SUITES RÉCURRENTES

SR1. CONTEXTE ET PROBLÉMATIQUE On considère :

- un intervalle I de $\mathbb{R}$;
- une application $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ (l'intervalle I est stable par f).
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée d'un point u_0 de I et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n)\,. \qquad \text{[relation de récurrence]}$$

On se propose d'étudier les variations et le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

SR2. LEMME La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Démonstration

On démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le prédicat :

$$\mathscr{P}(n) \qquad \text{« } u_n \text{ est bien définie et } u_n \in I \text{ ».}$$

est vrai.

- *Initialisation* Le nombre u_0 est donné dans la définition de la suite et appartient à I.
- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n est bien définie et $u_n \in I$. Comme $u_n \in I$ et que l'application f est définie sur I, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. L'intervalle I étant stable par f, on a de plus $u_{n+1} = f(u_n) \in I$.

SR3. NOTATIONS

- Un point fixe de f est un point x de I tel que $f(x) = x$.
- L'ensemble des points fixes de f est noté $\mathrm{Fix}(f)$.

SR4. REMARQUE Si $u_0 \in \mathrm{Fix}(f)$, i.e. si $u_1 = f(u_0) = u_0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Démonstration

On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le prédicat :

$$\mathscr{P}(n) \qquad \text{« } u_n = u_0 \text{ ».}$$

est vrai, en utilisant la propriété $f(u_0) = u_0$.

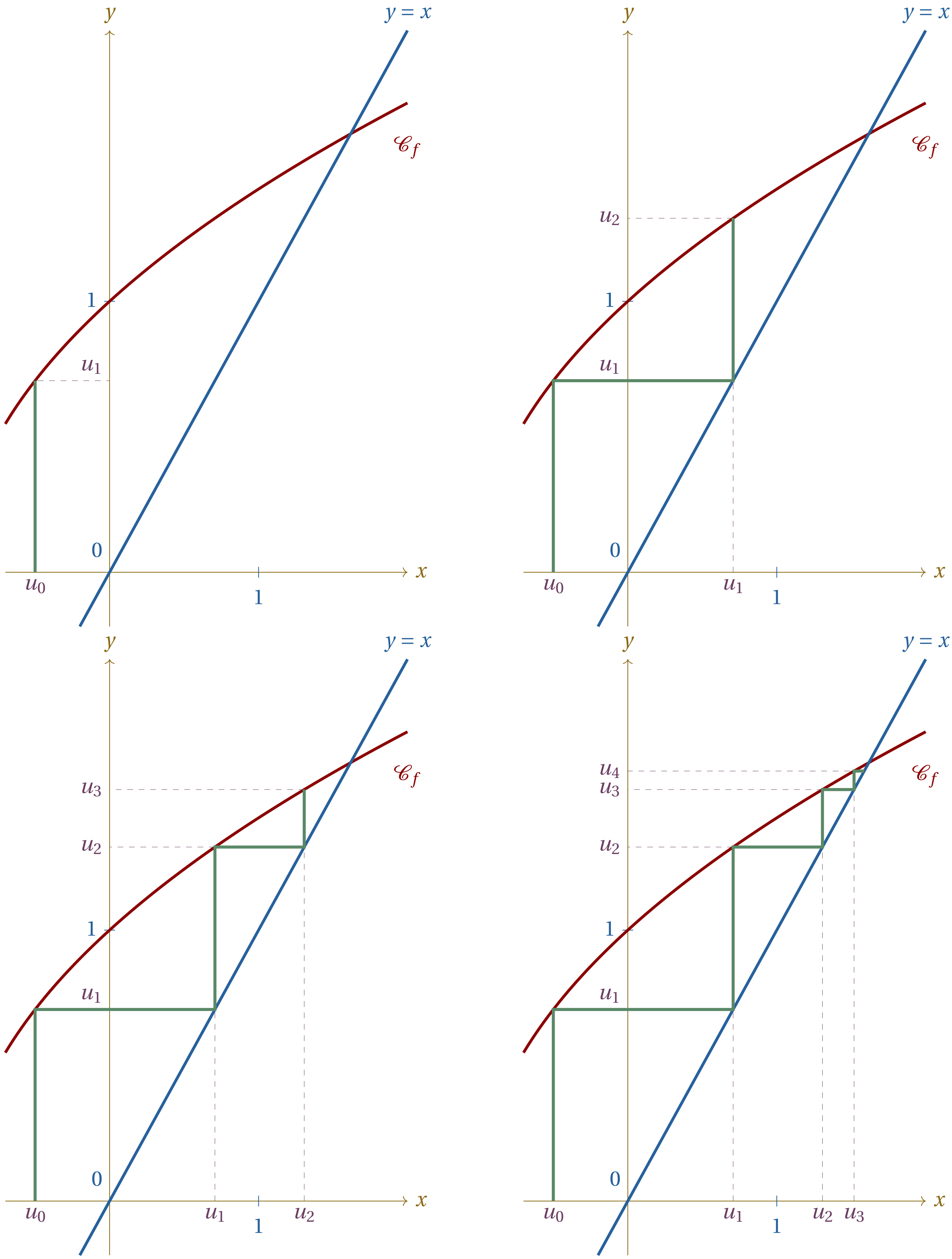
SR5. REMARQUE Le raisonnement par récurrence est un mode de raisonnement naturel pour établir des résultats sur les suites récurrentes.

