Léon . N

Colle de la semaine n° 9

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto (x^2+x+1)ch(x)$

f est continue sur $\mathbb{R}$ un intervalle, d'après le TFA,

$$F \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^x (t^2+t+1)ch(t)\,dt \end{array} \right.$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x (t^2+t+1)\,ch(t)\,dt$$

$u : t \mapsto t^2+t+1$ $\qquad$ $v : t \mapsto sh(t)$ $\qquad$ $\mathcal{C}^1$

$u' : t \mapsto 2t+1$ $\qquad$ $v' : t \mapsto ch(t)$

$$F(x) = \Big[sh(t)(t^2+t+1)\Big]_0^x - \int_0^x (2t+1)sh(t)\,dt$$

$u : t \mapsto 2t+1$ $\qquad$ $v : t \mapsto ch(t)$ $\qquad$ $\mathcal{C}^1$

$u' : t \mapsto 2$ $\qquad$ $v' : t \mapsto sh(t)$

$$F(x) = sh(x)(x^2+x+1) - \Big[(2t+1)ch(t)\Big]_0^x + \underbrace{\int_0^x 2\,ch(t)\,dt}_{[2\,sh(t)]_0^x}$$

$$F(x) = sh(x^2+x+1) - (2x+1)ch(x) + 1 + 2sh(1)$$

$$\boxed{\text{Une primitive de } f \text{ est } x \mapsto sh(x)(x^2+x+3) - (2x+1)ch(x)}$$

Lours Guillaume S.

Colle de la semaine 9

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $y' - y = x^k \exp(x)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Solution : Soit (E) $\underbrace{y' - y}_{a(x)} = \underbrace{x^k e^x}_{b(x)}$, $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$

- Nous remarquons que c'est une EDL1
- a est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ alors nous pouvons pose $A \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{array} \right.$ une primitive de a sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de structure sur l'ensemble solution d'une EDLH1, on pose

$$\mathcal{S}_{(EH),\mathbb{R}} = \mathrm{Vect}\left(y_H \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array} \right. \right)$$

Trouvons désormais une solution particulière grâce à la méthode de variation de la constante. On cherche y_p sol de (E) sous la forme $y_p = h y_H$ où $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$

$$y_p \text{ sol de } (E) \iff \forall x \in \mathbb{R} \quad \underbrace{h'(x) y_H(x)}_{=0} + \underbrace{h(x) y_H'(x) - a(x) y_H(x) h(x)}_{=0} = b(x)$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = x^k e^x \times e^{-x} = x^k \quad \text{(prop. exponentielle)}$$

Ainsi on pose $H \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^{k+1}}{k+1} \end{array} \right.$ une primitive de h sur $\mathbb{R}$ où $k \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow y_p = e^x \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Finalement :

$$\mathcal{S}_{(E),\mathbb{R}} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^{k+1}}{k+1} e^x + \lambda e^x \end{array} \right. : (k; \lambda) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \right\}$$

Semaine 9

Ahmed Amine

Énoncé :

Résoudre (E) : $y' + \tan(x)\, y = 1$, $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[= I$.

Solution :

On reconnaît une EDL1

(EH) : $y' + \tan(x)\, y = 0$, I

$x \in I$, donc $\cos(x) > 0$

soit $a(x) = \tan(x)$ et $A : x \longmapsto -\ln(\cos(x))$ est une primitive de a sur I.

Alors : $Sol_{(EH),I} = Vect\left(y_H \middle| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \to e^{\ln(\cos(x))} \end{array} \right) = \left\{ \middle| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \to k\underbrace{e^{\ln(\cos(x))}}_{\cos(x)} \end{array} : k \in \mathbb{R} \right\}$

Cherchons une solution particulière y_p tq $y_p = k y_H$.

Méthode de la variation de la constante.

y_p sol de (E)

$\Leftrightarrow \forall x \in I \quad k'(x)\, y_H(x) + y_H'(x)\, k(x) + k(x)\, a(x)\, y_H(x) = b(x)$

$\Leftrightarrow \quad k'(x)\, y_H(x) + k(x) \underbrace{\left(y_H'(x) + a(x)\, y_H(x) \right)}_{=0 \text{ car } y_H \text{ sol de } (EH)} = b(x)$

$\Leftrightarrow \quad k'(x) = \dfrac{b(x)}{\underbrace{y_H(x)}_{\neq 0 \text{ car } \exp > 0}}$

$k'(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

- $0 \in I$
- $\dfrac{1}{\cos(x)}$ continue sur I

} D'après le TFA : $\int_0^x \dfrac{1}{\cos(t)}\, dt$ est la primitive de $\dfrac{1}{\cos(t)}$ qui s'annule en 0.

Or : $I = \int_0^x \dfrac{1}{\cos(t)}\, dt = \int_0^x \dfrac{\cos(t)}{\cos^2(t)}\, dt = \int_0^x \dfrac{\cos(t)}{1 - \sin^2(t)}\, dt$

Posons $u = \sin(t)$
donc $du = \cos(t)\, dt$

donc $I = \int_0^x \dfrac{1}{1-u^2}\, du = -\int_0^x \dfrac{1}{u^2 - 1}\, du = -\int_0^x \dfrac{1}{(u-1)(u+1)}\, du$

Or $\dfrac{1}{(u-1)(u+1)} = \dfrac{1}{2(u-1)} + \dfrac{-1}{2(u+1)}$. donc $I = -\int_0^x \dfrac{1}{2(u-1)} - \dfrac{1}{2(u+1)}\, du$

$= -\dfrac{1}{2} \int_0^x \dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}\, du$.

Donc $I = -\dfrac{1}{2} \left(\left[\ln(|u-1|) - \ln(|u+1|) \right]_0^x \right) = -\dfrac{1}{2} \left(\ln\left(\left| \dfrac{\sin(x) - 1}{\sin(x) + 1} \right| \right) \right)$

Donc $k : x \longrightarrow -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin(x)-1}{\sin(x)+1} \right|$

Alors $\mathcal{S}ol_{(E),I} = \left\{ \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \to -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin(x)-1}{\sin(x)+1} \right| + k\cos(x) \end{array} \right. : k \in \mathbb{R} \right\}$

$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin(x)-1}{\sin(x)+1} \right| + \mathrm{Vect}\left(y_H \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \to \cos(x) \end{array} \right. \right)$

Mehdi B. Colle de la semaine 9

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Déterminer une primitive de :}\\ f : x \mapsto (x+2)\,\mathrm{sh}(x)\end{array}}$$

<u>Solution</u> : · f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$

· D'après le TFA :

$$I = \int_0^x (t+2)\,\mathrm{sh}(t)\,dt$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$u : t \mapsto t+2$ $\qquad$ $v : t \mapsto \mathrm{ch}(t)$ $\qquad$ $\mathcal{C}^1$

$u' : t \mapsto 1$ $\qquad$ $v' : t \mapsto \mathrm{sh}(t)$

$$I = \left[(t+2)\mathrm{ch}(t)\right]_0^x - \int_0^x \mathrm{ch}(t)\,dt$$

$$= (x+2)\mathrm{ch}(x) - 2\mathrm{ch}(2) - \left[\mathrm{sh}(t)\right]_0^x$$

$$= (x+2)\mathrm{ch}(x) - 2\mathrm{ch}(2) - \mathrm{sh}(x)$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

$$\boxed{F : x \mapsto (x+2)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}$$

MARGIALOMINI
Amélian

Colle semaine 7

Résoudre l'équa diff (E)	$y'' - y = e^{2x} - e^{x}$, $\mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$.

