**12** ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On remarque que $\tau_{n,k_n(a)} = e_n(a)$ et $\tau_{n,k_n(b)+1} = \frac{k_n(b)+1-np}{\sqrt{npq}} = e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}}$. On a alors

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{e_n(a)}^{e_n(b)+\frac{1}{\sqrt{npq}}} \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{e_n(b)+\frac{1}{\sqrt{npq}}} \Phi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{e_n(a)} \Phi(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $e_n(a) \to a$, $e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}} \to b$ et $\Phi$ est continue sur $\mathbf{R}$ donc $x \mapsto \int_0^x \Phi(t)\,dt$ qui en est une primitive l'est aussi et

$$\boxed{\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Puis, d'une part,

$$P(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)) = \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ e_n(a)\leqslant \tau_{n,k}=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\leqslant e_n(b)}} P(X_n = k) = \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} P(X_n = k)$$

et d'autre part, avec le changement de variable $u = \sqrt{npq}t + np$,

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,\mathrm{d}t &= \sqrt{npq}\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} P(Y_n = e_n(t))\,\mathrm{d}t = \sqrt{npq}\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} P(X_n = k_n(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{k_n(a)}^{k_n(b)+1} P(X_n = \lfloor u \rfloor)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(fonction en escalier)} \\
&= \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} 1 \cdot P(X_n = k)
\end{aligned}$$

et donc finalement, $\boxed{P(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)) = \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,\mathrm{d}t.}$

---

**13** ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$ (**erreur d'énoncé**). On remarque que $e_n(\tau_{n,k}) = \tau_{n,k_n(\tau_{n,k})} = \tau_{n,k}$ car $k \in \mathbf{Z}$. Alors, en utilisant la question **1**,

$$\begin{aligned}
f_n(\tau_{n,k}) &= \sqrt{npq}P(Y_n = \tau_{n,k}) = \sqrt{npq}P(X_n = k) = \sqrt{npq}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} \\
&= \sqrt{npq}\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} p^k q^{n-k} \frac{1+\epsilon_n}{(1+\epsilon_k)(1+\epsilon_{n-k})}
\end{aligned}$$

et, après simplifications, $\boxed{f_n(\tau_{n,k}) = \sqrt{npq}\sqrt{\frac{pqn^2}{k(n-k)}}\frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} \frac{1+\epsilon_n}{(1+\epsilon_k)(1+\epsilon_{n-k})}.}$

---

**14** ▷ Soit $t \in [a, b]$. On a

$$np + \sqrt{npq}t - 1 \leqslant k_n(t) \leqslant np + \sqrt{npq}t,$$

donc par encadrement $k_n(t) \sim np$ et

$$nq - \sqrt{npq}t \leqslant n - k_n(t) \leqslant nq - \sqrt{npq}t + 1,$$

donc par encadrement $n - k_n(t) \sim nq$.

Donc $k_n(t)(n - k_n(t)) \sim n^2pq$ et $\boxed{\sqrt{\dfrac{pqn^2}{k_n(t)(n-k_n(t))}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$

Puis, comme $\epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $k_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $n - k_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (par exemple avec les équivalents ci-dessus), $\boxed{\dfrac{1+\epsilon_n}{(1+\epsilon_k)(1+\epsilon_{n-k})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$

---

**15** ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $\max\left(\sqrt{\frac{q}{np}}, \sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \cdot |\tau_{n,k}| < 1$, alors on peut reprendre les calculs fait en question **7** en remplaçant $x_n$ par $k$, la condition imposée à $k$ permettant d'avoir des quantités strictement positives dans tous les ln, avec $\frac{k-np}{np} = \sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}$ et $\frac{np-k}{np} = -\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}$ :

$$\frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} = \frac{n^n p^k q^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}} = \mathrm{e}^{-np\zeta\left(\frac{k-np}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np-k}{nq}\right)}$$

donc $\boxed{\dfrac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} = \mathrm{e}^{-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) - nq\zeta\left(\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)}.}$

