CCP2016 - PSI
un corrigé

1 Cas $n = 2$

1.1 Puissances de $A(\alpha, \beta)$

1. $A(\alpha,\beta) - I_2 = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice nulle car $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ et son rang est ≥ 1. $(1,1)$ est clairement élément du noyau qui, par théorème du rang, est de dimension 1. Ainsi
$$1 \in \mathrm{Sp}(A(\alpha,\beta)) \ \text{ et } \ E_1(A(\alpha,\beta)) = \mathrm{Vect}((1,1))$$

2. On vérifie que $(\alpha, -\beta)$ (qui est non nul) est vecteur propre de $A(\alpha,\beta)$ associé à la valeur propre $1-\alpha-\beta$. Les vecteurs $(1,1)$ et $(\alpha,-\beta)$ sont indépendants (déterminant $-\alpha-\beta < 0$). On a donc une base de vecteus propres ce qui montre que $A(\alpha,\beta)$ est diagonalisable avec
$$P^{-1}A(\alpha,\beta)P = \mathrm{diag}(1,\lambda) \ \text{ avec } \ P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$$

3. Montrons par récurrence que
$$\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = P\mathrm{diag}(1,\lambda^p)P{-}1 = PD^pP^{-1}$$
   - <u>Initialisation</u> : c'est immédiat pour $p = 0$ car $A^0 = I_2$.
   - <u>Hérédité</u> : supposons le résultat vrai au rang $p \geq 0$. On a alors $A^{p+1} = A^pA = PD^pP^{-1}PDP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}$ ce qui montre le résultat au rang $p+1$.

   On vérifie immédiatement que $P^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a ainsi
$$A^p = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} 1 & \alpha\lambda^p \\ 1 & -\beta\lambda^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta+\alpha\lambda^p & \alpha(1-\lambda^p) \\ \beta(1-\lambda^p) & \alpha+\beta\lambda^p \end{pmatrix}$$

4. Si $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$ alors $0 < \alpha+\beta < 2$ et donc $-1 < \lambda < 1$. AInsi $\lambda^p \to 0$ quand $p \to +\infty$ et la question précédente montre que
$$\lim_{p\to+\infty} A^p = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = L(\alpha,\beta)$$
Si $\alpha = \beta = 1$ alors $\lambda = -1$ et les suites coordonnées ne convergent pas. On a $A(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A(1,1)^2 = I_2$. Ainsi $A(1,1)^{2p} = I_2$ et $A(1,1)^{2p+1} = A(1,1)$. On a deux extraites qui convergent vers des limites différentes.

1.2 Applications

5. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X_n = 0),(X_n = 1))$ donne
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = 1)$$
Or, $\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = \alpha$ (passage de 0 à 1) et $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \beta$ (passage de 1 à 0) puis $\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1-\alpha$ (pas d'erreur sur 0) et $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = 1-\beta$ (pas d'erreur sur 1). Ceci se traduit matriciellement par
$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix} = A(\alpha,\beta)^T\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$$

On en déduit par une récurrence immédiate que

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix} = (A(\alpha,\beta)^n)^T \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 0) \\ \mathbb{P}(X_0 = 1) \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{\beta + \alpha\lambda^n}{\alpha+\beta}\mathbb{P}(X_0 = 0) + \frac{\beta(1-\lambda^n)}{\alpha+\beta}\mathbb{P}(X_0 = 1)$$
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{\alpha(1-\lambda^n)}{\alpha+\beta}\mathbb{P}(X_0 = 0) + \frac{\alpha + \beta\lambda^n}{\alpha+\beta}\mathbb{P}(X_0 = 1)$$

Il est alors raisonnable de penser que

$$\mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = 0) = \frac{\beta + \alpha\lambda^n}{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{X_0=1}(X_n = 1) = \frac{\alpha + \beta\lambda^n}{\alpha+\beta}$$

Je propose de le prouver par récurrence.