On a : (E_H) $y'' - y = 0$, $\mathbb{R}$

et (E_{car}) soit $r \in \mathbb{C}$ $r^2 - 1 = 0$
ie $(r-1)(r+1) = 0$

donc $r = 1$ ou $r = -1$ ($\mathbb{C}$ intègre)

Les solutions de (E_H) sont ;

$$\mathcal{S}_{(EH),\mathbb{R}} \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

On cherche maintenant une solution particulière de ;

1) (E_{P1}) $y'' - y = e^{2x}$, $\mathbb{R}$ comme 2 n'est pas racine de (E_{car}) on a une solution sous la forme $a e^{2x}$, $a \in \mathbb{R}$.

$\iff 4 a e^{2x} - a e^{2x} = e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$

donc il suffit que $a = \frac{1}{3}$. Une solution particulière est $x \mapsto \frac{1}{3} e^{2x}$.

2) (E_{P2}) $y'' - y = -e^{x}$ comme 1 est une des deux racines alors on a une solution particulière sous la

Donc ; $a x e^{-x}$, $a \in \mathbb{R}$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$ λe^{-x} est solution de l'homogène)

$\Leftrightarrow \left(a(x+2) - ax\right) e^{x} = -e^{x}$

Donc Il suffit que $a = -\frac{1}{2}$.

Une solution particulière est donc ;

$$y_{p(E_{p2}),\mathbb{R}} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1}{2} x e^{-x} \end{array} \right.$$

On conclut que l'ensemble des solutions sont ;

(Principe de superposition)

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\lambda - \frac{x}{2}\right) e^{x} + \mu e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x} \end{array} \right. , (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Alexandre M. Exercice de colle 9

$$\boxed{\text{Résoudre l'équation } (E)\ xy' + (x-1)y = x^2 \text{ sur }]0;+\infty[}$$

Soit $x \in]0;+\infty[$, $y \in \mathcal{C}^1(]0;+\infty[, \mathbb{R})$

$$x\,y'(x) + (x-1)y(x) = x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(x) + \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{a(x)} y(x) = x \qquad [x \neq 0]$$

- Il s'agit d'une EDL1
- On résout (E_H). Soit $a \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \end{array} \right.$

une fonction continue sur $]0;+\infty[$.

La fonction $A \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \ln(x) \end{array} \right.$ est

une primitive de a sur $]0;+\infty[$

Par théorème sur les solutions d'une EDLH1,

$$Sol_{(E_H),]0;+\infty[} = Vect\left(y_H \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \underbrace{e^{\ln(x)}}_{= x \text{ car } x \in]0;+\infty[} - x = \frac{x}{e^x} \end{array} \right. \right)$$

- On cherche y_p une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ solution de (E).

On remarque que $y_p \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array} \right.$ est

solution de (E) car pour tout $x \in]0;+\infty[$

$$y_p'(x) + \frac{x-1}{x} y(x) = 1 + x - 1 = x.$$

D'après le principe de superposition pour les EDL1 :

$$Sol_{(E),]0;+\infty[} = y_p + Vect(y_H) = \left\{ \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + k\frac{x}{e^x} \end{array} \right. : k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{\text{Trouver la primitive qui s'annule en } 0 \text{ de } \frac{e^{\frac{x}{2}}\,ch\left(\frac{x}{2}\right)}{ch(x)}}$$

Solution :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{e^{\frac{x}{2}}\,ch\left(\frac{x}{2}\right)}{ch(x)} = \frac{e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{e^{x}+1}{2}}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$$

$$= \frac{e^{x}+1}{e^{x}+e^{-x}}$$

On pose $f : x \longmapsto \dfrac{e^{x}+1}{e^{x}+e^{-x}}$ qui s'annule en 0

D'après le théorème fondamental de l'analyse (TFA) :

$$F \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^{t}+1}{e^{t}+e^{-t}}\,dt \end{array} \right.$$

est une primitive de f

On peut faire le changement de variable suivant :

$$e^t = u$$

- $t = 0 \longrightarrow u = 1$
- $t = x \longrightarrow u = e^x$
- $t = \ln(u)$
- $dt = \frac{1}{u} du$

Alors,

$$\int_0^x \frac{e^t + 1}{e^t + e^{-t}} dt = \int_1^{e^x} \frac{u+1}{u + \frac{1}{u}} \times \frac{1}{u} du$$

$$= \int_1^{e^x} \frac{u+1}{u^2+1} du$$

$$= \int_1^{e^x} \frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1} du$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln(u^2+1)\right]_1^{e^x} + \left[\operatorname{Arctan}(u)\right]_1^{e^x}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) - \frac{1}{2} \ln(2) + \operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{4}$$

Pierre V. Colle de la semaine 9

Resoudre $(x^2+1)y'-y=1$

Solution

(E) $(x^2+1)y'-y=1$, $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow$ $y' \underbrace{-\frac{1}{(x^2+1)}}_{a(x)} y = \frac{1}{(x^2+1)}$

Son equation homogène est

(EH) $y' - \frac{1}{(x^2+1)} y = 0$, $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

- $\mathcal{C}^1$ est une EDL 1
- $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et une primitive de a est $A : x \mapsto -\arctan(x)$

Donc $\mathcal{S}ol_{(EH),\mathbb{R}} = \mathrm{Vect}\left(e^{\arctan(x)}\right)$

Une solution particulière de (E) est $y_p : x \mapsto -1$

Donc $\mathcal{S}ol_{(E),\mathbb{R}} = y_p + \mathrm{Vect}\left(e^{\arctan(x)}\right)$

Stanislas G

Semaine de colle n°9

EXERCICE 6 — Déterminer l'unique primitive de la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{t\sqrt{\ln(t)}} \end{array} \right.$$

qui s'annule en 2.

Solution :

· f est $\mathcal{C}^0$ sur $]1, +\infty[$

Par le théorème fondamental de l'analyse :

$$F \left| \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_2^x \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\,dt \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en 2

$I = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\,dt$ on fait un changement de variable

$u = \ln(t)$

$du = \dfrac{1}{t}\,dt$

$$I = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \left[2\sqrt{u}\right]_{\ln(2)}^{\ln(x)} = 2\sqrt{\ln(x)} - 2\sqrt{\ln(2)}$$

donc $\boxed{F \left| \begin{array}{l}]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2\sqrt{\ln(x)} - 2\sqrt{\ln(2)} \end{array} \right.}$

est l'unique primitive f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2

Mathéo.N.

Semaine de colle n° 9

Exercice 9. *Calculer l'intégrale suivante :*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} t\sin(3t)\,dt \quad .$$

On procède par intégration par partie : soient : $(u,v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$u : t \longrightarrow t \qquad v : t \longrightarrow -\frac{1}{3}\cos(3t)$

d'où : $I = \left[t \times \left(-\frac{1}{3}\right)\cos(3t)\right]_0^{\pi/3} + \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3}\cos(3t)\,dt$

$= -\frac{\pi}{9}\cos(\pi) + \left[\frac{1}{9}\sin(3t)\right]_0^{\pi/3}$

$= \frac{\pi}{9} + \frac{1}{9}\sin(\pi) - \frac{1}{9}\sin(0)$

$\boxed{I = \frac{\pi}{9}}$

Exercice 10. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :*

$$(1+x^2)\,y' + 2xy = 1$$

(E) $(1+x^2)\,y' + 2x\,y = 1$, $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow$ $[1+x^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}]$ $y' + \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{a(x)}\,y = \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{b(x)}$

(EH) $y' + \frac{2x}{1+x^2}\,y = 0$

- C'est une EDL 1
- a est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $A \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(\underbrace{1+x^2}_{>0}) \end{array} \right.$

est une primitive de a sur $\mathbb{R}$ par le TFA.