---

**16** ▷ Comme dans la question **8** avec $k_n(t)$ à la place de $x_n$, on a bien $\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)} = \sqrt{\frac{q}{np}}e_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \cdot t = 0$ et $-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)} = -\sqrt{\frac{p}{nq}}e_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc à partir d'un certain rang, la condition de la question précédente est bien assurée, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
&-np\,\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)}\right) - nq\,\zeta\left(\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)}\right) \\
&\qquad = -np\left(\sqrt{\frac{q}{np}}e_n(t) + \frac{qe_n^2(t)}{2np} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - nq\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}e_n(t) + \frac{pe_n^2(t)}{2nq} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\qquad = -\frac{1}{2}(p+q)e_n^2(t) + o(1) \\
&\qquad \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

donc, par continuité de l'exponentielle et avec la question précédente,

$$\boxed{\frac{p^{k_n(t)} q^{n-k_n(t)}}{\left(\frac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)} \left(\frac{n-k_n(t)}{n}\right)^{n-k_n(t)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-t^2/2}.}$$

---

**17** ▷ Soit $t \in [a, b]$. On a déjà remarqué que pour $k \in \mathbf{Z}$, $e_n(\tau_{n,k}) = \tau_{n,k}$. Ainsi, $e_n$ est idempotente :

$$e_n(e_n(t)) = e_n(\tau_{n,k_n(t)}) = \tau_{n,k_n(t)} = e_n(t)$$

Donc $f_n(t) = \sqrt{npq}P(Y_n = e_n(t)) = \sqrt{npq}P(Y_n = e_n(e_n(t))) = f_n(e_n(t)) = f_n(\tau_{n,k_n(t)})$.
Mais on ne peut utiliser la question **13** qu'à condition que $k_n(t) \in [\![1, n-1]\!]$.
Or comme $\tau_{n,1} \to -\infty$ et $\tau_{n,n} \to +\infty$, on a un rang $N' \in \mathbf{N}^*$ à partir duquel $\tau_{n,1} < t < \tau_{n,n}$, donc $1 < \sqrt{npq}t + np < n$ et $k_n(t) \in [\![1, n-1]\!]$.

Alors, avec les questions **13**, **14** et **16**, $\boxed{f_n(t) = f_n(\tau_{n,k_n(t)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2} = \Phi(t).}$

On cherche ensuite à appliquer le théorème de convergence dominée :

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ (fonction en escalier).
- $(f_n)_n$ converge simplement vers $\Phi$ qui est continue sur $[a, b]$.

- Pour tout $t \in [a,b]$ et $n \in \mathbf{N}^*$, en utilisant la question **5**,

$$|f_n(t)| = f_n(t) = \sqrt{npq}P(Y_n = e_n(t)) = \sqrt{npq}P(X_n = k_n(t)) \leqslant \sqrt{npq}p_n$$

Or d'après la question **8**, $(\sqrt{npq}p_n)_n$ converge donc est majorée par un réel $M$ donc pour tout $t \in [a,b]$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t) = M$ où $\varphi$ est une fonction positive, continue, indépendante de $n$ intégrable sur $[a,b]$.

D'après le théorème de convergence dominée, $\boxed{\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t.}$

---

**18** ▷ D'après la question **12**,

$$\begin{aligned} P(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)) &= \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{e}_n(a)}^{e_n(b)+\frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathrm{e}_n(a)}^{a} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{e_n(b)+\frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or on a déjà $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_a^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t$ d'après la question précédente puis, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$0 \leqslant f_n(t) = \sqrt{npq}P(Y_n = e_n(t)) = \sqrt{npq}P(X_n = k_n(t)) \leqslant \sqrt{npq}p_n \leqslant M$$

comme dans la question précédente, d'où, les bornes étant dans le bon ordre vu la question **11**,

$$0 \leqslant \int_{\mathrm{e}_n(a)}^{a} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(a - e_n(a)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\displaystyle\int_{\mathrm{e}_n(a)}^{a} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et, de même,

$$0 \leqslant \int_b^{e_n(b)+\frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\left(e_n(b) + \frac{1}{\sqrt{npq}} - b\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\displaystyle\int_b^{e_n(b)+\frac{1}{\sqrt{npq}}} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Finalement, $\boxed{\displaystyle P(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t.}$