- Initialisation : pour $n = 0$ (les deux probabilités conditionnelles valent 1) et $n = 1$ (elles valent respectivement $1-\alpha$ et $1-\beta$) le résultat est vrai.
- Hérédité : supposons le résultat vrai au rang $n \geq 1$. Utilisons le système complet d'événements $((X_n = 0),(X_n = 1))$ pour la probabibilité $\mathbb{P}_{X_0=0}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X_0=0}(X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = 0)\mathbb{P}_{X_0=0\cap X_n=0}(X_{n+1} = 0) \\ &+ \mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = 1)\mathbb{P}_{X_0=0\cap X_n=1}(X_{n+1} = 0) \end{aligned}$$

  Comme $n \geq 1$ et comme les relais sont indépendants,

$$\mathbb{P}_{X_0=0\cap X_n=0}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}_{X_0=0\cap X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \beta$$

  Avec l'hypothèse de récurrence on a donc

$$\mathbb{P}_{X_0=0}(X_{n+1} = 0) = (1-\alpha)\frac{\beta + \alpha\lambda^n}{\alpha+\beta} + \beta\left(1 - \frac{\beta + \alpha\lambda^n}{\alpha+\beta}\right)$$

  et il reste à simplifier le terme pour obtenir le résultat voulu. On procède de même pour $\mathbb{P}_{X_0=1}(X_{n+1} = 1)$.

La probabilité que X_n soit conforme à X_0 est alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 0 \cap X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1 \cap X_0 = 1) &= \mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}_{X_0=1}(X_n = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) \\ &= \frac{\beta + \alpha\lambda^n}{\alpha+\beta}\mathbb{P}(X_0 = 0) + \frac{\alpha + \beta\lambda^n}{\alpha+\beta}\mathbb{P}(X_0 = 1) \\ &= \phi\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \phi\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\mathbb{P}(X_0 = 1) \end{aligned}$$

où $\phi(x) = x + (1-x)\lambda^n$. $\phi'(x) = 1 - \lambda^n \geq 0$ (car $|\lambda| \leq 1$) et ϕ est donc croissante. Elle est supérieure à son minimum $\phi(r)$ et on a donc

$$\mathbb{P}(X_n = 0 \cap X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1 \cap X_0 = 1) \geq \phi(r)(\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_0 = 1)) = \phi(r)$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}(X_n = 0 \cap X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1 \cap X_0 = 1) \geq r + (1-r)(1-\alpha-\beta)^n$$

6. Les erreurs sur les bits se produisant de manière indépendante, la probabilité de conformité de X_n à X_0 est le produit de celle de chaque X_n^k à X_n^0 qui est plus grande que $r+(1-r)(1-\alpha-\beta)^n$. Les quantités étant positives, on peut multiplier les inégalités et la probabilité de conformité Q_n vérifie
$$Q_n \geq (r + (1-r)(1-\alpha-\beta)^n)^\ell$$

7. Dans le cas $\alpha = \beta$, on a $r = 1/2$. Si l'on reprend la question 5, on voit que l'on a une égalité dans les inégalités. Ainsi
$$Q_n = \left(\frac{1+(1-2\alpha)^n}{2}\right)^\ell$$
On se donne $\varepsilon \in]0,1[$ (plus contraignant que dans l'énoncé mais moralement, on veut des ε petits) et on cherche n tel que $Q_n \leq 1-\varepsilon$ c'est à dire
$$\left(\frac{1+(1-2\alpha)^n}{2}\right)^\ell \leq 1-\varepsilon$$
Il suffit donc que ($1-\varepsilon > 0$ et on peut élever à la puissance $1/\ell$)
$$(1-2\alpha)^n \leq 2(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\ell}} - 1$$
L'élévation à la puissance n-ième n'est a priori croissante que sur $\mathbb{R}^+$. On remarque donc qu'il suffit que
$$|1-2\alpha|^n \leq 2(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\ell}} - 1$$
c'est à dire, en supposant $\alpha \neq 1/2$ et ε assez petit pour que le mambre de droite soit > 0 (même remarque)
$$n\ln(|1-2\alpha|) \leq \ln(2(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\ell}} - 1)$$
Quand $\alpha \in]0,1[\setminus\{1/2\}$, $\ln(|1-2\alpha|) < 0$ et il suffit que
$$n \geq \frac{\ln(2(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\ell}} - 1)}{\ln(|1-2\alpha|)}$$
Pour $\alpha = 1/2$, la condition est vraie pour tout n pourvu que ε soit assez petit.
Pour $\alpha = 1$, la condition est vraie pour tout n pourvu que ε soit assez petit.