Donc : $\mathcal{S}ol_{(EH),I} = \mathrm{Vect}\left(\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \underbrace{e^{-\ln(1+x^2)}}_{= \frac{1}{1+x^2}} \end{array} \right. \right)$

Par variation de la constante :

On cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_p = k\, y_H$ où $k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

y_p solution de (E)

$\Leftrightarrow \forall x \in I \quad k'(x)\, y_H(x) + \boxed{k(x)\, y_H'(x) + a(x)\, k(x)\, y_H(x)} = b(x)$

$= 0$ car y_H solution de (EH)

$\Leftrightarrow \forall x \in I \quad k'(x) \times \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in I \quad k'(x) = 1$

$[y_H \neq 0]$

Il suffit alors de choisir, $k : x \longmapsto x$

d'où : $y_p : x \longmapsto \frac{x}{1+x^2}$

et $\boxed{\mathcal{S}ol_{(E),I} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x+\lambda}{1+x^2} \end{array} \right. : \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$

Maximilien T. Colle de la Semaine 6

EXERCICE 24 — Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $f(0) = -4$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)\, f(-x) = 1 .$$

Pour débuter, on pourra considérer une fonction f solution du problème énoncé et la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)\, f(-x) . \end{array} \right.$$

Solution :

Nous raisonnons par Analyse - Synthèse

<u>Analyse</u> : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = -4$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) f(-x) = 1$

Considérons $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) f(-x) \end{array} \right.$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = \underbrace{f'(x) f(-x)}_{1} - f(x) f'(-x)$

Nous avons $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) f(-x) = 1$ en particulier pour $-x$

Ainsi $f'(-x) f(x) = 1$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = 0$

$\exists k \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = k$

$g(0) = f(0) f(0) = 16$ Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) f(-x) = 16$

Par intégrité de $\mathbb{R}$ nous savons $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \neq 0$

donc $f(-x) = \dfrac{16}{f(x)}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Nous avons donc $f'(x) \times \frac{16}{f(x)} = 1$

et donc $f'(x) \underbrace{\left(-\frac{1}{16}\right)}_{a(x)} f(x) = 0$ (EH), $\mathbb{R}$

C'est une ED LH1

$A \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{-1}{16} x \end{array} \right.$ est une primitive de a

$Sol_{(EH),\mathbb{R}} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto k e^{\frac{1}{16}x} \end{array} \right. : k \in \mathbb{R} \right\}$ est notre ensemble candidat.

<u>Synthèse</u> Soit $y \in Sol_{(EH),\mathbb{R}}$

$\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = k e^{\frac{1}{16}x}$

y est dérivable. Soit $x \in \mathbb{R}$

$y'(x)\, y(-x) = \frac{k}{16} e^{\frac{1}{16}x} \times k e^{-\frac{1}{16}x} = \frac{k^2}{16}$ Ainsi pour que y soit solution $k = 4$ ou $k = -4$

$y(0) = k e^0 = k$ Ainsi $k = -4$ est forcé.

Nous avons donc $\boxed{f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -4 e^{\frac{1}{16}x} \end{array} \right.}$ comme seule solution

du problème

Leçon 5 Énoncé Colle de la semaine

$\boxed{\text{Résoudre } (E) \ xy' + (x-1)y = x^2 \text{ sur } \mathbb{R}}$

Solution

Soit I un intervalle où x ne s'annule pas

$(E) \Leftrightarrow y' + \frac{x-1}{x} y = x$ sur I.

On reconnaît une EDL 1.

$a : x \to \frac{x-1}{x}$ est continue sur I.

$A : x \to x - \ln(|x|)$ est une primitive de a sur I

$$Sol_{(EH)_I} = \left\{ \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \to \lambda e^{\ln(|x|) - x} = \lambda \frac{|x|}{e^x} \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$x \to x$ est solution particulière

$$Sol_{(E)_I} = \left\{ \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{\lambda |x|}{e^x} + x \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

analyse

Soit y solution de E sur $\mathbb{R}$

$$y \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \begin{cases} \frac{\lambda_1 x}{e^x} + x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\lambda_2 x}{e^x} + x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}$$

$y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

donc y est dérivable en 0

$$\frac{y(x)-y(0)}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} a_1+1$$

$$\frac{y(x)-y(0)}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} a_2+1$$

donc $a_1 = a_2$

donc $y = \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x \to \dfrac{a_1 x}{e^x} + x \end{array}\right.$

Nous avons un unique candidat à une constante a_1 près.

<u>Synthèse</u>

$y = \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x \to \dfrac{a_1 x}{e^x} + x \end{array}\right.$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad y'(x) = -a_1 x e^{-x} + a_1 e^{-x} + 1 = e^{-x} a_1(1-x)+1$

$\forall x\in\mathbb{R}$: $\cancel{x y'(x) + (x-1)y = \frac{a_1 - e^{-x}}{e^{2x}}x + x + (x-1)\left(\frac{a_1 x}{e^x}+x\right)}$

$x y'(x) + (x-1)y = x e^{-x} a_1(1-x) + x + x(x-1)e^{-x}a_1 + x(x-1)$
$= x^2$

$y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc :

$\mathrm{Sol}_{(E)_{\mathbb{R}}} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x \to a x e^{-x} + x \end{array}\right. \quad a\in\mathbb{R} \right\}$

Eliott SV. SEMAINE 9

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin^2(\theta) = \dfrac{\tan(\theta)^2}{1+\tan^2(\theta)}$
2. A l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$, calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2(t)\cos^2(t)}\mathrm{d}t$.

Solution :

1) Soit $\theta \in]0 ; \pi/2[$.

$$\frac{\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \frac{\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}{1+\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}} = \frac{\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}{\frac{\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = \frac{\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}{\frac{1}{\cos^2(\theta)}} = \sin^2(\theta).$$

Pythagore.

2) Calculons :

$u = \tan(t)$

$t = \pi/6$, $u = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$t = \pi/3$, $u = \sqrt{3}$

$du = \frac{1}{\cos^2(t)}dt$.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\sin^2(t)\cos^2(t)}dt = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1+\tan^2(t)}{\tan^2(t)} \times \frac{1}{\cos^2(t)}dt$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1+u^2}{u^2}du = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2}du + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} 1\,du$$

Linéarité.

$$= \left[-\frac{1}{u}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} + \left[u\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Nicolas H

Colle de la semaine 9

Énoncé

A l'aide du changement de variable $u = x^3$,

calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x^3+1)}\,dx$

Solution

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^3+1)}\,dx$$

changement de variable

$u = x^3 \qquad du = 3x^2\,dx \rightarrow \dfrac{du}{3u^{2/3}} = dx$

$x=1 \rightarrow u=1 \mid x=2 \rightarrow u=8 \mid$

$$= \int_1^8 \frac{1}{u^{1/3}(u+1)} \times \frac{1}{3u^{2/3}}\,du$$

$$= \int_1^8 \frac{1}{3}\,\frac{1}{u(u+1)}\,du$$

$u(u+1) = 0 \iff u = 0$ ou $u = -1$. donc, par primitivation de l'inverse d'un trinome du second degré

$$= \frac{1}{3}\left[-\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right]_1^8$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{9}{8}\right) + \frac{1}{3}\ln(2) \underset{\text{propriété ln}}{=} \frac{1}{3}\left(\ln(2) - \ln\left(\frac{9}{8}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{16}{9}\right)\right) = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Antoine B. colle de la semaine 9

Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : y' + \ln(x)\, y = x^{-x}$$

d'inconnue une fonction $y \in \mathcal{C}^1(]0;+\infty[, \mathbb{R})$

$I =]0;+\infty[$ intervalle de $\mathbb{R}$.