SR6. PRINCIPE DE REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE SUITE RÉCURRENTE

- On place u_0 sur l'axe des abscisses. On « remonte » jusqu'à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f, afin d'atteindre le point de coordonnées $(u_0, f(u_0)) = (u_0, u_1)$. On place alors u_1 sur l'axe des ordonnées.
- On utilise la première bissectrice (droite d'équation $y = x$) pour placer le point u_1 sur l'axe des abscisses. On « remonte » jusqu'à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f, afin d'atteindre le point de coordonnées $(u_1, f(u_1)) = (u_1, u_2)$. On place alors u_2 sur l'axe des ordonnées.
- On itère le procédé pour construire les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

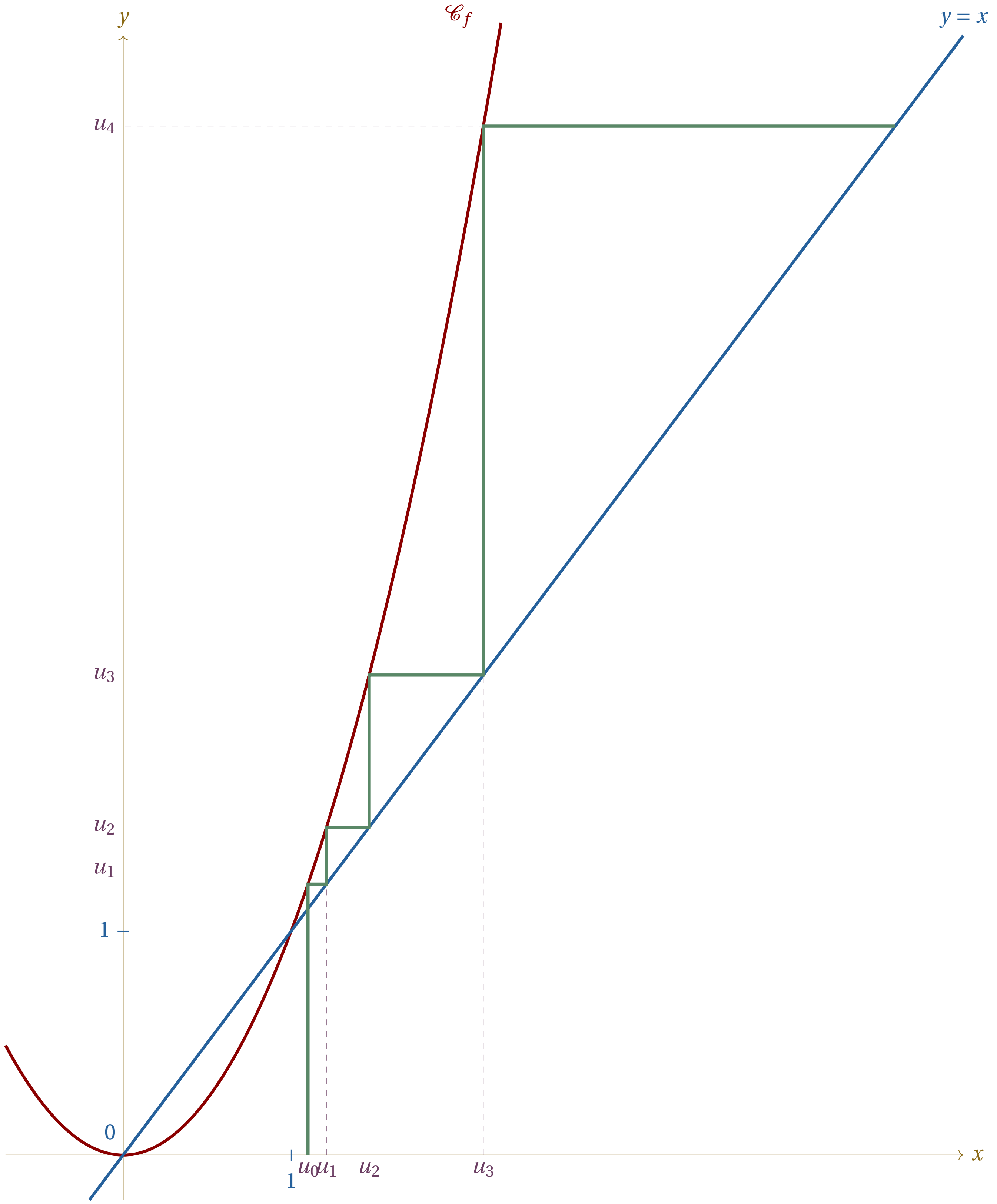
SR7. Premier exemple de représentation graphique d'une suite récurrente