Ensuite, on a $e_n(a) \leqslant a$ et $e_n(b) \leqslant b$ et comme $e_n(b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b > a$, on a un rang $N_0$ à partir duquel $e_n(b) > a$, ce qui donne $e_n(a) \leqslant a < e_n(b) \leqslant b$. Donc si $n \geqslant N_0$,

$$P(a \leqslant Y_n \leqslant b) = P(e_n(a) \leqslant Y_n \leqslant e_n(b)) - P(e_n(a) \leqslant Y_n < a) + P(e_n(b) < Y \leqslant b).$$

Mais avec **11**,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant P(e_n(a) \leqslant Y_n < a) \leqslant P\left(e_n(a) \leqslant Y_n < e_n(a) + \frac{1}{\sqrt{npq}}\right) &= P(k_n(a) \leqslant X_n < k_n(a) + 1) \\ &= P(X_n = k_n(a)) \qquad \text{car } X_n \text{ à valeurs entières} \\ &= P(Y_n = e_n(a)) = \frac{f_n(a)}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \cdot \Phi(a) = 0 \end{aligned}$$

donc $P(e_n(a) \leqslant Y_n < a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et de la même manière, $P(e_n(b) < Y \leqslant b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle P(a \leqslant Y_n \leqslant b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b \Phi(t)\,\mathrm{d}t.}$

## Applications

**19** ▹ Soit $T > 0$. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $Y_n$ qui est centrée et réduite, et qui dit que $P(|Y_n| \geqslant T) \leqslant \dfrac{V(Y_n)}{T^2} = \dfrac{1}{T^2}$ donc

$$P(-T \leqslant Y_n \leqslant T) \geqslant P(-T < Y_n < T) = P(|Y_n| < T) \geqslant 1 - \frac{1}{T^2}$$

puis avec la question précédente en faisant $n \to +\infty$ avec la question **18**, $\boxed{\int_{-T}^{T} \Phi(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 - \frac{1}{T^2}.}$

Comme par ailleurs $P(-T \leqslant Y_n \leqslant T) \leqslant 1$, en faisant $n \to +\infty$, $\displaystyle\int_{-T}^{T} \Phi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 1$.

Enfin, en faisant tendre $T$ vers $+\infty$ dans l'encadrement $1 - \dfrac{1}{T^2} \leqslant \displaystyle\int_{-T}^{T} \Phi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 1$ ce qui est licite d'après **3**,

$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\,\mathrm{d}t = 1.}$

---

**20** ▹ On montre que $P(Y_n \leqslant b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_{-\infty}^{b} \Phi(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $\varepsilon > 0$. On a pour tout $a < b$, et tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}\left|P(Y_n \leqslant b) - \int_{-\infty}^{b} \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|P(a \leqslant Y_n \leqslant b) - \int_{a}^{b} \Phi(t)\,\mathrm{d}t - P(Y_n < a) - \int_{-\infty}^{a} \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|P(a \leqslant Y_n \leqslant b) - \int_{a}^{b} \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right| + P(Y_n < a) + \int_{-\infty}^{a} \Phi(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \Phi(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[a\to-\infty]{} 0$, on a $A \in \mathbf{R}$ tel que si $a \leqslant A$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \Phi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
Puis, avec $a < 0$,

$$P(Y_n < a) \leqslant P(Y_n \leqslant a) = P(|Y_n| \geqslant -a) = P\left(Y_n^2 \geqslant a^2\right) \leqslant \frac{E\left(Y_n^2\right)}{a^2}$$