$(EH) : y' + \ln(x)\, y = 0$, I c'est une EDLH1.

soit $a : x \mapsto \ln(x)$ est $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

$A : x \mapsto \ln(x)x - x$ est une primitive de a sur I.

$$Sol_{(EH),I} = \mathrm{Vect}\left(y_H \middle| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \times \frac{1}{x^x} \end{array} \right)$$

$b : x \mapsto x^{-x}$

. On cherche une solution particulière y_P de (E) de la forme :

$$y_P = k\, y_H \quad \text{où} \quad k \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$$

y_P solution de (E) $\iff \forall x \in I \quad k'(x)\, y_H(x) + k(x)\, y_H'(x) + y_H(x)\, k(x)\, a(x) = b(x)$

$\iff \forall x \in I \quad k'(x)\, y_H(x) = b(x)$ (car y_H est sol de (EH))

$\iff \forall x \in I \quad k'(x) = \dfrac{b(x)}{y_H(x)}$ $\neq 0$

$\iff \forall x \in I \quad k'(x) = \dfrac{1}{e^x}$

$\iff \forall x \in I \quad \underline{\underline{k(x) = -e^{-x}}}$

$$Sol_{(E),I} = \left\{ \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto k_1 \dfrac{e^x}{x^x} - \dfrac{1}{x^x} \end{array} \right. : k_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Tibouan
D

Rapport de colle (semaine 9)

Calculer $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx = \int_0^{\pi/4} (-1) \frac{(-\sin(x))}{\cos^2(x)} dx$$

On reconnait la forme $\frac{-u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto \cos(x)$

donc $= \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]_0^{\pi/4}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$

$= \sqrt{2} - 1$

$$\boxed{\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx = \sqrt{2} - 1}$$

Paul C. Colle de la semaine 9

$$\boxed{\text{déterminer une primitive de } f : x \mapsto x^2 e^{\frac{x}{2}}}$$

Solution :

f est continue sur $\mathbb{R}$.

le théorème fondamental de l'analyse livre que

$$F \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto I_x = \int_0^x t^2 e^{t/2} \, dt \end{array} \right.$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

On procède à deux intégrations par parties successives avec les fonctions suivantes :

$$\text{1ère IPP} \left\{ \begin{array}{l} u : t \mapsto t^2 \\ u' : t \mapsto 2t \\ u'' : t \mapsto 2 \end{array} \right\} 2^\circ \text{ IPP} \quad \text{1ère IPP} \left\{ \begin{array}{l} v : t \mapsto 4e^{t/2} \\ v' : t \mapsto 2e^{t/2} \\ v'' : t \mapsto e^{t/2} \end{array} \right\} 2^\circ \text{ IPP} \quad \begin{array}{l} \} \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ \} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \end{array}$$

$$I_x = \left[t^2 \times 2e^{t/2} \right]_0^x - \int_0^x 2t \times 2e^{t/2} \, dt \qquad (\text{IPP})$$

$$I_x = x^2 \times 2e^{x/2} - \left[2t \times 4e^{t/2} \right]_0^x + \int_0^x 2 \times 4 e^{t/2}$$

$$= 2x^2 e^{x/2} - 8x e^{x/2} + \left[8 \times 2 e^{x/2} \right]_0^x$$

$$= e^{x/2} (2x^2 - 8x + 16) - 1$$

On obtiens que $\boxed{F \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x/2}(2x^2 - 8x + 16) - 1 \end{array} \right.}$ est primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Billy. G

Khôlle de la semaine 9.

$$\boxed{\text{Résoudre : } x^2y'' + y = 1 \text{ sur } \mathbb{R}_-^*}$$

<u>Solution :</u> $\Leftrightarrow y'' + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{a(x)} y = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{b(x)}$ $(x \neq 0)$ avec $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

C'est une EDL1. On a l'équation homogène associée : (EH) : $y'' + \frac{1}{x^2} y = 0$

On trouve $A : x \mapsto -\frac{1}{x}$ une primitive de a sur $\mathbb{R}_-^*$

Donc : $Sol_{(EH), \mathbb{R}_-^*} = \mathrm{Vect}\left(y_H \middle| \begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \end{array} \right)$

On trouve une solution particulière évidente : $y_p : x \mapsto 1$

Donc : $Sol_{(E), \mathbb{R}_-^*} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ke^{1/x} + 1 \end{array} \right. ; k \in \mathbb{R} \right\}$

Hugo.D

Semaine de colle n° 9

$$\boxed{\text{Résoudre } (E) : y' + \frac{y}{x} = xe^{x} \text{ , } \mathbb{R}_+^* \text{ d'inconnue } y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})}$$

<u>Solution</u> $(E) : y' + \frac{y}{x} = xe^{x}$, $\mathbb{R}_+^*$ C'est une EDL1

$(EH) : y' + \frac{y}{x} = 0$, $\mathbb{R}_+^*$

$a : x \mapsto \frac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ $b : x \mapsto xe^{x}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$A : x \mapsto \ln(\underset{>0}{x})$ une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi $Sol_{(EH), \mathbb{R}_+^*} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{k}{x} \end{array} : k \in \mathbb{R} \right\}$

Recherchons une solution particulière par la méthode de variation de la constante

y_P de la forme $k y_H$ où $k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$
et $y_H : x \mapsto \frac{1}{x}$

y_P sol de $(E) \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad k'(x) \underbrace{y_H(x)}_{\neq 0} + k(x) \underbrace{(y_H'(x) + a(x) y_H(x))}_{=0 \text{ car } y_H \text{ sol de } (EH)} = b(x)$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad k'(x) = \frac{b(x)}{y_H(x)} = x^2 e^{x}$

k' continue sur $\mathbb{R}_+^*$

D'après le TFA : $K : x \mapsto \int_0^x t^2 e^{t} \, dt$ est une primitive de k'

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$ $K(x) \overset{IPP}{=} \left[t^2 e^{t} \right]_0^x - \int_0^x 2t e^{t} \, dt$ $u : t \mapsto t^2$ $v : t \mapsto e^{t}$
$u' : t \mapsto 2t$ $v' : t \mapsto e^{t}$
u et v $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\overset{IPP}{=} x^2 e^{x} - \left[2t e^{t} \right]_0^x + \int_0^x 2 e^{t} \, dt$

$= e^{x}(x^2 - 2x + 2) - 1$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $y_p(x) = e^x\left(x - 2 + \frac{2}{x}\right)$

On en conclut que $Sol_{(E), \mathbb{R}_+^*} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^x\left(x - 2 + \frac{2}{x}\right) + \frac{k}{x} \end{array} : k \in \mathbb{R} \right\}$

ROBERT J. Colle de la semaine 9

Exercice : Calculer l'intégrale suivante en effectuant le changement de variable $t = \cos(u)$:

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$$

Solution :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$$

changement de variables : $t = \cos(u)$
donc $\arccos(t) = u$

$t = 1 \longmapsto u = 0$
$t = 0 \longmapsto u = \frac{\pi}{2}$

$dt = -\sin(u)\, du$
$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\cos^2(u)}$ par définition
donc $= |\sin(u)|$ Pythagore

Ainsi :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$$

donc $= \int_{\pi/2}^{0} -\sin(u)|\sin(u)|\, du$

donc $= \int_{\pi/2}^{0} -\sin^2(u)\, du$ ($\sin(u) \geq 0$ sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$)

donc $= \int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos(2u) - 1}{2}\, du$ (formule de duplication)

donc $= \left[\frac{1}{4}\sin(2u) - \frac{u}{2}\right]_{\pi/2}^{0} = \frac{\pi}{4}$

Colle de la semaine 9

Martin H.-L.

