Eléments de correction : Mines-ponts 2011 - filière MP
Première composition (3h)

1. Comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$, le polynôme P est scindé, donc s'écrit par définition de l'ordre de multiplicité des racines d'un polynôme : $P = a\prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ avec a un complexe non nul (car P est non nul). Le polynôme caractéristique de f est P celui de A, matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton, P est un polynôme annulateur de f et donc, via le lemme des noyaux, comme les polynômes $(\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre-eux, on a

$$\boxed{\mathbb{C}^n = \ker P(f) = \oplus_{i=1}^{r} \ker\left(f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}\right)^{\alpha_i} = \oplus_{i=1}^{r} F_i}$$

2. Pour tout i de 1 à r, comme f et $P_i(f)$ commutent, le noyau F_i de $P_i(f)$ reste stable par l'endomorphisme f et on peut bien considérer l'endomorphisme f_i induit par f sur F_i, ainsi $P_i(f_i)$ est l'endomorphisme induit par $P_i(f)$ sur $F_i = \ker P_i(f)$ donc $P_i(f_i)$ est l'endomorphisme nul i.e. P_i est un polynôme annulateur de f_i. Toute valeur propre complexe de f_i est donc racine de P_i ainsi la seule valeur propre possible de f_i est λ_i, or les racines complexes du polynôme caractéristique χ_{f_i} de f_i sont exactement les valeurs propres complexes de f_i. Ainsi le polynôme caractéristique de f_i est du type $\chi_{f_i} = (X - \lambda_i)^{\nu_i}$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{C}^n$, adaptée à la décomposition de $\mathbb{C}^n$ en la somme directe de la question **1**, Comme f laisse stable chacun des F_i, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, concaténation des bases $\mathcal{B}_i$ de F_i, est diagonale par blocs avec

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_r}(f_r) \end{pmatrix}$$

Ainsi son polynôme caractéristique vaut $\prod_{i=1}^{r}\chi_{f_i} = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\nu_i}$ et aussi $P = a\prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ par hypothèse ; donc par unicité d'une décomposition en éléments irréductibles, on obtient $a = (-1)^n$ et $\alpha_i = \nu_i$ pour tout i. Ainsi $\boxed{\text{Pour tout } i\text{, le polynôme caractéristique de } f_i \text{ est } (\lambda_i - X)^{\alpha_i} = P_i.}$

3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à une base $\mathcal{B}$ fixée de $\mathbb{C}^n$, adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^{r} F_i$ (cf question **1**) ; la matrice P est bien une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$. Comme A est la matrice de l'endomorphimse f dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, la formule de changements de bases assure que $\boxed{A' = P^{-1}AP}$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Avec les notations de la question **2**, pour tout i, notons N_i la matrice de $f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{f_i}$ dans la base $\mathcal{B}_i$ de F_i. Toujours d'après la question **2**, le polynôme $P_i = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ est annulateur de f_i donc $(\lambda_i \mathrm{Id}_{F_i} - f_i)^{\alpha_i}$ est l'endomorphisme nul donc sa matrice dans la base $\mathcal{B}_i$, vaut $0 = (-N_i)_i^{\alpha}$ et N_i est bien nilpotente. Finalement, on a bien (cf question **2**),

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A' = P^{-1}AP \quad &= \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_r}(f_r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}\end{aligned}}$$

4. Soit D' et N' les matrices diagonales par blocs suivantes

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N' = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_r \end{pmatrix}$$

Les matrices D' et N' commutent (via un produit par blocs), la matrice N' est nilpotente puisque $N'^{\alpha} = 0$ avec $\alpha = \max(\alpha_i \mid i = 1 \dots r)$, et $A' = D' + N'$. Ainsi, on obtient par définition de $A' = P^{-1}AP$, $\boxed{A = D + N}$ avec :

- $\underline{D = P^{-1}D'P \text{ diagonalisable}}$ car semblable à D' diagonale,
- $\underline{N = P^{-1}N'P \text{ nilpotente}}$ car $N^{\alpha} = (P^{-1}N'P)^{\alpha} = P^{-1}N'P \cdots P^{-1}N'P = P^{-1}(N')^{\alpha}P = 0$,
- et $\underline{N \text{ et } D \text{ commutent}}$ puisque comme N' et D' commutent, on a

$ND = P^{-1}N'PP^{-1}D'P = P^{-1}N'D'P = P^{-1}D'N'P = P^{-1}D'PP^{-1}N'P = DN.$

Remarque : on a traduit dans la base canonique, les propriétés observées sur f dans une base adaptée.

