

## 1.3 Mathématiques 2 - filière MP

### 1.3.1 Généralités et présentation du sujet

Le problème proposé aux candidats établissait la preuve des résultats suivants :

Si  $\varphi$  est une fonction réelle de variable réelle définie sur un intervalle  $I$ , on définit l'image  $u(\varphi)(S)$  d'une matrice symétrique réelle  $S$  à valeurs propres dans  $I$  en appliquant  $\varphi$  à ses valeurs propres après orthodiagonalisation, et on considère la trace  $\nu(\varphi)(S)$  de  $u(\varphi)(S)$ .

On démontre alors que :

- si  $\varphi$  est continue, alors  $u(\varphi)$  et  $\nu(\varphi)$  sont continues ;
- si  $\varphi$  est convexe, alors  $\nu(\varphi)$  est convexe.

La difficulté dans le premier résultat réside dans le fait que comme  $u(\varphi)(S)$  est définie à partir des valeurs propres de la matrice  $S$ , il faut disposer de la continuité de ces valeurs propres en fonction de  $S$ . Or le problème de la continuité des racines d'un polynôme en fonction de celui-ci est loin d'être simple : on pourra pour s'en convaincre consulter l'article de Vincent Pilaud, *Continuité des racines d'un polynôme*, référencé en [5] dans l'article de Wikipédia intitulé *Relations entre coefficients et racines*.

Dans le cas des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle, l'auteur du sujet procède en établissant la continuité du polynôme caractéristique d'une matrice en fonction de celle-ci, puis à partir de la norme du rayon spectral, en montrant que la liste croissante des valeurs propres d'une suite convergente de matrices converge vers la liste croissante des valeurs propres de sa limite. Il ne reste plus qu'à invoquer la compacité du groupe orthogonal pour se prémunir de toute divergence de la suite de matrices de passage.

Le second résultat nécessite de considérer l'image par  $u(\varphi)$  d'un barycentre de deux matrices symétriques réelles, or celles-ci ne sont simultanément orthodiagonalisables que si elles commutent, ce qui n'est pas le cas en général.

L'auteur du sujet contourne ce problème ainsi. On considère l'ensemble  $\mathcal{U}_S$  des conjuguées de  $S$  par le groupe des matrices orthogonales, puis l'ensemble des sommes des images par  $\varphi$  des éléments diagonaux de ces conjuguées. Alors  $\nu(\varphi)(S)$  est le maximum de cet ensemble. Cette définition permet de s'affranchir de l'obstacle de la conjugaison par deux matrices de passage orthogonales différentes pour les deux matrices considérées.

### 1.3.2 Commentaires généraux

#### Correction

Les comportements des candidats face à ce sujet ont été extrêmement divers. Entre ceux qui ont maîtrisé le problème jusqu'à la dernière question et ceux qui, sans doute tétanisés par l'enjeu, n'ont pas su donner la définition d'un produit de matrices, nous avons observé tout l'éventail des résultats. Plus surprenant, cette distorsion est apparue au sein même de certaines copies, dont les auteurs ne semblaient pas connaître des définitions de base de leur cours et cependant ont résolu avec brio quelques questions difficiles.

Ce qui nous a frappés dans un grand nombre de copies, ce sont le manque d'attention aux définitions données au début du problème, l'indifférence à la nécessité de justifier toutes les assertions et l'impression que leur auteur se contente de donner les grandes lignes de la démonstration, à charge pour le correcteur de combler lui-même les lacunes du raisonnement. À l'inverse, certains candidats se sont montrés attentifs, rigoureux et scrupuleux, et bien que n'ayant pas toujours avancé jusqu'au bout du problème, se sont vu récompensés par une note plus qu'honorable de leurs efforts, bien meilleure que celle d'autres candidats qui, se promenant jusqu'au bout du sujet en écrivant sur chaque question quelques lignes sans logique aucune, n'en ont tiré que de rares points par la rare chance d'affirmations élémentaires.

Nous avons par ailleurs observé fréquemment un certain manque de hauteur par rapport aux notions examinées, ce qui nous a conduits à lire des raisonnements certes corrects mais plus ou moins laborieux. C'est une attitude qui n'est pas vraiment compatible avec l'état d'esprit d'un ingénieur ou d'un chercheur, qui face à un problème se doit de chercher à l'appréhender dans sa globalité au lieu de le regarder par le petit bout de la lorgnette. C'est ainsi que l'on est perspicace et inventif et que l'on est capable de créer des réacteurs nucléaires qui produisent de l'électricité et des vaccins qui immunisent.