Exercice 6. Déterminer l'unique primitive de la fonction

$$f \left| \begin{array}{l}]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \dfrac{1}{x\cdot\sqrt{\ln(x)}} \end{array} \right. .$$

qui s'annule en 2.

On cherche une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

On a :

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad f(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt{\ln(x)}} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln(x)}}$$

En posant :

$$\begin{cases} u : x \longrightarrow \ln(x) \\ \text{et} \\ u' : x \longrightarrow \dfrac{1}{x} \end{cases},$$

On reconnaît une composée classique.

On a donc que la fonction F définie par

$$F \left| \begin{array}{l}]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow 2\sqrt{\ln(x)} + c \end{array} \right. , \quad c \in \mathbb{R},$$

est une primitive de f sur $]1, +\infty[$. On a de plus que :

$$F(2) = 2\sqrt{\ln(2)} + c = 0 \iff c = -2\sqrt{\ln(2)}.$$

D'où : $F : x \longrightarrow 2\sqrt{\ln(x)} - 2\sqrt{\ln(2)}$ est l'unique primitive de f qui s'annule en 2.

Oxbridge needs to guarantee places for the best state school pupils

Owen Jones - *The Guardian*, 7 Dec 2018

Oxbridge does not represent Britain's best or the brightest: let's just get that out of the way. Many of the country's most intelligent, thoughtful and perceptive people do not attend either Oxford or Cambridge. Both institutions are instead, disproportionately, attended by the best performing slice of the most economically privileged teenagers in the country. So the figures released today, which elicit a depressing sense of *deja vu*, that eight top schools send as many pupils to Oxbridge as three-quarters of all schools and colleges put together, might be shocking, but they are unsurprising. So are the findings that top performing state school students are much less likely to apply than their private school equivalents, or that private school pupils were seven times more likely to win a place than comprehensive students.

Undoubtedly, one of the key reasons for the disparity is the resources available to private schools to "polish" up their students for the application process. I attended what was then the biggest sixth-form in the country, Stockport's Ridge Danyers: the attitude among teachers towards applying to Oxbridge was very much: "Well, you might as well give it a go!" One did try to prepare me with a mock interview, which involved questions like "Why are you applying to Oxford? What are your extracurricular interests?" Bless them, but it was entirely counterproductive: imagine my shock when I sat down at my actual interview, in what seemed like a slightly sinister Harry Potter theme park, and an emeritus professor kicked off the proceedings with "Lenin was a German spy, wasn't he?"

It was always instantly possible to tell who was privately educated: they had a certain confidence and posture built into them by their schooling. (...) Few of us actually knew much about that place – I confess, I thought "Oxbridge" was its own university, and the Oxbridge colleges on University Challenge were separate from the universities themselves – and arriving for the interviews was a far bigger culture shock than visiting France for the first time. (...)

I was one of a handful from my sixth-form to get in, and – like most of the comprehensive pupils, let alone anyone else who attends – I am no working-class hero: my dad had a white collar job at Sheffield city council, my mum was an IT lecturer at Salford University. Yet even I, from a northern, public sector, middle-class background, initially had a profound, sometimes debilitating sense of imposter syndrome, that there would be a tap on the shoulder at any moment to explain that "I'm sorry there's been a dreadful mistake we let you in by accident" which was not helped by fellow private school alumni making barbed comments like "comprehensive school students only get in because of quotas". That's not to say this was three years of trauma – I had some of my happiest days there – but it's unsurprising that an Old Etonian feels at home dressing up in an absurd costume for exams (you got turned away if you wore the wrong shoes).

There are genuine attempts by Oxbridge authorities to widen access. I think of Alan Rusbridger, former *Guardian* editor turned principal of Lady Margaret Hall, who launched a fantastic scheme to attract young people from less privileged backgrounds. But there are such profound structural problems that are very difficult to overcome. If you grow up in an overcrowded house, suffer the stresses poverty can place on family life, sometimes have gone hungry or had a poor diet, and don't have parents with huge "cultural capital" – like owning lots of books – then the odds are stacked against you from day one.

The educational segregation of children according to the bank balances of their parents – private education – needs to be abolished. But in the interim, it has always struck me that the only solution is to automatically enrol the best performing students from state school, taking class into account. If you grow up in a deprived ex-mining community and get two As and two Bs at A-level, you have outperformed someone at Harrow or Eton from a family of millionaires who gets four As. And until Oxbridge does this, it needs to stop pretending it represents Britain's academic elite: because it doesn't.

Adam M

Colle de la semaine 9

$$(E)\ \boxed{y'(x) - 3y(x) = 2sh(x) \quad \text{d'inc}^{\circ}\ y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Solution :

* C'est une EDL 1

$a : x \longrightarrow -3$ et $b : x \longrightarrow 2sh(x)$

* Une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est $A : x \longrightarrow -3x$

$(EH) : y' - 3y = 0$

$$Sol_{(EH)} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow e^{3x}\lambda \end{array} \right. : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(y_H \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to e^{3x} \end{array} \right. \right)$$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y = k y_H$ où $k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

y solution de (E) :

$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

$$k'(x)y_H(x) + \underbrace{k(x)y_H'(x) + a(x)k(x)y_H(x)}_{=0 \text{ car } y_H \text{ solution de } (EH)} = b(x)$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad k'(x)\underbrace{y_H(x)}_{\neq 0} = b(x)$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad k'(x) = \frac{b(x)}{y_H(x)} = 2sh(x)e^{-3x} = e^{-2x} - e^{-4x}$$

On choisit $k : x \longrightarrow \dfrac{e^{-2x}}{-2} + \dfrac{e^{-4x}}{4}$ qui convient

$$Sol_{(E)} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \lambda e^{3x} + \dfrac{e^{-x}}{4} - \dfrac{e^{x}}{2} \end{array} \right. : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Tigüin, David Colle de la semaine 9

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Résoudre sur }]0,+\infty[\text{ l'équation :}\\ x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1\end{array}}$$

Soit $x \in \underbrace{]0,+\infty[}_{I}$. Donc $\forall x \in I \ 1+\ln^2(x) > 0$ ainsi

$(E) : y' + \underbrace{\frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}}_{a(x)} y = \underbrace{\frac{1}{x(1+\ln^2(x))}}_{b(x)}$ est une EDL1 sur I

$(EH) : y' + \underbrace{\frac{2\ln(x)}{x(1+\ln^2(x))}}_{a(x)} y = 0$ EDL HI sur I

· On remarque que la fonction $x \to \ln(1+\ln^2(x))$ est une primitive de $a(x)$: $\underbrace{\frac{2\ln(x)}{x}}_{u'} \times \underbrace{\frac{1}{1+\ln^2(x)}}_{u}$

Donc $Sol_{(EH),I} = Vect\left(y_H \middle| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{1}{1+\ln^2(x)}\end{array}\right)$

· Soit y_P une solution particulière de (E) sur I tel que $y_P = k\, y_H$ où $k \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$

y_P solution de $(E) \iff \forall x \in I \quad k'(x)y_H(x) + \underbrace{k(x)y_H'(x) + a(x)k(x)y_H(x)}_{=0} = b(x)$

$\iff \forall x \in I, \quad k'(x)y_H(x) = b(x)$

$\iff \forall x \in I, \quad k'(x) = \frac{b(x)}{y_H(x)}$

Il suffit de prendre pour k une primitive de $\frac{b}{y_H}$.