5. Calculons le polynôme caractéristique de A. Via les combinaisons $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ et $C_3 \leftarrow C_2 + C_3$:

$$P = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 0 \\ 2-X & -X & 1-X \\ 0 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = (2-X)(1-X) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

En faisant maintenant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, puis en développant selon la première colonne, on obtient :

$$P = (2-X)(1-X) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2-X & -X & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-X)(1-X)(-1)(2-X)(-1 \times 1 - 0 \times (-1) = (2-X)^2(1-X)$$

Ainsi, dans cet exemple, on a $r = 2$, avec $\lambda_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\alpha_2 = 2$.

En notant $(e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$, on observe $A(e_2 + e_3) = e_2 + e_3$ i.e. $b_1 = e_2 + e_3$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre simple 1 (car 1 est racine simple de P) donc b_1 est une base de F_1. On a aussi $A(e_1 + e_2) = 2(e_1 + e_2)$ donc $b_2 = e_1 + e_2$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Cherchons b_3 tel que $(b_2; b_3)$ est une base de $F_2 = \ker(f - 2\mathrm{Id})^2$: nous avons

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on observe que b_2 et $b_3 = e_3$ sont bien dans le noyau de $(A-2I)^2$ et que $(b_2; b_3)$ est une famille libre, donc via la question **1**, la famille $(b_2; b_3)$ est une base de F_2 car via la question **1**, on a $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{C}^3$ donc $\dim F_2 = 3 - \dim F_1 = 3 - 1 = 2$. Ainsi avec les notations précédentes, en prenant $\mathcal{B} = (b_1; b_2; b_3)$, comme $e_3 = b_3, e_2 = b_1 - b_3$ et $e_1 = b_2 - b_1 + b_3$, nous avons

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Ainsi : $D = P^{-1}D'P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Donc par construction (cf question précédente), nous avons

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = A - D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

6. Pour tout X de $M_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P)(X) &= P^{-1}\ (\mathrm{comm}_A(PXP^{-1}))\ P = P^{-1}(A(PXP^{-1}) - (PXP^{-1})A)P \\ &= P^{-1}APXP^{-1}P - P^{-1}PXP^{-1})AP = P^{-1}APX - XP^{-1})AP\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P = \mathrm{comm}_{P^{-1}AP} = \mathrm{comm}_{\mathrm{conj}_{P^{-1}}(A)}.}$

7. Soit $a_1, \dots a_n$ les coefficients diagonaux de A, alors pour tout i et j dans $\{1, \dots, n\}$:
$\mathrm{comm}_A(E_{i,j}) = AE_{i,j} - E_{i,j}A = a_i\, E_{i,j} - a_j E_{i,j} = (a_i - a_j)\, E_{i,j}$
Comme $E_{i,j}$ est non nul, on conclut que pour tout i et j de $\{1, \dots, n\}$,
$\boxed{\text{la matrice } E_{i,j} \text{ est vecteur propre de } \mathrm{comm}_A \text{ associé à la valeur propre } a_i - a_j.}$
Comme $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension n^2, l'endomorphisme comm_A admet au plus n^2 vecteurs propres formant une famille libre ; ici, on a trouvé n^2 vecteurs propres libres, les $E_{i,j}$, on en déduit que
$\boxed{\text{le spectre de } \mathrm{comm}_A \text{ est l'ensemble des } a_i - a_j \text{ avec } i,\ j \text{ décrivant } 1 \dots n.}$

8. Si A est diagonalisable, il existe P dans $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A' = P^{-1}AP$ est diagonale. D'après la question **7**, la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ formée par les $E_{i,j}$ est alors une base de vecteurs propres de $\mathrm{comm}_{A'}$. Ainsi $\mathrm{comm}_{A'}$ est diagonalisable car de matrice dans la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ diagonale. Or d'après la question **6**, $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P = \mathrm{comm}_{P^{-1}AP}$, donc conj_P et $\mathrm{conj}_{P^{-1}}$ étant inverses l'un de l'autre, on a $\mathrm{comm}_{A'} = (\mathrm{conj}_P)^{-1} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P$. On vient donc de prouver, en notant Q la matrice conj_P dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $M_n(\mathbb{R})$ la relation $Mat_{\mathcal{C}}(\mathrm{comm}_{A'}) = Q^{-1}\, Mat_{\mathcal{C}}(\mathrm{comm}_A)\, Q$. Ainsi $Mat_{\mathcal{C}}(\mathrm{comm}_{A'})$ et $Mat_{\mathcal{C}}(\mathrm{comm}_A)$ sont semblables et comme $Mat_{\mathcal{C}}(\mathrm{comm}_{A'})$ est diagonale,
$\boxed{\text{l'endomorphisme } \mathrm{comm}_A \text{ est diagonalisable.}}$