### Matrices de permutations

L'auteur du sujet nous propose ici une promenade dans une forêt de Kronecker et de permutations des éléments d'une matrice diagonale. Les mathématiques ont ceci de commun avec les jeux vidéo que l'on y prend de la hauteur pour franchir les monstres. En l'occurrence, passer des matrices aux espaces vectoriels euclidiens permettait de survoler les monstres de calcul sur les composantes des matrices. Vue ainsi, cette partie n'a rien que de très élémentaire. L'endomorphisme  $u(\sigma)$  associé à la matrice  $(\sigma)$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}_n$  effectue sur les indices des vecteurs de celle-ci la permutation  $\sigma$ . Rien d'étonnant de ce fait que  $u$  soit un morphisme du groupe  $S_n$  des permutations dans le groupe  $GL_n(\mathbf{R})$  des automorphismes de  $\mathbf{R}_n$ . L'image de la base canonique, qui est orthonormale, étant une base orthonormale, ces automorphismes sont orthogonaux. La troisième question est la formule de changement de base orthonormale pour un endomorphisme. Enfin, si deux listes de nombres sont identiques à l'ordre près, l'une est l'image de l'autre par une permutation de ses éléments, et si ce sont les éléments diagonaux de deux matrices diagonales, cette permutation résulte de la permutation identique des vecteurs propres des endomorphismes associés.

### 1.3.3 Analyse détaillée des questions

**Q1** - Nous avons été surtout frappés par le nombre important de candidats qui effectuent le produit de matrice élément par élément, en ignorant superbement la formule qui donne ce produit. À côté de cela, sommer dans cette formule les indices de 0 à  $n$  est presque un péché véniel. Par ailleurs, trop de candidats n'explicitent pas le raisonnement sur les indices de Kronecker, ou ne le concluent pas en disant qu'ils ont établi ce qu'on demandait.

**Q2** - Plusieurs candidats ont écrit le terme général de la transposée de  $(\sigma)$  par simple échange des indices  $-\delta_{\sigma(j),i}$  au lieu de  $\delta_{i,\sigma(j)}$  - ce qui ne change pas sa valeur, puis ont « démontré » le résultat demandé par un tour de passe-passe sur les produits de symboles de Kronecker. Plus rarement, nous avons vu des copies où était démontré  $(\sigma)(\sigma^{-1}) = I_n$ , ce qui à soi seul ne permettait bien sûr pas de conclure.

**Q3** - Nous avons observé quelques erreurs de calcul dans cette question : certains candidats ont affirmé que les deux membres sont des matrices diagonales, d'autres ont laissé un symbole de sommation sur un indice qui n'apparaissait plus dans la quantité sommée ; mais en général, cette question a été correctement traitée.

**Q4** - Certains candidats n'ayant pas lu assez attentivement l'énoncé ont « démontré » que les deux assertions (i) et (ii) sont vraies pour tout couple de matrices diagonales  $D$  et  $D'$ . Ceux qui ont compris l'énoncé ont souvent traité le sens direct correctement, bien que manque fréquemment la justification de la simplification par  $(\sigma)$ . Par contre le sens réciproque a été assez malmené, soit parce que les candidats tenaient pour acquis que l'égalité de la **Q3** implique directement avec l'hypothèse (ii) que  $D' = \text{Diag}(d_{\sigma(i)})$ , soit parce que l'égalité du nombre d'occurrences des coefficients diagonaux dans les deux matrices n'a pas été établie. En particulier, certains candidats ont utilisé le fait que l'hypothèse (ii) implique que  $D$  et  $D'$  sont semblables, et de ce fait ont les mêmes valeurs propres, mais faute de parler de la dimension des sous-espaces propres associés ou de la multiplicité des racines de leurs polynômes caractéristiques, ils n'ont pas établi l'égalité de ce nombre d'occurrences.

### Fonctions de matrices symétriques

**Q5** - Cette question de cours n'a pas connu la réussite que nous attendions. Tout d'abord, tous les candidats n'ont pas pris la peine de préciser que la matrice  $S$  est *symétrique réelle* en vue d'appliquer le théorème spectral. Plusieurs ont conclu que  $S$  est diagonalisable, donc qu'il existe une matrice orthogonale  $\Omega$  qui diagonalise  $S$  : une perte d'information en cours de raisonnement ne peut être récupérée par la suite sans commettre une erreur de logique. Par ailleurs, il est faux de dire que toute base de diagonalisation de  $S$  est orthonormale, et encore plus que les vecteurs propres de  $S$  forment une base orthonormale. Enfin, il convenait de revenir à la définition de  $S_n(I)$  pour vérifier que les réels  $s_i$  appartiennent à  $I$  ; malheureusement, de nombreux candidats, faute de lire correctement l'énoncé, ont pensé que  $S_n(I)$  est l'ensemble des matrices symétriques à éléments dans  $I$ . D'une manière générale, ce genre de question ne doit pas être traité avec désinvolture : le correcteur s'attend à ce que le candidat cite avec précision les hypothèses et les conclusions du théorème utilisé. Se limiter à une paraphrase de la question ne permet pas de gagner des points.