$\frac{b(x)}{y_H(x)} = \frac{1}{x}$ donc une primitive est la fonction $x \to \ln(x)$

$y_P = \frac{\ln(x)}{1+\ln^2(x)}$

Enfin : $Sol_{(E),I} = \frac{\ln(x)}{1+\ln^2(x)} + Vect\left(y_H \middle| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{1}{1+\ln^2(x)}\end{array}\right)$

Rapport de colle semaine 9

Wassim D.

$$\boxed{\text{Calculer } \int_0^4 t^2 e^t \, dt}$$

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

$u : t \longmapsto t^2$ $\qquad$ $v : t \longmapsto e^t$

$u' : t \longmapsto 2t$ $\qquad$ $v' : t \longmapsto e^t$

IPP :

$$\int_0^4 t^2 e^t dt = \left[t^2 e^t \right]_0^4 - \int_0^4 2te^t dt$$

$$= 16e^4 - \int_0^4 2te^t dt$$

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

$f : t \longmapsto 2t$ $\qquad$ $g : t \longmapsto e^t$

$f' : t \longmapsto 2$ $\qquad$ $g' : t \longmapsto e^t$

$$\int_0^4 t^2 e^t dt = 16e^4 - \left(\left[2te^t \right]_0^4 - \int_0^4 2e^t dt \right)$$

$$= 16e^4 - \left(8e^4 - (2e^4 - 2) \right)$$

$$= 10e^4 - 2$$

ELIAN . A

Colle semaine 9

Calcul d'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx = \left[-\ln(\cos(x))\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \ln(\cos(0))$$

$$= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2)$$

Ibrahim K

Colle de la Semaine 9.

Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$

---

on remarque que $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ qui est intervalle alors par le Théorème Fondamental de l'analyse :

$$F \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \displaystyle\int_0^x \frac{e^{2t}}{e^t+1}\,dt \end{array} \right.$$

est la primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$ qui s'annule en 0

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,dt = \int_0^x \frac{e^{2t}-1}{e^t+1} + \frac{1}{e^t+1}\,dt$$

par linéarité de l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^x e^t - 1\,dt + \int_0^x \frac{1}{e^t+1}\,dt$$

$$= \left[e^t - t\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{e^t+1}\,dt$$

$$= e^x - x - 1 + \int_0^x \frac{1}{e^t+1}\,dt$$

on pose $u = e^t$

$du = u\,dt$ donc $\dfrac{du}{u} = dt$

$t = 0 \to u = 1$

$t = x \to u = e^x$

ainsi

$$F(x) = e^x - x - 1 + \int_1^{e^x} \left(\frac{1}{u+1} \cdot \frac{1}{u}\right) du$$

Par linéarité de l'intégrale

$$F(x) = e^x - x - 1 + \int_1^{e^x} \frac{1}{u}\,du - \int_1^{e^x} \frac{1}{u+1}\,du$$

$$= e^x - x - 1 + \left[\ln(u)\right]_1^{e^x} - \left[\ln(u+1)\right]_1^{e^x}$$

$$= e^x - x + 1 + x - \ln(e^x+1) + \ln(2)$$

$$F(x) = e^x - \ln(e^x+1) + \ln(2) - 1.$$

Lina . A

Colle de la semaine 9

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + 2y = \cos(t)e^t$

Solution : Soit

$y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $(E) : y'' - 2y' + 2y = \cos(t)e^t$ une EDLCC2.

$(EH) : y'' - 2y' + 2y = 0$

et $(E_{car}) : \begin{cases} z^2 - 2z + 2 = 0 \\ z \in \mathbb{C} \end{cases}$ l'équation caractéristique de (E)

$$z \text{ sol de } (E_{car}) \iff z^2 - 2z + 2 = 0$$
$$\iff (z-1)^2 \underbrace{+1}_{-i^2} = 0$$
$$\iff (z-1+i)(z-1-i) = 0$$
$$\iff z = 1-i \text{ ou } z = 1+i$$

Donc

$$Sol_{(EH),\mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda_1 e^t \cos(t) + \lambda_2 e^t \sin(t) \end{array} : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$(E) \iff y'' - 2y + 2y = \mathrm{Re}\left(e^{t(1+i)}\right).$$

Déterminons une solution particulière de

$$(E_{comp}) : y'' - 2y + 2y = e^{t(1+i)}$$

Comme $1+i$ est une solution simple de (E_{car}), une solution particulière de (E_{comp}) sera de la forme :

$$y_p : t \longmapsto a t e^{(1+i)t} + \underbrace{\cancel{b e^{(1+i)t}}}_{\to 0 \text{ car sol de } (EH)}$$
$$y_p' : t \mapsto a e^{(1+i)t}(1 + t + it).$$
$$y_p'' : t \mapsto 2a e^{(1+i)t}(1 + i + it).$$

$$y_p \text{ sol de } (E_{comp}) \iff a e^{(1+i)t}(\cancel{2} + 2i + \cancel{2it} - \cancel{2} - \cancel{2it} - 2it + \cancel{2it}) = e^{(1+i)t}$$
$$\iff 2ia e^{(1+i)t} = e^{(1+i)t}$$
$$\underset{e^{(1+i)t} \neq 0}{\iff} a = \frac{-i}{2}$$

Donc $y_p : t \mapsto -\frac{i}{2} t e^{(1+i)t}$ est une solution particulière de (E_{comp}).

Nous pouvons en déduire une solution particulière de (E) :

$$y_{p,(E)} : t \longmapsto \mathrm{Re}\left(\frac{-i}{2} t e^{t} e^{it}\right) = \frac{1}{2} t \sin(t) e^{t}$$

Donc :

$$\mathcal{S}ol_{(E),\mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda_1 e^{t} \cos(t) + \lambda_2 e^{t} \sin(t) + \frac{1}{2} t \sin(t) e^{t} \end{array} \right\}$$

Amaé. D

Rapport de colle n° 9

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad xy' + (x-1)y = x^2$$

d'inconnue une fonction $y \in \mathcal{C}^1(]0;+\infty;\mathbb{R}[)$

Solution : (E) $xy' + (x-1)y = x^2$ $\quad y \in \mathcal{C}^1(]0;+\infty[,\mathbb{R})$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $x \neq 0$ d'où

$$(E) \quad y' + \left(1 - \frac{1}{x}\right)y = x \qquad y \in \mathcal{C}^1(]0;+\infty[,\mathbb{R})$$

C'est une EDL1.

L'équation homogène associée est :

$$(EH) \quad y' + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}_{a(x)} y = 0 \qquad ,]0;+\infty[$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(]0;+\infty[,\mathbb{R})$

a est continue sur $]0;+\infty[$ et $A : x \longmapsto x - \ln(\underbrace{|x|}_{x \text{ car } x \in]0;+\infty[})$ est une primitive de a sur $]0;+\infty[$.

Donc $Sol_{(EH),I} = \left\{ \begin{array}{l|ll}]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} & & k \in \mathbb{R} \\ x \longmapsto ke^{-x+\ln(x)} & = kxe^{-x} & \end{array} \right\}$

On observe que $x \longmapsto x$ est une solution particulière de (E).

Donc $Sol_{(E),I} = \left\{ \begin{array}{l|ll}]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} & & k \in \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + kxe^{-x} & = x(1+ke^{-x}) & \end{array} \right\}$

Piero T. Colle de la semaine 9

Exercice : Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle suivante : $y'' + 3y' + 2y = ch(t)$, $\mathbb{R}$

Solution :

C'est une EDLCC2.

(E_{car}) : $y^2 + 3y + 2 = 0$, $y \in \mathbb{R}$.

