Problème : séries de Taylor et développement en série entière

Partie préliminaire

1. La série entière $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ est la série dérivée de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Cette dernière a pour rayon de convergence 1 donc la série dérivée est de même rayon de convergence et sa somme est la dérivée de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
De plus, $\forall x \in]-1,1[\,, \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Donc $\forall x \in]-1,1[\,, \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
2. Soit $x > 0$.
Fixons deux réels a et A tels que $0 < a < A$.
Posons les fonctions u et v définies sur le segment $[a, A]$ par $u(t) = t^x$ et $v(t) = -e^{-t}$.
u et v sont de classe C^1 sur $[a, A]$ et $\forall t \in [a, A], u'(t) = xt^{x-1}$ et $v'(t) = e^{-t}$.
Par le théorème d'intégration par parties, $\int_a^A t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x e^{-t}\right]_a^A + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = a^x e^{-a} - A^x e^{-A} + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
On fait tendre a vers 0 et A vers $+\infty$.
Par définition de la fonction Γ, les deux intégrales convergent respectivement vers $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.
Comme x est strictement positif, a^x tend vers 0 donc $a^x e^{-t} = O(a^x)$ également quand a tend vers 0.
Enfin, par théorème de comparaison, $A^x e^{-A}$ tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$.
Par unicité de la limite, on obtient l'égalité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ le prédicat $P(n)$: "$\Gamma(n) = (n-1)!$.
$\Gamma(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 = 0!$ donc $P(0)$ est vrai.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P(n)$ est vrai.
$n > 0$ donc $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$. Donc $P(n+1)$ est vrai.
Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ le prédicat $P(n)$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.
Initialisation :
$$\sum_{k=0}^{0} \frac{(x-a)^0}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + f(x) - f(a) = f(x).$$
Donc $P(0)$ est vrai.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $P(n-1)$ vrai.
Définissons les fonctions u et v sur I par $u(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$ et $v(t) = f^{(n)}(t)$.
u et v sont de classe C^1 sur I et $\forall t \in I, u'(t) = -n\frac{(x-t)^{n-1}}{n!} = -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et $v'(t) = f^{(n+1)}(t)$.
Par le théorème d'intégration par parties, $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$.
$0^n = 0$ car $n \geq 1$.
En exploitant l'hypothèse de récurrence, on obtient ainsi
$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$
$P(n)$ est donc vrai.
Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie 1 : quelques exemples

4. Par théorème, $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$.
De plus, $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} 0^{2p} = 1 = f(0)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$.
f admet donc un développement en série entière sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.
Cette fonction est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. $]-1,1[$ est un voisinage de 0.
D'après la question 1, $\forall x \in]-1,1[\,, \dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.
La fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ est donc développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$. Elle est de classe C^∞ et d'après le théorème rappelé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = n.n!$.

6. (a) f est de classe C^∞ donc en particulier, continue sur $]-R,R[$. Or $[0,1] \subset]-R,R[$ car $R > 1$.
Donc f est continue sur le segment $[0,1]$. Par théorème elle est bornée.
Il existe et on le fixe un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in [0,1], |f(x)| \leq M$.
Par théorème, pour tout réel du disque ouvert de convergence $]-R,R[$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est absolument convergente.
Or $1 \in]-R,R[$ donc $\left|\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|$ est le terme général d'une série convergente.
Enfin, $\forall x \in [0,1], \left|f(x)\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| \leq M\left|\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|$ donc $\sup_{x\in[0,1]}\left|f(x)\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| \leq M\left|\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|$.
Par définition, la série de fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f(x)\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,1]$.

(b) Pour tout $x \in [0,1]$, $\sum_{n=0}^{\infty} f(x)\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)^2$.
Donc la série de fonction précédemment étudiée converge normalement donc uniformément sur le segment $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto (f(x))^2$. Les fonctions sont continues.
Par théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^1 f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\int_0^1 f(x)x^n \,\mathrm{d}x = 0$.
La fonction $x \mapsto f(x)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur le segment $[0,1]$ donc par théorème, cette fonction est nulle et $\forall x \in [0,1], f(x)^2 = 0$.
Par le caractère intègre de $\mathbb{R}, \forall x \in [0,1], f(x) = 0$.