**Q6** - Encore une question de cours, où il s'agissait cette fois d'utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange pour construire le polynôme demandé. Malheureusement bien peu de candidats ont pris la peine de se limiter à une occurrence de chaque valeur de la famille  $(s_i)$ , ce sans quoi les formules qu'ils écrivaient n'avaient pas forcément un sens. Certains ont invoqué le théorème de Weierstrass pour approcher la fonction  $f$  par une suite de polynômes, mais outre que ce théorème ne vaut que pour une fonction continue sur un segment, cela ne permettait bien évidemment pas d'obtenir un polynôme égal à  $f$  aux points  $s_i$ .

**Q7** - Cette question est cruciale dans la suite du problème car elle permet de définir l'image d'une matrice symétrique  $S$  par  $u(\varphi)$  indépendamment de son orthodiagonalisation. La question précédente permettait de choisir un polynôme  $P$  prenant les mêmes valeurs que  $\varphi$  aux réels  $s_i$  puis de calculer  $P(S)$  pour deux orthodiagonalisations différentes. Un minimum d'explications, qui n'a été fourni que par une partie des candidats, était attendu pour obtenir l'égalité  $P(S) = {}^t\Omega P(D)\Omega$  à partir de l'égalité  $S = {}^t\Omega D\Omega$  : idéalement, la démonstration par récurrence de la relation  $S^k = {}^t\Omega D^k\Omega$  en utilisant le fait que  $\Omega$  est orthogonale, puis un passage au polynôme par linéarité de la conjugaison ou distributivité du produit de matrices. Revenir à la fonction  $f$  nécessitait de rappeler que les  $s'_i$  ne sont autres que les  $s_i$  dans un ordre différent, à moins d'avoir choisi au départ un polynôme d'interpolation commun aux deux familles, ce qui ne change pas grand-chose à celui-ci.

Quant au fait que  ${}^t\Omega f(D)\Omega$  est symétrique, cela résulte d'un calcul élémentaire, mais certains candidats l'ont établi en montrant que  $S^k$  est symétrique pour tout  $k$ , puis que  $P(S)$  est symétrique, puis en rappelant que  $P(S) = {}^t\Omega P(D)\Omega = {}^t\Omega f(D)\Omega$  : après tout, pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ? Par contre, cela ne résulte pas du théorème spectral qui fournit l'implication contraire de celle qui était requise.

**Q8** - Passons sur les candidats, pas si rares, qui considèrent que la linéarité se réduit à l'additivité. Nettement plus nombreux ont été ceux qui ont établi la linéarité de  $u(\varphi)$  et  $\nu(\varphi)$  au lieu de celle de  $u$  et  $\nu$ . Si celle de  $\nu$  pouvait être justifiée en tant que composée de deux applications linéaires, nous avons apprécié que certains candidats, peu satisfaits de la notation  $Tr \circ u$  – logiquement incorrecte en plus d'être peu élégante – aient préféré démontrer directement la linéarité de  $\nu$ . La deuxième partie de la question ne présentait aucune difficulté, mais bien peu de candidats ont pris la peine de préciser que  $u(\varphi)(xI_n)$  a un sens parce que  $xI_n$  appartient à  $S_n(I)$ , ou de donner un minimum d'explications sur la manière dont ils ont obtenu sa valeur. Certains ont trouvé  $x\varphi(1)I_n$ , ce qui est faux, voire  $\varphi(x)$ , ce qui est absurde.

**Q9** - L'égalité  $u(\varphi)(xI_n) = \varphi(x)I_n$  permettait de montrer facilement que  $u$  est injective, ce que finalement assez peu de candidats ont vu. La majorité ont pris  $\varphi$  dans le noyau de  $u$  et ont calculé  $u(\varphi)(S)$  pour une matrice symétrique réelle  $S$  de  $S_n(I)$ , ce qui menait à la relation  ${}^t\Omega \text{Diag}(\varphi(s_i))\Omega = 0$ . Il convenait alors de justifier la « simplification » par  ${}^t\Omega$  et  $\Omega$  – avec un meilleur argument que la

non-nullité de  $\Omega$  – puis de préciser que puisque cette égalité est vraie pour tout choix de  $S$  dans  $S_n(I)$ , la nullité de  $\varphi$  s’ensuit.