9. Soit A fixé dans $M_n(\mathbb{C})$, calculons pour tout X de $M_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{comm}_A)^2(X) &= A(\mathrm{comm}_A(X)) - (\mathrm{comm}_A(X))A \\ &= A(AX - XA) - (AX - XA)A = A^2X - 2AXA + XA^2 \\ (\mathrm{comm}_A)^3(X) &= A(A^2X - 2AXA + XA^2) - (A^2X - 2AXA + XA^2)A \\ &= A^3X - 2A^2XA + AXA^2) - A^2XA + 2AXA^2 - XA^3 \\ &= A^3X - 3A^2XA + 3AXA^2 - XA^3\end{aligned}$$

Soit l'hypothèse de récurrence au rang k : $\forall X \in M_n(\mathbb{C}), (\mathrm{comm}_A)^k(X) = \displaystyle\sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} (-1)^s A^{k-s} X A^s$

On vient de prouver cette relation pour $k=2$ et $k=3$, et elle est vraie par définition pour $k=1$. Prouvons son caractère héréditaire en la supposant vraie à un rang k, alors pour tout $X \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{comm}_A)^{k+1}(X) &= A\left(\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s A^{k-s}XA^s\right) - \left(\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s A^{k-s}XA^s\right)A \\
&= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s A^{k+1-s}XA^s + \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^{s+1}A^{k-s}XA^{s+1} \\
&= \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s A^{k+1-s}XA^s + \sum_{s=1}^{k+1}\binom{k}{s-1}(-1)^s A^{k+1-s}XA^s \\
&= A^{k+1}X + \sum_{s=1}^{k}\left(\binom{k}{s}+\binom{k}{s-1}\right)(-1)^s A^{k+1-s}XA^s + (-1)^{k+1}XA^{k+1} \\
&= A^{k+1}X + \sum_{s=1}^{k}\binom{k+1}{s}(-1)^s A^{k+1-s}XA^s + (-1)^{k+1}XA^{k+1} \\
&\qquad\qquad \text{via la formule du triangle de Pascal} \\
&= \sum_{s=0}^{k+1}\binom{k+1}{s}(-1)^s A^{k+1-s}XA^s
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est héréditaire, vraie au rang 1 donc par le principe de récurrence, on obtient

$$\boxed{\forall X \in M_n(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (\mathrm{comm}_A)^k(X) = \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}(-1)^s A^{k-s}XA^s}$$

Ainsi si A est nilpotente, il existe un entier α avec $A^\alpha = 0$ donc $A^s = 0$ pour tout $s \geqslant \alpha$. Or pour tout entier s, soit $s \geqslant \alpha$ soit $s \leqslant \alpha$ et $2\alpha - s \geqslant \alpha$, donc via la formule précédente $(\mathrm{comm}_A)^{2\alpha} = 0$ et donc $\boxed{\text{si } A \text{ est nilpotente alors } \mathrm{comm}_A \text{ aussi.}}$

10. Si $\mathrm{comm}_A = 0$ alors pour tout i, on a $AE_{i,1} = E_{i,1}A$. En notant $a_{i,j}$ le coefficient en ligne i et colonne j de A, cette relation se traduit par (en regardant la première colonne) :
$\forall k = 1,\dots,n, \quad a_{k,i} = \delta_{i,k}a_{1,1}$ donc $a_{i,i} = a_{1,1}$ pour tout i et $a_{k,i} = 0$ pour $i \neq k$. Ainsi A est une matrice diagonale donc du type aI_n. Si on suppose de plus A nilpotente, il existe un entier α avec $A^\alpha = 0$ soit ici $a^\alpha I_n = 0$ d'où $a = 0$ et $\boxed{\text{A=0.}}$