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f : x \longmapsto \sqrt{x+1} \quad , \quad u_0 = -\frac{1}{2}$$



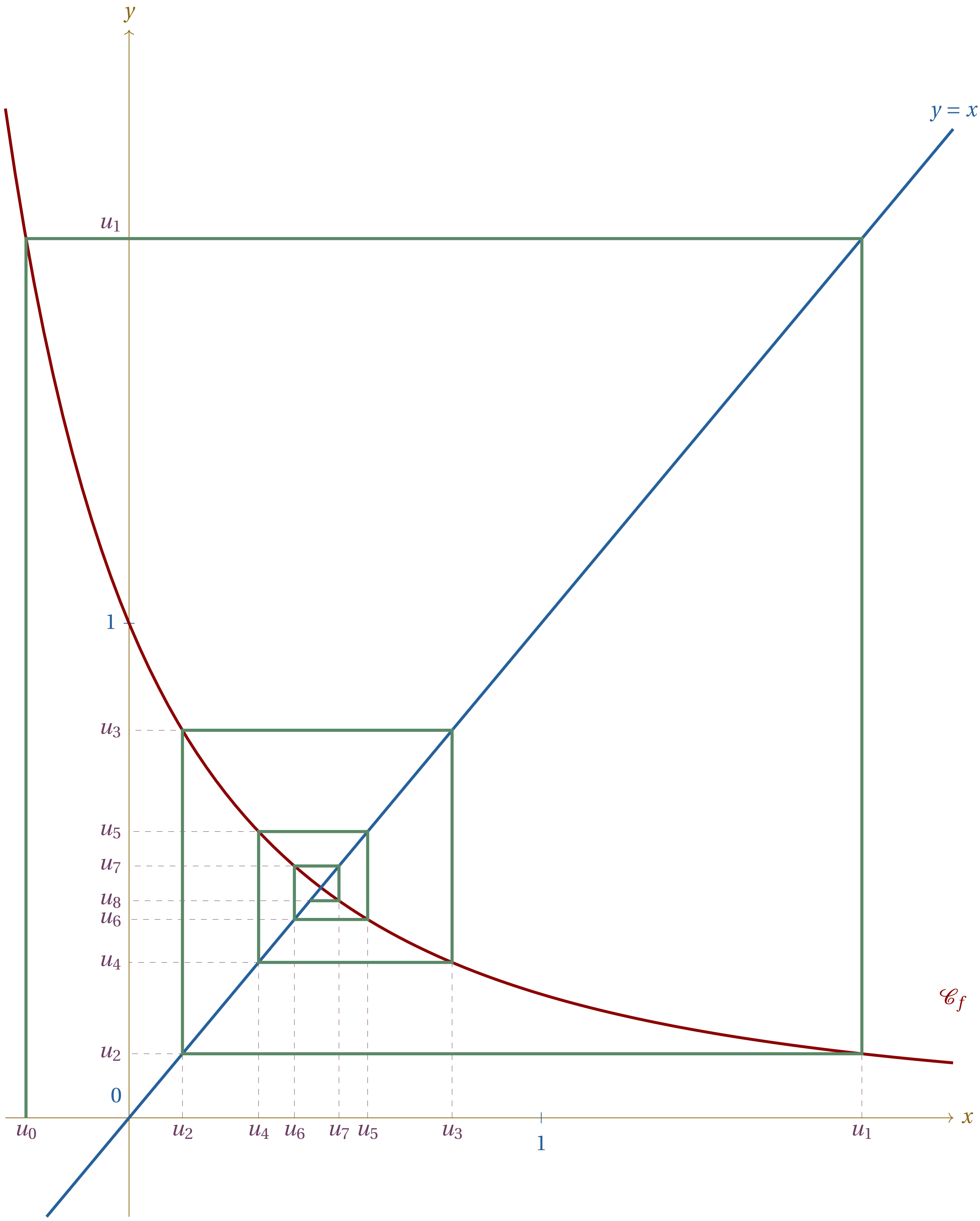
SR8. Deuxième exemple de représentation graphique d'une suite récurrente