Par contre, nous avons souvent lu que la valeur de  $\varphi$  n’étant imposée qu’aux points  $s_i$ , cette fonction peut ne pas être identiquement nulle donc  $u$  n’est pas injective : c’était oublier que l’égalité  $u(\varphi)(S) = 0$  doit être vraie pour tout choix de  $S$  dans  $S_n(I)$ . C’est cette même quantification qui, a contrario empêchait la surjectivité de l’application, qui a pourtant été « démontrée » par de nombreux candidats en recourant à des arguments tout aussi incorrects les uns que les autres : le fait que les espaces vectoriels soient de dimension finie, ce qui est évidemment faux s’agissant de l’espace vectoriel des fonctions définies sur un intervalle non réduit à un point ; certains ont même affirmé que l’espace de départ étant de dimension infinie et celui d’arrivée de dimension finie,  $u$  ne peut qu’être surjective ! Et pourtant, il est clair que l’image d’une matrice  $S$  par  $u(\varphi)$  est simultanément orthodiagonalisable à  $S$ , donc une application  $U$  de  $S_n(I)$  dans  $S_n(\mathbf{R})$  qui envoie  $S$  sur une matrice  $T$  qui ne l’est pas n’a pas d’antécédent par  $u$  ; c’est également le cas si l’image d’une matrice scalaire n’est pas scalaire, ce qu’un certain nombre de candidats ont vu.

**Q10** - Il s’agissait de vérifier l’identité de  $u(f)$  avec  $f$  lorsque  $f$  est un polynôme. La plupart des candidats ont vérifié sans mal que si  $f$  est un polynôme  $P$ , alors  $u(P)(S) = P(S)$  pour toute matrice symétrique  $S$  : ce sont les mêmes calculs qu’à la **Q7**, avec souvent les mêmes lacunes, notamment l’absence de justification de l’égalité  $P(S) = {}^t\Omega P(D)\Omega$ . Cette relation et l’injectivité de  $u$  suffisent à établir la réciproque, alors que comme à la question précédente, de nombreux candidats ont affirmé que celle-ci est fautive puisque la valeur de  $f$  n’est imposée qu’aux points  $s_i$ .

**Q11** - Cette question est un véritable révélateur de caractère. Il faut passer de la limite d’une suite de fonctions de variable réelle à la limite d’une suite de fonctions de matrices. Les comportements des candidats sont allés d’un extrême à l’autre. Il y a les scrupuleux qui citent et vérifient toutes les hypothèses requises, les pressés qui les citent sans les vérifier, les désinvoltes qui en parlent sans vraiment les citer et les dédaigneux qui ne les mentionnent même pas.

La convergence simple des suites  $(u(\varphi_k))$  et  $(v(\varphi_k))$  était très facile à obtenir, mais a rarement été justifiée correctement. Généralement, les candidats ont omis de justifier le fait que si  $D_k$  tend vers  $D$  alors  ${}^t\Omega D_k \Omega$  tend vers  ${}^t\Omega D \Omega$  parce que l’application qui à  $D$  associe  ${}^t\Omega D \Omega$  est continue car linéaire en dimension finie. Signalons que l’argument « par continuité du produit matriciel » est bien trop vague pour pouvoir être pris en compte. Les rares candidats qui ont essayé d’expliquer ce que signifie  $(u(\varphi_k))$  converge vers  $(u(\varphi))$  en ont été récompensés. La convergence de la suite  $(v(\varphi_k))$  s’en déduisait en invoquant la continuité de la trace que bien peu de candidats ont pensé à justifier, mais il était encore plus facile de l’établir directement puisqu’il s’agit de la somme de  $n$  suites convergentes de réels.

Curieusement, la convergence uniforme, quand elle a été abordée, a été traitée avec davantage de rigueur, sans doute du fait de la nécessité d’introduire une norme sur  $S_n(\mathbf{R})$  pour pouvoir la définir correctement. Les candidats n’ont pas tous utilisé la norme définie dans l’énoncé ; certains ont préféré la norme euclidienne, d’autres la norme subordonnée  $\| \|A\| \| = \sup \|AX\| ; X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|X\| = 1$  : celle-ci n’étant pas au programme, il convenait de vérifier que c’est bien une norme avant de l’utiliser. La majoration de  $\| {}^t\Omega(D_k - D)\Omega \|$  a souvent été incorrecte du fait de l’oubli du facteur  $n$ , de même que la majoration de  $\| \Omega \|$  par 1, laquelle n’a pas toujours été signalée ; en outre certaines copies étaient rédigées de façon telle que la même matrice de passage orthogonale  $\Omega$  servait à diagonaliser toutes les matrices symétriques réelles. Pour la convergence uniforme de la suite  $(v(\varphi_k))$ , la continuité de la trace ne suffisait pas, il fallait invoquer son caractère lipschitzien qui résulte de sa continuité en tant qu’application linéaire en dimension finie, mais encore fallait-il le préciser. Encore une fois, la démonstration directe était plus simple.

En fait, l’application  $u$  est elle-même continue de l’espace vectoriel des fonctions bornées sur  $I$  à valeurs réelles dans l’espace vectoriel des fonctions bornées sur  $S_n(I)$  à valeurs dans  $S_n(\mathbf{R})$ , comme on peut le vérifier aisément car il s’agit d’espaces vectoriels normés, ce qui n’est pas le cas des mêmes espaces

de fonctions non nécessairement bornées pour lesquels la démonstration directe de cette continuité dépasse les limites du programme.