d'après l'inégalité de Markov. Or $Y_n$ est centrée et réduite donc $1 = V(Y_n) = E\left(Y_n^2\right) - E(Y_n)^2 = E\left(Y_n^2\right)$ donc

$$P(Y_n < a) \leqslant \frac{1}{a^2}.$$

Comme $\dfrac{1}{a^2} \xrightarrow[a\to-\infty]{} 0$, on a $A' \in \mathbf{R}_*^-$ tel que si $a \leqslant A'$, $P(Y_n < a) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.
On fixe alors $a \leqslant \min(A, A')$. Pour ce $a$, on a d'après la question 18, un rang $N$ à partir duquel

$$\left|P(a \leqslant Y_n \leqslant b) - \int_{a}^{b} \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

et alors pour tout $n \geqslant N$, $\left|P(Y_n \leqslant b) - \displaystyle\int_{-\infty}^{b} \Phi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$.

On a montré que $\boxed{P(Y_n \leqslant b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{b} \Phi(t)\,\mathrm{d}t.}$

On obtient de manière analogue $\boxed{P(Y_n \geqslant a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{a}^{+\infty} \Phi(t)\,\mathrm{d}t.}$

## Généralisation

**21** ▷ On a $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi'$ ne s'annule pas, donc par continuité de $\varphi'$, celle-ci garde un signe constant et $\varphi$ étant strictement monotone et continue, elle induit une bijection bicontinue (homéomorphisme) de $\mathbf{R}$ sur l'intervalle $\varphi(\mathbf{R})$.

Si de plus $\varphi(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ et, par exemple, $\varphi$ est croissante, alors avec $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty$, en notant $-\infty = \varphi(-\infty)$ et $+\infty = \varphi(+\infty)$,

$$P(\alpha \leqslant Z_n \leqslant \beta) = P(\varphi^{-1}(\alpha) \leqslant Y_n \leqslant \varphi^{-1}(\beta)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} \Psi(u)\,\mathrm{d}u$$

avec $\boxed{\Psi = \dfrac{\Phi\circ\varphi^{-1}}{(\varphi^{-1})'} = \dfrac{\Phi\circ\varphi^{-1}}{\varphi'\circ\varphi^{-1}}}$ continue sur $\mathbf{R}$, via le changement de variable ($\mathcal{C}^1$, bijectif) $u = \varphi(t)$.

- Le cas où $\alpha$ et $\beta$ sont finis distincts vient de la question **18**,
- celui où ils sont distincts et éventuellement infinis vient de **20**,
- celui où ils sont égaux finis vient aussi de **20** en remarquant que

$$P(Y_n = a) = P((Y_n \leqslant a)\cap(Y_n(\geqslant a)) = P(Y_n \leqslant a)+P(Y_n \geqslant a)-P(\Omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{a} \Phi(t)\,\mathrm{d}t+\int_{a}^{+\infty} \Phi(t)\,\mathrm{d}t-1 = 0$$

- et dans le dernier cas où $\alpha$ et $\beta$ sont égaux et infinis, les probabilités et l'intégrale sont nulles donc le résultat reste valable.

Dans le cas où $\varphi$ est décroissante, on a $P(\alpha \leqslant Z_n \leqslant \beta) = P(\varphi^{-1}(\beta) \leqslant Y_n \leqslant \varphi^{-1}(\alpha))$, ce qui permet d'aboutir au résultat avec $\boxed{\Psi = -\dfrac{\Phi\circ\varphi^{-1}}{(\varphi^{-1})'} = \dfrac{\Phi\circ\varphi^{-1}}{|\varphi'\circ\varphi^{-1}|}.}$

Enfin, si $\varphi(\mathbf{R}) \neq \mathbf{R}$, alors le reste reste valable seulement si $\alpha, \beta$ sont dans l'intervalle $\varphi(\mathbf{R})$ ou une de ses éventuelles bornes infinies.

**Fin du corrigé**