# DM9

## Problème : séries de Taylor et développement en série entière

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

### Partie préliminaire

Dans cette partie, les questions sont indépendantes les unes des autres et leurs résultats peuvent être admis dans la suite du problème.

1. Justifier, pour tout réel $x \in ]-1, 1[$, l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1}$ et donner sa valeur.
2. On rappelle que la fonction $\Gamma$ est définie pour tout réel $x \in ]0, +\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t \, .$$

   Démontrer que pour tout réel $x \in ]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul, la valeur de $\Gamma(n)$.

3. Démontrer la formule de Taylor avec reste de Laplace (ou reste intégral) :
si $I$ est un intervalle contenant le réel $a$, si $f$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ sur $I$, alors pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier naturel $n$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \; .$$

**On rappelle le theoreme suivant :**
Si une fonction $f$ admet un développement en série entière sur l'intervalle $]-a,a[$, alors :
- la fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-a,a[$,
- son développement en série entière est unique et est donné par la série de Taylor de la fonction $f$ à l'origine :

$$\text{pour tout réel } x \in \,]-a,a[\;,\; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \; .$$

## I. Quelques exemples d'utilisation de ce théorème

4. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x \neq 0 \;,\; f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Démontrer que la fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. Expliciter une fonction $f$ de classe $C^\infty$ sur un voisinage de 0 et vérifiant, pour tout entier naturel $n$, l'égalité $f^{(n)}(0) = n.\,n!$

6. Un théorème des moments
Soit $f$ une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$ avec $R > 1$ :

$$\forall x \in \,]-R,R[\,,\;\; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \; .$$

On suppose, que pour tout entier naturel $n$, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$.
L'objectif de cette question est de montrer que $f$ est identiquement nulle sur $]-R,R[$.

   (a) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,1]$.

   (b) A l'aide du calcul de $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x$, démontrer que la fonction $f$ est nulle sur l'intervalle $[0,1]$.

   (c) Démontrer que $f$ est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R,R[$.

## II. Contre-exemples

7. Donner un exemple de fonction $f$ à la fois de classe $C^\infty$ sur un intervalle $I$ et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur $I$ tout entier.

8. Un exemple de fonction ne coïncidant avec sa série de Taylor en 0 sur aucun voisinage de 0

   On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

   pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $f(0) = 0$.

   (a) Donner, à l'aide de la calculatrice (sans étude), l'allure de la courbe de la fonction $f$.

   (b) Par les théorèmes généraux, la fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
   Démontrer que pour tout entier naturel $n$, il existe un polynôme $P_n$ tel que, pour tout $x \in ]0, +\infty[$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

   (c) Démontrer que la fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $[0, +\infty[$ avec pour tout entier naturel $n$, $f^{(n)}(0) = 0$.
   Par parité, la fonction $f$ ainsi définie est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   (d) La fonction $f$ est-elle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ ?

9. Un exemple où la série de Taylor de la fonction $f$ en 0 a un rayon nul

   Pour tout $x$ réel, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + t\,x^2}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Justifier que, pour tout réel $x$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1 + t\,x^2}$ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$, puis démontrer que la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
   On admettra que la fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on obtient les dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.

   (b) Pour $t \in ]0, +\infty[$, calculer, au moyen d'une série entière, les dérivées successives en zéro de la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1 + t\,x^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel $n$.

   (c) Quel est le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ?
   La fonction $f$ est-elle développable en série entière à l'origine ?

## III. Condition suffisante

On se propose, dans cette partie, d'étudier une condition suffisante pour qu'une fonction de classe $C^\infty$ sur un intervalle centré en 0 soit développable en série entière au voisinage de 0.

10. Soient $a$ un réel strictement positif et $f$ une fonction de classe $C^\infty$ sur l'intervalle $]-a, a[$. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout réel $x \in ]-a, a[$ et pour tout entier naturel $n$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$.

    (a) Démontrer que la fonction $f$ est développable en série entière au voisinage de l'origine.

    (b) Donner un exemple simple de fonction pour laquelle ce résultat s'applique.

**Fin de l'énoncé**