Les deux racines sont -2 et -1.

$$Sol_{(E_H), \mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto h_1 e^{-2x} + h_2 e^{-x} \end{array} : (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

(E_1) : $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{2} e^{x}$, $\mathbb{R}$

On cherche une solution de la forme ae^{x} avec $a \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$ae^{x} + 3ae^{x} + 2ae^{x} = \frac{1}{2} e^{x}$

$\iff 6a = \frac{1}{2}$ $\quad (e^{x} \neq 0)$

$\iff a = \frac{1}{12}$

$y_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{12} e^{x} \end{array} \right.$ est donc sol de (E_1).

(E_2) : $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{2} e^{-x}$, $\mathbb{R}$

-1 est solution de (E_{car}) donc on cherche une solution de la forme axe^{-x} avec $a \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{d}{dx}\left(axe^{-x}\right) = ae^{-x} - axe^{-x} = (a - ax)e^{-x}$$

$$\frac{d}{dx}\left((a - ax)e^{-x}\right) = -ae^{-x} - (a - ax)e^{-x} = (-2a + ax)e^{-x}$$

$$(-2a + ax)e^{-x} + 3(a - ax)e^{-x} + 2axe^{-x} = \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow -2a + ax + 3a - 3ax + 2ax = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$y_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}xe^{-x} \end{array} \right.$$ est donc sol de (E_2).

Par superposition $(y_1 + y_2)$ est sol de (E).

$$Sol_{(E),\mathbb{R}} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto k_1e^{-2x} + k_2e^{-x} + \frac{1}{12}e^{x} + \frac{1}{2}xe^{-x} \end{array} \right. : (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Équations différentielles : $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \sin(2x)$.

$(E) : y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \sin(2x)$, $\mathbb{R}$

$\iff y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \left(\dfrac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2}\right)$

On sépare l'étude :

$(E_1) : y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \left(\dfrac{e^{2ix}}{2}\right)$, $\mathbb{C}$

$(E_2) : y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = -\left(\dfrac{e^{-2ix}}{2}\right)$, $\mathbb{C}$

$(EH) : y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$

$(E_{car}) \left| \begin{array}{l} r^2 - 3r + 2 = 0 \\ r \in \mathbb{C} \end{array} \right.$

$(E_{car}) \iff r^2 - 3r + 2 = 0 \iff r = 1$ ou $r = 2$

d'où $Sol_{(EH)} = Vect\left(\left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to e^x \end{array} \right. ; \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to e^{2x} \end{array} \right. \right)$

Pour (E_1) : On cherche une solution particulière sous la forme $x \to A(x)\, e^{2ix}$ avec $A : x \to a \in \mathbb{R}$ car $\lambda \neq r_1$ et $\lambda \neq r_2$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_p : x \to a e^{2ix} \\ y_p' : x \to 2ia\, e^{2ix} \\ y_p'' : x \to -4a e^{2ix} \end{array} \right.$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p''(x) - 3y_p'(x) + 2y_p(x) = \dfrac{e^{2ix}}{2}$

$\iff -4a\cancel{e^{2ix}} - 6ia\cancel{e^{2ix}} + 2a\cancel{e^{2ix}} = \dfrac{\cancel{e^{2ix}}}{2}$

$\iff a(-6i - 2) = \dfrac{1}{2}$

$\iff a = -\dfrac{1}{12i + 4}$

Ainsi on a $y_p : x \to -\dfrac{1}{12i+4} e^{2ix}$ une solution particulière de (E_1)

$Sol_{(E_1),\mathbb{C}} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to -\dfrac{1}{12i+4} e^{2ix} + e^x \lambda_1 + \lambda_2 e^{2x} \end{array} \right. : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \right\}$

De même : $Sol_{(E_2),\mathbb{C}} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{1}{12i-4} e^{-2ix} + e^x \lambda_1 + \lambda_2 e^{2x} \end{array} \right. : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \right\}$

Ainsi $Sol_{(E1)} + Sol_{(E2)} = Sol_{(E)}$

Donc $Sol_{(E),\mathbb{C}} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to 2\lambda_1 e^{x} + 2\lambda_2 e^{2x} - \frac{1}{12i+4} e^{2ix} + \frac{1}{12i-4} e^{-2ix} \end{array} \right. ; (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \right\}$

Uta Bayan
de Neyer
MP2 I

Rapport de colle semaine n° 9

Résoudre l'équation différentielle :

$(E) : y'' + 3y' + 2y = e^x \quad , \quad y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Soit $(E) : y'' + 3y' + 2y = \underbrace{e^x}_{A(x)e^{\lambda x}} \quad , \quad y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- $\mathcal{E}$ est un EDLCC2.
- $(EH) : y'' + 3y' + 2y = 0 \quad , \quad y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

On définie $(E_{car}) : z^2 + 3z + 2 = 0$

$\iff \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\iff (z+1)(z+2) = 0$

Donc -1 et -2 sont solution de (E_{car}).

Donc

$$Sol_{(EH), \mathbb{R}} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{-2x} \end{array} \right. : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme : $y_p = Ke^x$ où $K \in \mathbb{R}$, car λ n'est pas racine de (E_{car}) et A est une fonction polynomiale de degré 0.

Donc $y_p = y_p' = y_p''$ (fonction exponentiel)

y_p solution de (E)

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad Ke^x + 3Ke^x + 2Ke^x = e^x$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 6Ke^x = e^x$

$\underset{e^x > 0}{\iff} \quad K = \frac{1}{6}$

Donc $y_p : x \mapsto \frac{1}{6} e^{x}$.

Donc $Sol_{(E),\mathbb{R}} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{6} e^{x} + \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{-2x} \end{array} \right. : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Lisa N.

Colle de la semaine n° 9

Énoncé

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation :

$$y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y = 1$$

Solution :

$$(E) \quad y' \overbrace{- \left(2x - \frac{1}{x}\right)}^{a(x)} y = \overbrace{1}^{b(x)} \quad , \quad I =]0, +\infty[$$

. C'est une EDL1

$$(E_H) \quad y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y = 0 \quad , \quad I$$

. a est continue sur I.

Un primitive de a sur I est $A : x \longmapsto -(x^2 - \ln(x))$

Donc $Sol_{(E_H), I} = \left\{ \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto K \underbrace{e^{x^2 - \ln(x)}}_{= \frac{e^{x^2}}{x}} \end{array} \right. : K \in \mathbb{R} \right\}$ $\quad (x \in]0, +\infty[)$

$$= \mathrm{Vect}\left(y_H \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{e^{x^2}}{x} \end{array} \right. \right)$$

On cherche une solution particulière de (E) sous forme :

$y_P = K y_H$ où $K \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$

y_P sol de (E)

$$\Longleftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad K'(x) y_H(x) + \underbrace{K(x) y_H'(x) - a(x) K(x) y_H(x)}_{= 0 \text{ car } y_H \in Sol_{(E_H)}} = b(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall x \in I \quad K'(x) \underbrace{y_H(x)}_{\neq 0} = b(x)$$

$\iff \forall x \in I \quad K'(x) = \dfrac{b(x)}{y_H(x)} = \dfrac{x}{e^{x^2}}$

On peut choisir $K : x \longmapsto \dfrac{e^{-x^2}}{-2}$

Donc $y_p : x \longmapsto \dfrac{e^{-x^2}}{-2} \times \dfrac{e^{x^2}}{x} = -\dfrac{1}{2x}$

$$Sol_{(E),I} = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto K \dfrac{e^{x^2}}{x} - \dfrac{1}{2x} \end{array} \;,\; K \in \mathbb{R} \right\}$$

Sophie G.