### Norme et convexité

Après avoir rappelé le théorème de Courant-Fischer, on en déduit la convexité de  $S_n(I)$  par encadrement des valeurs propres d'un barycentre à coefficients positifs de deux de ses éléments  $S$  et  $T$  par le même barycentre des minima et maxima de leurs spectres via l'encadrement par celles-ci de  ${}^tX SX$  et de  ${}^tX T X$  quand  $X$  décrit l'ensemble  $\Sigma$  des matrices colonnes de norme euclidienne égale à 1. On en déduit que le rayon spectral d'une matrice définit une norme sur  $S_n(\mathbf{R})$ , l'inégalité triangulaire résultant immédiatement de l'application de la preuve de la convexité de  $S_n(I)$  à un isobarycentre de deux matrices avec un facteur 2.

**Q12** - Ces deux égalités, conséquences du théorème de Courant-Fischer, s'établissent aisément en se plaçant dans une base orthonormale de diagonalisation de  $S$ , ce que seule une minorité de candidats ont fait. Nous avons lu plusieurs fois que l'ensemble  $\{{}^tX SX; X \in \Sigma\}$  est identique au spectre de  $S$ , ce qui méconnaît le fait que celui-ci est fini tandis que cet ensemble est généralement un segment d'intérieur non vide. Il suffit de penser à l'ellipsoïde d'inertie d'un solide quelconque : les longueurs des axes de symétrie sont les valeurs propres de la matrice symétrique qui représente le tenseur d'inertie, tandis que l'ensemble précédemment décrit est constitué des longueurs de tous les rayons de l'ellipsoïde. Cette grave erreur de conception a été obtenue au prix de contorsions de calcul, la principale étant la simplification par  $X^t X$ , censé être égal à 1 comme l'est  ${}^tX X$  ! Inutile de préciser que ce genre de propos a valu zéro pour la question aux candidats qui les ont commis. Par contre, nous avons apprécié que certains candidats prennent la peine de justifier l'existence du maximum et du minimum de l'ensemble  $\{{}^tX SX; X \in \Sigma\}$ .

**Q13** - S'il était facile – et a été malheureusement souvent omis – d'établir que le barycentre à coefficients positifs de deux matrices symétriques réelles est encore une matrice symétrique réelle, il l'est moins de vérifier que celle-ci appartient à  $S_n(I)$ . Plusieurs candidats se sont trompés sur la définition de cet ensemble comme cela a déjà été fait à la **Q5** : encore des points perdus, ce qui montre l'importance de bien lire l'énoncé et notamment les définitions qui l'introduisent. Mais surtout, un grand nombre d'entre eux ont affirmé que les valeurs propres d'un barycentre de deux matrices symétriques sont barycentres avec les mêmes poids des valeurs propres de ces matrices : c'eût certes été plus simple si cela avait été vrai, mais comme disait le grand mathématicien japonais Sigeru Mizohata : *Mathematics should be simple, but they couldn't*. Il convenait donc d'utiliser le résultat de la question précédente et de considérer l'ensemble  $\{{}^tX(\lambda S + (1 - \lambda)T)X$ , quand  $X$  décrit  $\Sigma$ , dont les bornes sont dans  $I$  du fait qu'il en est de même pour les ensembles correspondants pour les matrices  $S$  et  $T$ .

La deuxième partie de la question, qui consistait à montrer que le rayon spectral  $\rho$  constitue une norme sur l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles, a été très inégalement réussie. Il fallait d'abord se souvenir de tous les attributs d'une norme, or il en manquait souvent un et quelquefois deux : en premier lieu la positivité, puis l'homogénéité et quelquefois le caractère défini. Montrer que  $\rho(\lambda S) = |\lambda|\rho(S)$  ne pouvait se faire sans d'abord préciser et établir que le spectre de  $\lambda S$  est l'homothétique de rapport  $\lambda$  du spectre de  $S$  ; de surcroît la valeur absolue sur  $\lambda$  a souvent été oubliée. La preuve du caractère défini requérait de rappeler que  $S$  étant symétrique réelle, elle est diagonalisable, et donc elle est nulle si toutes ses valeurs propres sont nulles. Quant à l'inégalité triangulaire, elle n'a pratiquement jamais été oubliée, mais comme dans la preuve de la convexité de  $S_n(I)$ , de nombreux candidats ont affirmé que les valeurs propres de la somme de deux matrices symétriques réelles sont les sommes des valeurs propres de ces matrices. Il suffisait, comme certains l'ont fait, de remarquer que  $\rho(S) = \max\{|{}^tX SX|; X \in \Sigma\}$ , majorer  $|{}^tX(S + T)X|$  par  $|{}^tX SX| + |{}^tX T X|$ , puis prendre les maxima pour  $X$  décrivant  $\Sigma$ . D'autres ont utilisé les maxima et les minima de ces quantités sans valeur absolue, ce qui requérait de considérer plusieurs cas selon les signes de ceux-ci.