2 Spectre des matrices stochastiques

2.1 Coefficients

8. Si A est stochastique, les coefficients d'une ligne sont positifs et de somme plus petite que 1. Ils sont donc tous plus petits que 1 et finalement tous dans $[0,1]$.
Si A est strictement stochastique, elle est stochastique à coefficients non nuls et ses coefficients sont donc tous dans $]0,1]$. Si, par l'absurde, on avait $a_{i,j} = 1$, comme il y a au moins deux coefficients sur la ligne i et qu'ils sont > 0, la somme sur la ligne i serait > 1 ce qui est contradictoire avec le caractère stochastique. Ainsi, les coefficients sont tous dans $]0,1[$.

9. Soit A une matrice à coefficients positifs. Elle est donc stochastiques ssi $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ pour tout i. Or,
$$\forall i,\ (Ae)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}e_j = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$$
et la condition devient $Ae = e$ c'est à dire que e est propre pour A associé à 1 (c'est une CNS).

10. Soient A, B deux matrices de taille n et $C = AB$. On a

$$\forall i, j,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Si A et B sont à coefficients positifs, il en est de même pour C.
Si A et B sont à coefficients strictement positifs, il en est de même pour C.
Enfin, pour tout i on a

$$\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{i,k} \sum_{j=1}^{n} b_{k,j} \right)$$

Si A et B sont stochastiques, $\sum_{j=1}^{n} b_{k,j} = 1$ pour tout k et la somme ci-dessus vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1$.
C est donc stochastique.
On a donc prouvé que les caractères stochastique et strictement stochastique sont conservés par produit.

2.2 Valeurs propres

11. Soit A une matrice stochastique et $x \in \mathbb{C}^n$. Pour tout i on a

$$|(Ax)_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \|x\|_\infty$$

et on en déduit (en passant à la borne supérieure) que

$$\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

Comme A^p est aussi stochastique (question 10) on a aussi

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

12. Soit λ une valeur propre complexe de A et x un vecteur propre associé. On a $Ax = \lambda x$ et, avec la question précédente

$$|\lambda| \|x\|_\infty = \|\lambda x\|_\infty = \|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

Comme $\|x\|_\infty > 0$ (x est vecteur propre et donc non nul) on en déduit que $|\lambda| \leq 1$. Ceci étant vrai pour toute valeur propre, $\rho(A) \leq 1$. De plus, 1 est une valeur propre de A (car A est stochastique) et cette inégalié est une égalité (on a un maximum) :

$$\rho(A) = 1$$

2.3 Diagonale strictement dominante

13. Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i|$ soit maximal (un nombre fini non nul de réels admet un maximum). On a alors $|x_i| > 0$ (car x, vecteur propre, est non nul) et comme $(Ax)_i = \lambda x_i$, on a

$$(\lambda - a_{i,i}) x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j$$

Par inégalité triangulaire (les $a_{k,j}$ sont positifs), on en déduit que

$$|\lambda - a_{i,i}| \cdot |x_i| \leq \sum_{j \neq i} a_{i,j} |x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} a_{i,j}$$

Comme $|x_i| > 0$ on peut conclure que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} a_{i,j}$$

14. Si, par l'absurde, A n'était pas inversible, on aurait (avec la question précédente)

$$a_{i,i} = |a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} a_{i,j}$$

ce qui contredit le caractère strictement dominant de la diagonale. Ainsi, toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

2.4 Valeur propre de module maximal

15. Posons $B = A_1 - I_{n-1}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a

$$|b_{i,i}| = |a_{i,i} - 1| = 1 - a_{i,i} = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{i,j} + a_{i,n} < \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{i,j}$$

B est donc a diagonale dominante. On en déduit que B est inversible. Ses $n-1$ lignes sont donc indépendantes et c'est a fortiori vrai de celle de $A - I_n$. On a donc

$$\text{rg}(n) \geq n - 1$$

16. $\ker(A - I_n)$ est ainsi (théorème du rang) au plus de dimension 1. Comme il est non réduit à $\{0\}$ (1 est valeur propre d'une matrice stochastique) c'est que

$$\dim(\ker(A - I_n)) = 1$$

17. Soit λ une valeur propre de A. Avec la question 13 et l'inégalité triangulaire, on a (pour une bonne valeur de i)

$$|\lambda| - a_{i,i} = |\lambda| - |a_{i,i}| \leq |\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} a_{i,j}$$

Si $|\lambda| = 1$, cette inégalité est une égalité. On doit donc avoir égalité dans toutes les étapes et en particulier $|\lambda - a_{i,i}| + a_{i,i} = |\lambda|$ et donc (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) $\lambda - a_{i,i}$ et $a_{i,i}$ ont même argument. Comme $a_{i,i}$ est un réel > 0, ceci impose que $\lambda - a_{i,i}$ soit un réel > 0 et donc que λ soit un réel > 0. Comme $|\lambda| = 1$, ceci donne $\lambda = 1$. 1 est donc l'unique valeur propre de module 1 et