11. Soit D et N les matrices respectivement diagonalisable et nilpotente correspondant à la décomposition de Jordan de la matrice A. Alors via les questions **8** et **9**, les endomorphismes comm_D et comm_N de $M_n(\mathbb{C})$ sont respectivement diagonalisable et nilpotent. Par linéarité du produit matriciel par une matrixe fixée, $\mathrm{comm}_A = \mathrm{comm}_{D+N} = \mathrm{comm}_D + \mathrm{comm}_N$. Ainsi, si comm_D et comm_N commutent alors par unicité de la décomposition de Jordan, on aura que

$\boxed{\text{la décomposition de Jordan de } \mathrm{comm}_A \text{ est obtenue avec les matrices } \mathrm{comm}_D \text{ et } \mathrm{comm}_N.}$

Pour tout X de $M_n(\mathbb{C})$, calculons

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{comm}_D \circ \mathrm{comm}_N - \mathrm{comm}_N \circ \mathrm{comm}_D)(X) \\
&\quad = D(NX - XN) - (NX - XN)D - (N(DX - XD) - (DX - XD)N) \\
&\quad = DNX - DXN - NXD + XND - NDX + NXD + DXN - XDN \\
&\quad = (DN - ND)X + X(ND - DN) = O_nX + XO_n = 0 \quad \text{car } N \text{ et } D \text{ commutent}
\end{aligned}$$

Ainsi comm_D et comm_N commutent, ce qui permet d'obtenir la décomposition voulue.

La question **8** assure que si A est diagonalisable alors comm_A aussi. Réciproquement supposons que comm_A est diagonalisable, alors avec les notations précédentes, comm_D et comm_N correspondantent à la décomposition de Jordan de comm_A, mais comm_A et O_n aussi (ces endomorphismes commutent, le premier est diagonalisable et le second nilpotent) donc par unicité d'une telle décomposition, on obtient $\text{comm}_D = \text{comm}_A$ et $\text{comm}_N = 0$. Ainsi comme N est nilpotente, la question **10** assure $N = 0$ donc $A = D$ et A est diagonalisable.

$\boxed{\text{Finalement, } A \text{ est diagonalisable si et seulement } \text{comm}_A \text{ l'est.}}$

12. • u diagonalisable $\Longrightarrow \ker u = \ker(u^2)$

Supposons u diagonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B} = (e_1; \dots, e_p)$ de E formée de vecteurs propres de u. Pour tout i, notons λ_i la valeur propre de u associée au vecteur propre e_i. Alors tout vecteur x de E s'écrit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ à l'aide de ses coordonnées $(x_1; \dots, x_p) \in \mathbb{C}^p$ dans $\mathcal{B}$. Par linéarité de u,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i\ u(e_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i \lambda_i\ e_i,\ \text{ et } u^2(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i\ u^2(e_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i \lambda_i^2\ e_i,$$

Ainsi comme $\mathcal{B}$ est libre : $[x \in \ker u \Leftrightarrow \forall i = 1 \dots p \quad \lambda_i x_i = 0\ ]$ et $[x \in \ker u^2 \Leftrightarrow \forall i = 1 \dots p \quad \lambda_i^2 x_i = 0\ ]$, or $\lambda_i = 0$ si et seulement $\lambda_i^2 = 0$ donc via ce qui précède $x \in \ker u \Leftrightarrow x \in \ker u^2$ et donc $\boxed{\ker u = \ker(u^2)}$

• $\ker u = \ker(u^2) \Longrightarrow \ker u \cap \text{Im} u = \{0\}$

Supposons que l'endomorphisme u vérifie $\ker u = \ker(u^2)$. Soit x dans $\ker u \cap \text{Im} u$ alors comme x est dans $\text{Im} u$, il existe y dans E avec $x = u(y)$ et comme x appartient à $\ker u$, on a aussi $u(x) = 0$; donc en remplaçant $u^2(y) = u(u(y)) = u(x) = 0$ donc y appartient à $\ker(u^2)$ qui est $\ker u$ par hypothèse donc $u(y) = 0$ i.e. $x = 0$. Ainsi $\ker u \cap \text{Im} u \subset \{0\}$ et comme intersection de deux sous-espaces vectoriels de E, on a bien $\boxed{\ker u \cap \text{Im} u = \{0\}.}$

13. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ des scalaires complexes tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i\ \varphi_i = 0$ i.e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i\ b(\varepsilon_i; x) = 0$ pour tout x de E. Par linéarité à gauche de b, on a aussi $b\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i\ \varepsilon_i; x\right) = 0$ pour tout x de E i.e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i\ \varepsilon_i$ appartient à $E^{\perp_b}$ donc est nul car b est supposée non dégénérée, donc comme $(\varepsilon_1; \cdots; \varepsilon_q)$ est une famille libre, tout les λ_i sont non nuls. Ainsi $\boxed{\text{la famille } (\varphi_i)_{i=1\dots q} \text{ est libre.}}$

14. L'orthogonal $F^{\perp_b}$ de F relativement à b est l'ensemble des vecteurs x de E tels que la forme linéaire $b(x; \cdot)$ est nulle sur F. Or par linéarité $b(x; \cdot)$ est nulle sur le sous-espace vectoriel F si et seulement si cette forme est nulle sur une base de F. Ainsi :

$x \in F^{\perp_b} \Longleftrightarrow \forall i = 1 \dots q,\ b(x; \varepsilon_i) = 0$ i.e. $\varphi_i(x) = 0$ par symétrie de b

Soit $(x_1; \dots x_p)$ les coordonnées d'un vecteur x dans la base $(e_1; \dots; x_p)$ de E, on a donc

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j\ e_j\ \in F^{\perp_b} \Longleftrightarrow \forall i = 1 \dots q,\ \varphi_i(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall i = 1 \dots q,\ x_i = 0$$

car $(e_1; \dots; e_p)$ est la base antéduale de $(\varphi_1; \dots; \varphi_p)$. Ainsi,

$\boxed{\text{L'orthogonal } F^{\perp_b} \text{ est le sous-espace vectoriel engendré par } (e_{q+1}; \dots; e_p).}$

Par hypothèse F est de dimension q et $F^{\perp_b}$ de dimension le cardinal d'une famille libre et génératrice (i.e. une base) de $F^{\perp_b}$, c'est le cas de $(e_{q+1};\dots;e_p)$. Donc $\boxed{\dim F + \dim F^{\perp_b} = q + (p-q) = p.}$

15. Comme l'application trace est une forme linéaire et la multiplication à droite ou à gauche par une matrice fixe est aussi linéaire, par composition φ est une forme bilinéaire. Elle est symétrique par définition de la trace :

$$\forall (X;Y) \in (M_n(\mathbb{C}))^2;\ \ \operatorname{tr}(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_{i,j}\, Y_{j,i} = \sum_{(i,j)\in\{1;\dots;n\}^2} X_{i,j}\, Y_{j,i}$$

Reste à montrer que φ est non dégénérée : soit donc C dans $E^{\perp_\varphi}$ alors
$\varphi(C;{}^t\bar{C}) = 0$ i.e. $0 = \displaystyle\sum_{(i,j)\in\{1;\dots;n\}^2} A_{i,j}\,({}^t\overline{C})_{j,i} = \sum_{(i,j)\in\{1;\dots;n\}^2} C_{i,j}\,\overline{C_{i,j}} = \sum_{(i,j)\in\{1;\dots;n\}^2} |C_{i,j}|^2$
Donc par somme de réels positifs, $|C_{i,j}|^2 = 0$ i.e. $C_{i,j} = 0$ pour tout $(i;j)$ donc $C = 0$.

Finalement $\boxed{\varphi \text{ est une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée.}}$

16. Comme φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $M_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension n^2, la question **14** donne la relation $\dim\left(\ker\left(\operatorname{comm}_A\right)\right)^{\perp_\varphi} = n^2 - \dim\left(\ker\left(\operatorname{comm}_A\right)\right)$. Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme comm_A de $M_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension n^2, assure donc $\dim\left(\ker\left(\operatorname{comm}_A\right)\right)^{\perp_\varphi} = \dim \operatorname{Im}\left(\operatorname{comm}_A\right)$.

De plus, on a $\operatorname{Im}(\operatorname{comm}_A) \subset \left(\ker\left(\operatorname{comm}_A\right)\right)^{\perp_\varphi}$. En effet : $\forall C \in \operatorname{Im}(\operatorname{comm}_A)$,
$\exists X \in M_n(\mathbb{C})$ tq $C = \operatorname{comm}_A(X) = AX - XA$ donc par linéarité de la trace,
$\forall Y \in \ker(\operatorname{comm}_A)$, $\operatorname{tr}(CY) = \operatorname{tr}(AXY) - \operatorname{tr}(XAY) = \operatorname{tr}(AXY) - \operatorname{tr}(X(AY - YA)) - \operatorname{tr}(XYA)$
Or $AY - YA = \operatorname{comm}_A(Y) = 0$ et $\operatorname{tr}(AXY) = \operatorname{tr}((XY)A)$ par propriété de la trace.
Ainsi $\varphi(C;Y) = \operatorname{tr}(CY) = 0$ donc C appartient bien à $\left(\ker\left(\operatorname{comm}_A\right)\right)^{\perp_\varphi}$.