### Continuité des fonctions de matrices symétriques

**Q14** - L'immense majorité des candidats n'ont pas compris qu'il n'y a pas de réponse simple et rapide à cette question, et ont écrit à peu de chose près : « L'application  $\psi$  qui à  $S$  associe  $XI_n - S$  est continue et le déterminant est une application continue, donc par composition,  $\chi$  est une application continue ». Certains ont proposé une version plus élaborée, à savoir «  $\chi$  est polynomiale en les coefficients de  $S$  donc elle est continue ». Bien sûr, ces deux raisonnements sont faux : ce n'est pas  $\chi$  qui est un polynôme en les coefficients de  $S$ , mais c'est chacun des coefficients de ce polynôme, ce que certains candidats ont tout de même indiqué. Plus subtilement,  $\psi$  est une application non de  $S_n(\mathbf{R})$  dans lui-même, mais de  $S_n(\mathbf{R})$  dans l'ensemble  $S_n(\mathbf{R})[X]$  des polynômes à coefficients dans  $S_n(\mathbf{R})$  ; ensuite ce n'est pas l'application déterminant de  $S_n(\mathbf{R})$  dans  $\mathbf{R}$  qui intervient, mais l'application  $\xi$  de  $S_n(\mathbf{R})[X]$  dans  $\mathbf{R}[X]$  qui résulte de l'application déterminant. Quelques rares candidats ont signalé que  $\chi$  est une application à valeurs dans l'espace vectoriel des polynômes, plus rares encore sont ceux qui ont précisé qu'il s'agit d'un espace vectoriel normé et ont fourni une norme sur cet espace avant de donner un raisonnement à peu près convaincant de la continuité de  $\chi$ .

**Q15** - Un certain nombre de candidats ont vu que la suite  $(M_k)$  étant convergente, elle est bornée, et par équivalence des normes en dimension finie, elle est bornée pour la norme  $\rho$  définie par le rayon spectral. De ce fait, la suite  $(\Lambda_k)$  est également bornée, cette fois dans  $\mathbf{R}^n$ , et donc admet une valeur d'adhérence en raison du théorème de Bolzano-Weierstrass, pour lequel il convenait de préciser que comme  $\mathbf{R}^n$  est de dimension finie, ses fermés bornés sont des compacts. Certains candidats ont raisonné composante par composante, ce qui était licite à condition de pratiquer des extractions successives de suites de réels et non simultanées, ces dernières risquant de n'avoir qu'un nombre fini de termes communs. Le mot croissante a donné lieu à confusion, certains candidats croyant qu'il s'agissait des suites  $(\lambda_{i,\alpha(k)})_{k \in \mathbf{N}}$  à la  $i$ -ème position, alors que cela signifiait tout simplement de la croissance de la suite finie valeur d'adhérence de la suite  $(\Lambda_k)$ . La plupart de ceux qui l'ont compris n'ont pas pris la peine de l'établir alors qu'il s'agit d'un raisonnement tout à fait élémentaire de passage à la limite dans les inégalités.

**Q16** - Quelques candidats ont considéré la suite  $(\chi(M_{\alpha(k)}))$ , qui converge par continuité de  $\chi$  vers  $\chi(M)$ , puis la suite  $(Q_{\alpha(k)})$  des polynômes

$$Q_{\alpha(k)}(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_{i,\alpha(k)})$$

qui converge vers un polynôme  $Q$  : par unicité de la limite et croissance de tous les spectres, les limites des suites  $(\lambda_{i,\alpha(k)})_{k \in \mathbf{N}}$  sont les valeurs propres de  $M$ , ce qui assure la convergence de la suite des spectres croissants des matrices  $M_{\alpha(k)}$  vers le spectre croissant de  $M$ . Une poignée de candidats ont procédé par orthodiagonalisation des matrices  $M_k$  sous la forme  $M_k = {}^t\Omega_k D_k \Omega_k$ , en prenant soin de ranger les éléments diagonaux de  $D_k$  par ordre croissant, puis arguant de la compacité de  $O_n(\mathbf{R})$  établie dans le **Q18**, ont extrait de la suite  $(\Omega_k)$  une suite convergente  $(\Omega_{\alpha(k)})$  vers une matrice orthogonale  $\Omega$  ; la convergence de la suite  $(D_{\alpha(k)})$  vers une matrice diagonale  $D$  s'ensuit, et de la relation  $M = {}^t\Omega_k D \Omega_k$  ils ont déduit le fait que la suite des spectres croissants des matrices  $(M_{\alpha(k)})$  converge vers le spectre croissant de  $M$ . Certes, la suite  $(M_{\alpha(k)})$  considérée ici n'est pas celle qui est proposée par l'énoncé, mais ce raisonnement fournissait tout aussi bien les éléments permettant de traiter la question suivante.