(c) Soit $a \in]0,1[$ fixé. Au voisinage de a, f est identiquement nulle donc $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall a \in]0,1[\,, f^{(n)}(a) = 0$ donc $f^{(n)}$ est nulle sur $]0,1[$.
Par continuité de $f^{(n)}$ en 0 (à droite), $f^{(n)}(0) = 0$.
Donc $\forall x \in]-R,R[\,, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$.
Conclusion : f est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R,R[$.

Partie 2 : contre-exemples

7. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Par les théorèmes généraux, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[\,, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.
En revanche, cette série n'est pas définie pour $x = 1$ (terme général qui ne tend pas vers 0) donc f ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

8. (a)

(b) Dans cette question, nous identifions les polynômes à coefficients réelles et les fonctions polynomiales associées.
Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ le prédicat $P(n) : \exists P_n \in \mathbb{R}[X] | \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$.
Initialisation :
Posons $P_0 = 1$ qui est bien un polynôme...
$\forall x > 0, \dfrac{P_0(x)}{x^{3\times 0}}e^{-1/x^2} = e^{-1/x^2} = f(x)$.
Donc $P(0)$ est vrai.
Hérédité :
Soit $n \geq \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n-1)$ vrai.
Alors, il existe et on le fixe un polynôme $P_{n-1} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0, f^{(n-1)}(x) = P_{n-1}(x)x^{-3n+3}e^{-x^{-2}}$.

Par dérivation de l'égalité précédente, on a
$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P'_{n-1}(x)x^{-3n+3}e^{-1/x^2} + P_{n-1}(x)(-3n+3)x^{-3n+2}e^{-1/x^2} + P_{n-1}(x)x^{-3n+3}(2x^{-3})e^{-1/x^2}$
$= \dfrac{1}{x^{3n}}e^{-1/x^2}\left(x^3P'_{n-1}(x) + (-3n+2)x^2P_{n-1}(x) + 2P_{n-1}(x)\right)$.
Posons $P_n = X^3P'_{n-1} + (-3n+2)X^2P_{n-1} + 2P_{n-1}$. Par stabilité de $\mathbb{R}[X]$ par la dérivation, le produit, la somme... P_n est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et il vérifie $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P_n(x)\dfrac{1}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$.
$P(n)$ est donc vrai.
Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui démontre le résultat.

(c) Montrons par récurrence sur n le prédicat $P(n)$: f est de classe C^n sur $[0, +\infty[$ et $f^{(n)} = 0$.
Initialisation :
f est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to -\infty} e^u = 0$ donc par composition des limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.
Donc f est continue à droite en 0.
f est donc continue sur $[0, +\infty[$ ce qui démontre $P(0)$.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n-1)$ vrai.
Alors $f^{(n-1)}$ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
De plus, f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ donc $f^{(n-1)}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
D'après la question précédente, $\forall x > 0, (f^{(n-1)})'(x) = f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}$.
Par les théorèmes de comparaison des fonctions usuelles, au voisinage de $+\infty$, $u^{3n}e^{-u^2} = o(1)$.
Or $\lim\limits_{x\to 0^+}(1/x) = +\infty$ donc par substitution, au voisinage de 0^+, $\dfrac{1}{x^{3n}}e^{-1/x^2} = o(1)$.
P_n est une fonction polynomiale donc continue en 0 donc bornée au voisinage de 0.
Ainsi, par théorème d'opérations, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (f^{(n-1)})'(x) = 0$.
En résumé, $f^{(n-1)}$ est continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} (f^{(n-1)})'(x) = 0$.
Par théorème de prolongement de la classe C^1, $f^{(n-1)}$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et $(f^{(n-1)})'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} (f^{(n-1)})'(x) = 0$.
Par définition, f est donc de classe C^n sur $[0, +\infty[$ et $f^{(n)}(0) = (f^{(n-1)})'(0) = 0$ ce qui démontre $P(n)$.
Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
f est donc de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

(d) Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que la fonction f soit développable en série entière sur $]-r, r[$.
D'après le théorème rappelé et la question précédente, $\forall x \in]-r, r[\,, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$.
En particulier, $r/2 \in]-r, r[$ et $r/2 \neq 0$ donc $e^{-4/r^2} = 0$: absurde.
Conclusion f n'est pas développable en série entière sur aucun intervalle de la forme $]-r, r[$ avec $r > 0$.

9. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\forall t \geq 0, 1 + tx^2 \geq 1$ donc $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est bien définie et continue d'après les théorèmes généraux sur $[0, +\infty[$.
Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{e^{-t}}{1+tx^2} = O(e^{-t})$. $t \mapsto e^{-t}$ est de signe constant et intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
Fixons a un réel strictement positif.
Posons la fonction g définie sur $[0, +\infty[\times[-a, a]$ par $g(t, x) = \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$.
Soit $t \geq 0$ fixé. $x \mapsto g(t, x)$ est dérivable sur $[-a, a]$ et $\forall x \in [-a, a]$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \dfrac{-2txe^{-t}}{(1+tx^2)^2}$.
De plus, $\forall x \in [-a, a]$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leq 2tae^{-t}$.
La fonction $t \mapsto 2tae^{-t}$ est positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ en particulier car au voisinage de $+\infty$, $2ate^{-t} = o(1/t^2)$.
Pour tout $x \in [-a, a]$, les fonctions $t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.
Par théorème, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x, t)\,\mathrm{d}t = f(x)$ est de classe C^1 sur $[-a, a]$ donc f est de classe C^1 sur $[-a, a]$ et ceci pour tout $a > 0$. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $t>0$ fixé. Posons $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ qui est un réel strictement positif.
Soit $x \in \,]-\alpha, \alpha[$. Alors $tx^2 \in [0,1[$.
Donc $\dfrac{e^{-t}}{1+tx^2} = e^{-t}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p(tx^2)^p = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p t^p (2p)! e^{-t}}{(2p)!}x^{2p}$.
Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$.
D'après ce qui précède, h est développable en série entière sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ donc par le théorème rappelé, $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(2p)}(0) = (-1)^p(2p)!t^p e^{-t}$ et $f^{(2p+1)}(0) = 0$.

(c) D'après la question précédente et le résultat admis à la fin de la question $9(a)$, $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(2p+1)}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0 \,\mathrm{d}t = 0$ et $f^{(2p)}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(-1)^p(2p)!e^{-t}t^p \,\mathrm{d}t = (-1)^p(2p)!\Gamma(p+1) = (-1)^p(2p)!p!$.
Ainsi, on peut réécrire ainsi (formellement) la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$:
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(2p)!p!}{(2p)!}x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p p!\, x^{2p}$.
Soit x un réel non nul fixé.
Posons $u_p = (-1)^p p! x^{2p}$, terme général d'une suite de réels tous non nuls.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\dfrac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = p|x|^2$ qui tend vers $+\infty$ quand p tend vers ∞.
Donc u_p n'est pas le terme général d'une série absolument convergente.
Par caractérisation du rayon de convergence d'une série entière, celui de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est donc nul.
Supposons qu'il existe $r>0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r, r[$.
Alors, par le théorème rappelé, $\forall x \in \,]-r, r[\,, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ et, par caractérisation du rayon de convergence, celui de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est donc supérieur ou égal à r. Donc $0 \geq r$: absurde.
Donc f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Partie 3 : condition suffisante

10. (a) Fixons un réel $x \in \,]-a, a[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle $]-a, a[$.
$(0, x) \in \,]-a, a[^2$.
$|f^{(n+1)}| \leq M$.
Par l'inégalité de Taylor Lagrange, on obtient alors $\left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leq M\frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} = M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.
Par comparaison des suites usuelles, $\left(\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\right) \to 0$ donc par théorème d'encadrement, $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$ce que l'on peut réécrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x)$.
f est donc développable en série entière sur $]-a, a[$ donc au voisinage de 0.

(b) $\forall (n, x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}, |\sin^{(n)}(x)| \leq 1$ donc sin est développable en série entière au voisinage de 0 (sur $\mathbb{R}$...) par la question précédente.