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f : x \longmapsto x^2 \quad , \quad u_0 = \frac{11}{10}$$



SR9. Troisième exemple de représentation graphique d'une suite récurrente

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f : x \longmapsto \frac{1}{(x+1)^2} \quad , \quad u_0 = -\frac{1}{4}$$



SR10. Notations

- Les extrémités de I sont notées $a < b$, avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.
- L'ensemble des points de I en lequel f n'est pas continue est noté $\mathrm{Disc}(f)$.

SR11. Candidats pour la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\ell \in \{a, b\} \cup \mathrm{Fix}(f) \cup \mathrm{Disc}(f)$.

SR12. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas nécessairement de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Considérons :

- l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array} \right.$$

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède aucune limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

SR13. Cas où l'application f est croissante sur I

Si la fonction f est croissante sur I alors :

(1) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (croissante si $u_0 \leqslant u_1$ et décroissante sinon);

(2) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$;

(3) $\ell \in \{a, b\} \cup \mathrm{Fix}(f) \cup \mathrm{Disc}(f)$.

SR14. Cas où l'application f est décroissante sur I

Si la fonction f est décroissante sur I alors l'application $f \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie, croissante sur I et vérifie, pour tout $x \in I$, $f \circ f(x) \in I$. Nous observons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n}) \qquad \text{et} \qquad u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})\,.$$

(1) la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et possède une limite $\ell_1 \in \{a, b\} \cup \mathrm{Fix}\left(f \circ f\right) \cup \mathrm{Disc}\left(f \circ f\right)$;

(2) la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et possède une limite $\ell_2 \in \{a, b\} \cup \mathrm{Fix}\left(f \circ f\right) \cup \mathrm{Disc}\left(f \circ f\right)$;

(3) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\ell_1 = \ell_2$.

SR15. Le rôle du le signe de $f(x) - x$, où $x \in I$.

- Nous avons vu que la première bissectrice aide à représenter graphiquement les suites récurrentes.
- Les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de la première bissectrice sont des candidats pour être limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les valeurs d'annulation de la fonction :

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array} \right.$$

  ont donc un intérêt.
- Si J est un sous-intervalle de I tel que :
  - J est stable par f (pour tout $x \in J$, $f(x) \in J$);
  - $u_0 \in J$;
  - pour tout $x \in J$, $\Delta(x) = f(x) - x \geqslant 0$

  alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et donc possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- Si J est un sous-intervalle de I tel que :

— J est stable par f (pour tout $x \in J$, $f(x) \in J$) ;
— $u_0 \in J$;
— pour tout $x \in J$, $\Delta(x) = f(x) - x \leqslant 0$

alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et donc possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

- D'après les deux derniers points :

> l'étude du signe de $x \longmapsto f(x) - x$ peut être d'une aide précieuse. .

SR16. Cas où I est un segment et f est contractante, cf. TD11.26

Si :

- $I = [a, b]$, où $a < b$ sont réels ;
- f est contractante, i.e. il existe $k \in [0, 1[$ tel que, pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, $\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k \left|x - y\right|$;

alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers on point fixe c de f et $|u_n - c| = \mathrm{O}(k^n)$.