**Q17** - Il résulte de la question précédente que pour toute suite convergente  $(M_k)$  de matrices symétriques réelles, la suite de leurs spectres croissants  $(\Lambda_k)$  admet pour unique valeur d'adhérence le spectre croissant  $\Lambda$  de sa limite  $M$ . Un certain nombre de candidats en ont déduit que la suite  $(\Lambda_k)$  converge vers  $\Lambda$ , mais certains ont oublié de préciser que cela résulte également du fait que la suite  $(\Lambda_k)$  est bornée à valeurs dans un espace vectoriel réel de dimension finie. On pouvait en déduire la continuité de  $S_p \uparrow$ , à condition de préciser qu'il s'agit là de la caractérisation séquentielle de la limite.

**Q18** - Cet exercice classique de MP a rarement été complètement réussi par les candidats qui l'ont abordé. En effet, nous avons été surpris du nombre de ceux qui, ayant traité les **Q17** et **Q19**, ont fait l'impasse sur un raisonnement qu'ils ont sûrement vu en cours. Quant aux autres, beaucoup, mais pas tous, ont commencé par préciser que comme l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est de dimension finie, il suffit de vérifier que  $O_n(\mathbf{R})$  est fermé et borné ; de manière regrettable, certains ont parlé de l'espace vectoriel  $O_n(\mathbf{R})$ , d'autres ont affirmé que c'est un compact comme image réciproque d'un compact par une application continue, erreurs de conception qu'une connaissance correcte du cours aurait permis d'éviter.

Le caractère borné a été établi avec des réussites diverses : un certain nombre de candidats ont utilisé la norme de l'énoncé et vérifié que tous les éléments d'une matrice orthogonale sont en valeur absolue inférieurs ou égaux à 1, et d'autres ont montré que la norme de Schur, issue de la structure euclidienne de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , d'une matrice orthogonale, est égale à  $\sqrt{n}$  quand ils n'ont pas oublié la racine carrée dans la définition de cette norme. Par contre, le recours à la norme issue du rayon spectral était proscrit, celle-ci n'étant définie dans l'énoncé que pour les matrices symétriques réelles, certains candidats ayant décrit l'ensemble des valeurs propres d'une matrice orthogonale par la liste  $(-1, -1, \dots, -1, 1, 1, \dots, 1)$ , ce qui laisse songeur sur leur conception de ces matrices.

Quant au fait que  $O_n(\mathbf{R})$  est fermé, il a été établi comme il se doit en montrant que c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue, en l'occurrence l'image réciproque de  $I_n$  par l'application qui à une matrice  $M$  associe  ${}^tMM$ . Toutefois, il convenait de justifier proprement ladite continuité, de manière plus convaincante que par l'expression *par continuité du produit matriciel*, soit en invoquant la bilinéarité en dimension finie soit en disant que les coefficients de  ${}^tMM$  sont fonctions polynomiales des coefficients de  $M$ . Par contre, nous avons été très surpris du nombre de candidats pour lesquels les matrices orthogonales sont celles dont le déterminant est égal à 1 ou à  $-1$ , erreur majeure de conception sur une notion pourtant essentielle du programme.

**Q19** - Passons sur les candidats qui se sont contentés d'une affirmation sommaire du genre «  $u(\varphi)$  est linéaire en dimension finie, donc est continue », ou ont confondu la continuité de  $u(\varphi)$  avec celle de  $u$  – alors que celle-ci a pratiquement été démontrée à la **Q11** – sans prendre en compte l'hypothèse incontournable de continuité de  $\varphi$ . La plupart des candidats qui ont abordé sérieusement cette question ont pensé à démontrer cette continuité par sa caractérisation séquentielle, et ont donc considéré une suite  $(S_k)$  de  $S_n(I)$  convergeant vers une matrice  $S$  de  $S_n(I)$ . Après avoir orthodiagonalisé les matrices  $S_k$  sous la forme  $S_k = {}^t\Omega_k D_k \Omega_k$ , ils ont utilisé la continuité de  $S_p \uparrow$  pour en déduire l'existence d'une limite  $D = \text{Diag}(s_1, \dots, s_n)$  à la suite  $(D_k) = (\text{Diag}(s_{1,k}, \dots, s_{n,k}))$  puis celle de  $\varphi$  pour en déduire la convergence des suites  $(\varphi(s_{i,k}))$  vers  $\varphi(s_i)$ . Cependant, seuls certains d'entre eux ont pensé au fait que les matrices de passages sont a priori différentes pour toutes les matrices  $S_k$ , et ont argué de la compacité de  $O_n(\mathbf{R})$  établie à la question précédente pour extraire de la suite  $(\Omega_k)$  une sous-suite convergente. Cela leur a permis de conclure à l'existence et l'unicité de la valeur d'adhérence de la suite  $(u(\varphi)(S_k))$  et donc à sa convergence.