Deux sous-espaces vectoriels de même dimension, dont l'un est inclus dans l'autre, étant confondus :

$$\boxed{\operatorname{Im}(\operatorname{comm}_A) = \left(\ker\left(\operatorname{comm}_A\right)\right)^{\perp_\varphi}}$$

17. Supposons A nilpotente. Soit Y dans $\ker(\operatorname{comm}_A)$, alors $AY = YA$ donc par récurrence, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $(AY)^k = A^kY^k$ et comme A est nilpotente, il existe une valeur de k avec $A^k = 0$ donc $(AY)^k = 0$ et X^k est un polynôme annulateur de AY. Toute valeur propre complexe de AY est donc racine de X^k donc est nulle et comme le polynôme caractéristique de AY est scindé (car élément non constant de $\mathbb{C}[X]$), la matrice AY est trigonalisable donc de trace la somme de ses valeurs propres. Ainsi on a $\operatorname{tr}(AY) = \varphi(A;Y) = 0$ et A appartient à l'orthogonal de $\ker(\operatorname{comm}_A)$. La question **16** assure donc

$$\boxed{\exists X \in M_n(\mathbb{C}) \quad \text{tq} \quad \operatorname{comm}_A(A) = A}$$

Par bilinéarité du produit matriciel, on a $\operatorname{comm}_{A+\lambda I_n} = \operatorname{comm}_A + \lambda \operatorname{comm}_{I_n} = \operatorname{comm}_A$ donc

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{comm}_{A+\lambda I_n}(X) = \operatorname{comm}_A(X) = A}$$

18. Reprenons les notations des questions **3** et **4**. Pour tout $i =$ de 1 à r, la question précédente assure qu'il existe X_i dans $M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ tel que $\operatorname{comm}_{N_i+\lambda_i I_{\alpha_i}}(X_i) = N_i$. Soit X la matrice diagonale par blocs dont les blocs sont les X_i, alors $\operatorname{comm}_A(PXP^{-1}) = A(PXP^{-1}) - (PXP^{-1})A = P\,(A'\,X - X\,A')\,P^{-1}$
Calculons par blocs :

$$
\begin{aligned}
A'\,X &= \begin{pmatrix} \lambda_1\, I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r\, I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X_r \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\lambda_1\, I_{\alpha_1} + N_1)X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\lambda_r\, I_{\alpha_r} + N_r)X_r \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Donc } A'\,X - A'\,X &= \begin{pmatrix} \mathrm{comm}_{\lambda_1\, I_{\alpha_1}+N_1}(X_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{comm}_{\lambda_r\, I_{\alpha_r}}(X_r) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_r \end{pmatrix} = N'
\end{aligned}
$$

Et ainsi $\boxed{\mathrm{comm}_A(PXP^{-1}) = P\,(A'\,X - X\,A')\,P^{-1} = N}$

19. Si A est diagonalisable alors comm_A aussi via la question **8**, donc la question **12** assure

$$\boxed{\ker(\mathrm{comm}_A) = \ker\left((\mathrm{comm}_A)^2\right).}$$

Réciproquement, supposons $\ker(\mathrm{comm}_A) = \ker\left((\mathrm{comm}_A)^2\right)$ et notons $(D; N)$ la décomposition de Dunford de A. Par choix D et N commutent, donc
$\mathrm{comm}_A(N) = AN - NA = (D+N)N - N(D+N) = O_n$ i.e. N appartient à $\ker(\mathrm{comm}_A)$.
Mais la question **17** donne l'existence d'une matrice X avec $N = \mathrm{comm}_A(X)$, donc X vérifie $(\mathrm{comm}_A)^2(X) = \mathrm{comm}_A(N) = O_n$ ainsi X appartient à $\ker\left((\mathrm{comm}_A)^2\right)$ donc à $\ker(\mathrm{comm}_A)$ par hypothèse, ce qui se traduit par $\mathrm{comm}_A)(X) = O_n$ i.e. $N = O_n$. Donc $A = D$ et on a bien $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$