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{1\}, \ |\lambda| < 1$$

3 Probabilité invariante

3.1 Une suite de variables aléatoires

18. Par formule des probabilités totales avec le système complet $((X_0 = i))_{1 \leq i \leq 4}$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = j)\mathbb{P}(X_0 = j)$$

$\mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = j)$ vaut 1/10 si $i = j$ et 3/10 sinon. On a donc

$$P_1 = QP_0 \ \text{ avec } \ Q = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = Q^n P_0$$

19. Si Π convient, c'est un vecteur propre pour Q associé à la valeur propre 1. Comme Q est strictement stochastique, la partie précédente montre que le sous-espace propre est de dimension 1 et même engendré par $(1, 1, 1, 1)$. La condition sur la somme des coordonnées de Π impose

$$\Pi = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \forall i,\ p_i = \frac{1}{4}$$

Réciproquement, ce vecteur convient.

3.2 Rapidité de convergence

20. Q est symétrique réelle donc diagonalisable (et par le biais d'une matrice orthogonale).

21. On sait déjà que 1 est valeur propre de sous espace propre associé $\mathrm{Vec}(\Pi)$. De plus $Q + \frac{2}{10}I_4$ est clairement de rang 1 et $-2/10$ est donc valeur propre de sous-espace propre associé de dimension 3 (théorème du rang). La somme des dimensions des sous-espaces propres valant 4 (Q est diagonalisable), il n'y a pas d'autre valeur propre. De plus, Q étant symétrique réelle, les sous-espaces propres sont supplémentaires orthogonaux. Ainsi

$$\mathrm{Sp}(Q) = \{1, -2/10\}$$

$$E_1(Q) = \mathrm{Vect}(\Pi),\ E_{-2/10}(Q) = \mathrm{Vect}(\Pi)^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

22. Notons P la matrice dont la première colonne est $\frac{\Pi}{\|\Pi\|} = 2\Pi$ et les suivantes une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(\Pi)^\perp$. P est alors une matrice orthogonale qui diagonalise Q et

$$P^{-1}QP = \mathrm{diag}(1, -2/10, -2/10, -2/10)$$

On en déduit que

$$Q^p = P\mathrm{diag}(1, (-2/10)^p, (-2/10)^p, (-2/10)^p)P{-1}$$

Quand $p \to +\infty$, $\mathrm{diag}(1, (-2/10)^p, (-2/10)^p, (-2/10)^p) \to \mathrm{diag}(1, 0, 0, 0)$ et $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue (linéaire en dimension finie par exemple). Ainsi,

$$\lim_{p\to+\infty} Q^p = P\mathrm{diag}(1, 0, 0, 0)P^{-1} = R$$

La première colonne de P est 2Π et on a donc

$$P\mathrm{diag}(1, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En multipliant par $P^{-1} = P^T$, seule la première ligne de P^{-1} sert et elle vaut $(2p_1, 2p_2, 2p_3, 2p_4)$. On en déduit que

$$R = 4\begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 & p_1p_4 \\ p_2p_1 & p_2^2 & p_2p_3 & p_2p_4 \\ p_3p_1 & p_3p_2 & p_3^2 & p_3p_4 \\ p_4p_1 & p_4p_2 & p_4p_3 & p_4^2 \end{pmatrix} = 4\Pi\Pi^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la suite, l'énoncé ne précise aucune norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et il est difficile de savoir à quoi correspond $\|.\|$. Bien sûr, on est en dimension finie et toutes les normes sont "équivalentes" (vocabulaire hors programme en PSI) ce qui rend le choix indifférent. On a

$$Q^p - R = P\text{diag}(0, (-2/10)^p, (-2/10)^p, (-2/10)^p)P{-1} = \left(-\frac{2}{10}\right)^p P\text{diag}(0,1,1,1)P{-1}$$

On en déduit que

$$\|Q^p - R\| = \left(\frac{2}{10}\right)^p \|P\text{diag}(0,1,1,1)P{-1}\| = O\left(\frac{2}{10}\right)^p$$

puisque $\|P\text{diag}(0,1,1,1)P{-1}\|$ est indépendant de p.
Comme on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = Q^n P_0$$

et comme $M \mapsto MP_0$ est continue, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = RP_0 = 4\Pi\Pi^T P_0$$

Or, $\Pi^T P_0 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(X_0 = i) = \frac{1}{4}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \Pi$$

Quand n tend vers $+\infty$ on a autant de chance de se retrouver sur chaque point et cela quelle que soit la position initiale.