La continuité de  $v(\varphi)$  se déduisait de celle de  $u(\varphi)$  par composition par la trace qui est continue. Il était également possible de l'établir directement, ce qui était plus simple puisqu'il suffisait de considérer la somme des  $\varphi(s_{i,k})$ , ce qu'aucun candidat n'ayant pas réussi à établir la continuité de  $u(\varphi)$  n'a essayé de faire.

### Convexité des fonctions de matrices symétriques

**Q20** - Il s'agissait de démontrer que les éléments diagonaux de toutes les matrices orthoconjuguées d'une matrice  $S$  de  $S_n(I)$  appartiennent à  $I$ , puis d'obtenir une expression de  $v(f)(S)$  pour une fonction convexe  $f$  comme maximum des sommes des images par  $f$  des éléments diagonaux de ces matrices. Très peu de candidats ont abordé cette question avec quelque succès, l'erreur la plus courante ayant été de considérer que ces matrices orthoconjuguées de  $S$  sont diagonales. Ceux qui ont pensé à calculer ces

éléments diagonaux et l'ont fait correctement les ont certes vus comme des barycentres des éléments diagonaux de  $S$  mais ont parfois omis de préciser que ces barycentres étaient à coefficients positifs.

**Q21** - Un nombre non négligeable de candidats n'ayant pas abordé les questions précédentes ont traité cette question. Il convenait tout d'abord signaler que  $(1 - t)A + tB$  appartient à  $I$ , ce qui légitime le calcul de son image par  $v(f)$ . Ensuite l'expression de  $v(f)$  donnée à la question précédente permettait d'obtenir assez aisément le résultat demandé en utilisant la convexité de  $f$ . Il convenait toutefois de gérer avec soin le passage au maximum sur l'ensemble des matrices orthoconjuguées, idéalement d'abord sur le membre de droite puis sur le membre de gauche.

**Q22** - Le sens réciproque résulte évidemment de la question précédente, tandis que le sens direct pouvait être établi en considérant des matrices scalaires, ce qu'ont fait la plupart des candidats qui ont traité cette question ; certains ont plus subtilement utilisé des matrices dont le seul élément non nul était le premier élément de leur diagonale.

### 1.3.4 Conclusion

À l'issue de la correction des 6681 copies de cette épreuve, nous aimerions donner aux futurs candidats les quelques conseils suivants qui, nous l'espérons, contribueront à une meilleure réussite à cette épreuve et à d'autres. Tout d'abord, on ne répétera jamais assez qu'une bonne connaissance du cours est incontournable, à commencer par les notions fondamentales, comme par exemple la définition d'un produit de matrices, celle d'une matrice orthogonale, le théorème spectral et le théorème de Bolzano-Weierstrass, pour citer des définitions et des résultats utilisés dans le présent sujet. Ensuite, il est important de bien lire l'énoncé, y compris les définitions et notations en préambule du problème, même si elles prennent une page et demie. La manière d'aborder les questions est tout aussi importante. Quand la réponse paraît évidente, il convient de donner un minimum de justifications aux assertions à démontrer, une paraphrase de l'énoncé ne pouvant permettre d'obtenir le moindre point. Quand il s'agit d'appliquer un théorème, il est essentiel d'en vérifier toutes les hypothèses et d'en donner la conclusion exacte, par exemple ne pas se contenter de dire qu'en vertu du théorème spectral, une matrice symétrique est diagonalisable. Quand la question nécessite d'effectuer des calculs, toute tricherie est proscrite, et si le résultat obtenu n'est pas celui demandé, il faut les reprendre pour trouver l'erreur qui a mené à cette anomalie. Si la question paraît absconse, il faut regarder dans les questions précédentes ce qui peut servir à la résoudre : un théorème bien connu dit que neuf fois sur dix, la résolution de la question  $n$  fait appel au résultat établi dans la question  $n - 1$ . En tous les cas, il importe de garder deux principes à l'esprit : les questions deviennent en moyenne plus difficiles à mesure qu'on avance dans le problème, et le correcteur apprécie bien davantage qu'un candidat s'acharne sur les questions successives plutôt que d'essayer de glaner des points un peu partout dans le problème. Un entraînement régulier sur des sujets de concours, sans corrigé puis en étudiant le corrigé, reste la meilleure préparation aux épreuves écrites après avoir acquis une bonne connaissance du cours. Il importe de rédiger avec soin et de ne pas se contenter de lire les corrigés, en effet : *Qui scribit bis legit*<sup>1</sup>. Les années de préparation requièrent de limiter les temps passés aux loisirs, car comme on dit : *Necessitas feris caret*<sup>2</sup>. Mais le succès est au bout, même s'il n'est pas toujours celui qu'on attend, car *Labor omnia vincit improbus*<sup>3</sup>.

---

1. Celui qui écrit, lit deux fois

2. La nécessité n'a pas de jour férié.

3. Un travail opiniâtre vient à bout de tout.