4 Puissances d'une matrice stochastique

23. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$;

$$\forall k \in [|1,n|],\ a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^n a_{k,i}a_{i,j}^{(p)} \leq \sum_{i=1}^n a_{k,i}M_j^{(p)} = M_j^{(p)}$$

En passsant au maximum sur k, on en déduit que

$$M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$

De même

$$\forall k \in [|1,n|],\ a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^n a_{k,i}a_{i,j}^{(p)} \geq \sum_{i=1}^n a_{k,i}m_j^{(p)} = m_j^{(p)}$$

En passsant au maximum sur k, on en déduit que

$$m_j^{(p+1)} \geq m_j^{(p)}$$

$m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)}$ est immédiat (minimum plus petit que maximum). Comme M et toutes ses puissances sont trictement stochastqiues, tous les coefficients sont > 0 et $m_j^{(p)} > 0$. Finalement

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$

24. On note k un indice tel que $a_{k,j}^{(p+1)} = m_j^{(p+1)}$. On a alors

$$\begin{aligned} m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} &= a_{k,j}^{(p+1)} - m_j^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} a_{i,j}^{(p)} - \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} m_j^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{k,i}}_{\geq m} \underbrace{(a_{i,j}^{(p)} - m_j^{(p)})}_{\geq 0} \\ &\geq m \sum_{i=1}^{n} (a_{i,j}^{(p)} - m_j^{(p)}) \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont ≥ 0 et l'un vaut $M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$ et donc

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

De même, On note ℓ un indice tel que $a_{\ell,j}^{(p+1)} = M_j^{(p+1)}$. On a alors

$$\begin{aligned} M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} &= M_j^{(p)} - a_{\ell,j}^{(p+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{\ell,i} M_j^{(p)} - \sum_{i=1}^{n} a_{\ell,i} a_{i,j}^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{\ell,i}}_{\geq m} \underbrace{(M_j^{(p)} - a_{i,j}^{(p)})}_{\geq 0} \\ &\geq m \sum_{i=1}^{n} (M_j^{(p)} - a_{i,j}^{(p)}) \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont ≥ 0 et l'un vaut $M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$ et donc

$$M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

25. On a tout d'abord

$$\begin{aligned} M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} &= M_j^{(p+1)} - M_j^{(p)} \\ &+ M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \\ &+ m_j^{(p)} - m_j^{(p+1)} \end{aligned}$$

Le premier terme est majoré avec la seconde inégalité de la question précédente. Le troisième est majoré grâce à la première inégalité. On obtient

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1 - 2m)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

26. La question 23 montre que $(m_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante alors que $(M_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ décroît. La question précédente donne par récurrence

$$0 \leq M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \leq (1 - 2m)^p (M_j^{(0)} - m_j^{(0)})$$

Comme $n \geq 2$, il y a au moins deux coefficients par ligne. Ils sont > 0 et leur somme vaut 1. Il ne peuvent donc être tous deux $< 1/2$ et l'un est $\geq 1/2$. Ainsi, $m \geq 1/2$. Le seul cas d'égalité est celui où $n = 2$ et où tous les coefficients valent $1/2$.

- Si $n = 2$ et $m = 1/2$ alors $A = A(1/2, 1/2)$. La partie I montre que (A^p) est constante et les suites $(m_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(M_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ le sont aussi (égales à $1/2$). Elles sont donc adjacentes.

- Sinon $m < 1/2$ et $(1-2m)^p \to 0$. On a donc $M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \to 0$. Les suites sont encore adjacentes.

27. En notant l_j la limite commune à $(M_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(m_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$, comme $m_j^{(p)} \leq a_{k,j}^{(p)} \leq M_j^{(p)}$ pour tout k, tous les coefficients de la colonne k dans la suite (A^p) tendent vers l_j. (A^p) converge donc vers la matrice L dont toutes les lignes valent $(l_1, \ldots, l_n)$. Comme A^p est stochastique pour tout p, L l'est aussi (passage à la limite dans une suite constante égale à 1).