Colle de la semaine 9

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $f(0) = -4$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) f(-x) = 1$$

Pour débuter, on pourra considérer une fonction f solution du problème énoncé et la fonction

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) f(-x) \end{array} \right.$$

Solution :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = -4$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) f(-x) = 1$ (*)

Soit $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) f(-x) \end{array} \right.$

$g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (car $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = \underbrace{f'(x) f(-x)}_{1} - \underbrace{f'(-x) f(x)}_{1} \quad (*)$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

Par caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle

$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = k$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) f(-x) = k$

Or $f(0) = -4$

$\iff k = 16$

D'où :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) f(-x) = 16$

$\iff f(x) \times \dfrac{1}{f'(x)} = 16$ (*)

$\iff \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{16}$

$\iff \left(f'(x) \underbrace{- \dfrac{1}{16}}_{a(x)} f(x) = 0 \right) (E)$

- (E) est une EDLH1
- $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Une prim de a est

$$A \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{-1}{16} x \end{array} \right. \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Donc

$$Sol_{(E)} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto k e^{\frac{1}{16} x} \end{array} \right. : k \in \mathbb{R} \right\}$$

Or $f(0) = -4$

$\Leftrightarrow k = -4$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -4 e^{\frac{1}{16} x}}$

Robin G. Colle de la semaine 9

$$\boxed{\text{Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle } y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}}$$

Solution :

$$(E) \quad y'' - 4y' + 4y = \underbrace{2e^{2x}}_{A(x)}, \quad y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

- C'est une EDLCC2.

$$(EH) \quad y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

(E_{car}) $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r \in \mathbb{C}$ a pour <u>solution double $r = 2$</u>.

Donc $Sol_{(EH),\mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 x e^{2x} \end{array} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$A : x \mapsto 2$ est de degré 0 et 2 est racine double de (E_{car}), on cherche donc une solution particulière telle que :
$y_p : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

On remarque que $bxe^{2x} + ce^{2x}$ est solution de (EH), donc on peut chercher une sol. particulière $y_p : x \mapsto ax^2 e^{2x}$, $a \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$y_p'(x) = e^{2x}(2ax + 2ax^2)$
$y_p''(x) = e^{2x}(2a + 4ax + 4ax + 4ax^2)$

y_p est solution de (E) donc elle vérifie l'éq° $y_p'' - 4y_p' + 4y_p = 2e^{2x}$.

$$e^{2x}\left(4ax^2+8ax+2a-4\left(2ax+2ax^2\right)+4ax^2\right) = 2e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a\,e^{2x} = 2e^{2x}$$

$$\underset{e^{2x}>0}{\Leftrightarrow} \quad a = 1$$

Donc $\underline{y_p : x \mapsto x^2 e^{2x}}$ est solution de (E).

Enfin :

$$\boxed{Sol_{(E),\mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{2x} + x^2 e^{2x} \end{array} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

2/2

Sofia L. Colle de la semaine 9

Étudiant : .....

Cours : Définition d'une primitive d'une fonction. Calcul d'une primitive de $f : x \mapsto \cos(3x)e^{-2x}$.

Calcul d'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\, \mathrm{d}x$

Équations différentielles : $y'(x) + y(x) = 2\cos(x)$ et $y''(x) + y(x) = (x+1)^3$.

Solution :

$a(x) = 1$ $b(x)$

1) $y'(x) + y(x) = 2\cos(x)$

C'est une EDL1.

a est $\mathcal{C}^0$ sur IR intervalle.

Une primitive de a est $A : x \mapsto x$

$$\mathrm{Sol}(EH) = \mathrm{Vect}\left(y_H \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \end{array} \right)$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = k y_H$ où $k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

y_p sol de (E) $\iff \forall x \in \mathbb{R}\ k'(x) y_H(x) + \underbrace{k(x) y_H'(x) + a(x) y_H(x)}_{=0 \text{ car } y_H \text{ de (EH)}} = b(x)$

$$\iff k'(x) e^{-x} = 2\cos(x)$$

$$k'(x) = \frac{2\cos(x)}{e^{-x}} = 2\cos(x) e^{x}$$

On choisit $k(x) = e^{x}(\sin(x) + \cos(x))$

$$\mathrm{Sol}_{(E),I} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) + \cos(x) \cdot e^{-x} + k e^{-x}. \end{array} \right.$$

2) $y''(x) + y(x) = (x+1)^3$

On a une EDL CC2.

(E_H) $y'' + y = 0$

a pour E_{car} : $\left| \begin{array}{l} z^2 + 1 = 0 \\ z \in \mathbb{C} \end{array} \right.$

Les racines sont i et $-i$

$$Sol_{(EH)} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda_1 e \cos(x) + \lambda_2 e \sin(x) \end{array} \right. : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Raphaël Touchonnet

colle de la semaine n°9

$$\boxed{\text{Résoudre sur } \mathbb{R} \quad y'' + 2y' + y = \cos(t)}$$

<u>Solutions</u> :

On reconnaît une EDLCC2.

On pose

(E_H) $y'' + 2y' + y = 0$, $\mathbb{R}$

l'EDLCCH2 associée à (E)

(E_{car}) $z^2 + 2z + 1 = 0$, $\mathbb{R}$

l'équation caractéristique de (E)

Soit $z \in \mathbb{R}$,

$$z^2 + 2z + 1 = 0$$

$$\iff (z+1)^2 = 0$$

$$\iff z = -1$$

Donc

$$Sol_{(EH)} = Vect\left(y_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-x} \end{array} \right. , y_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto xe^{-x} \end{array} \right. \right)$$

On remarque $y_p \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(x) \end{array} \right.$ une solution particulière de (E)

Donc

$$Sol_{(E)} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}\sin(x) + \lambda_1 xe^{-x} + \lambda_2 e^{-x} \end{array} \right. : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Celia A. Colle de la semaine n°9

énoncé: Déterminer une primitive de $f : x \longmapsto (3x^2+1)e^{2x}$.

---

solution: f est continue sur $\mathbb{R}$.
Par le TFA, on a donc

$$F : x \longmapsto \int_0^x (3t^2+1)e^{2t}\,dt$$

une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule

$$\int_0^x (3t^2+1)e^{2t}\,dt$$

. $u : t \longmapsto 3t^2+1$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
. $v : t \longmapsto \frac{1}{2}e^{2t}$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$= \left[(3t^2+1)\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^x - \int_0^x 3t\,e^{2t}\,dt$$

. $u : t \longmapsto 3t$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
. $v : t \longmapsto \frac{1}{2}e^{2t}$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$= \frac{e^{2x}}{2}(3x^2+1) - \left[\frac{3}{2}te^{2t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{3}{2}e^{2t}\,dt$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}(3x^2+1) - \frac{e^{2x}}{2}(3x) + \left[\frac{3}{4}e^{2t}\right]_0^x$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\left(3x^2 - 3x + \frac{5}{2}\right)$$

Donc $F : x \longmapsto \frac{e^{2x}}{2}\left(3x^2 - 3x + \frac{5}{2}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Louis B. rapport de khôlle semaine 9

Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
$y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(E) \quad y' + \overbrace{2}^{a} y = \overbrace{x^2 - 2x + 3}^{b}$$

$a : x \mapsto 2$ donc une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est
$A : x \mapsto 2x$

On a donc $Sol_{(E_H), \mathbb{R}} = vect\left(y_H \middle| \begin{array}{l} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-2x} \end{array}\right)$

on cherche une sp. sous la forme
$y_P = k\, y_H$, $k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

y_P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad k'(x) y_H(x) + k(x) + y_H'(x) + a(x) y_H(x) k(x) = b(x)$
$\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad k'(x) = \dfrac{b(x)}{y_H(x)} = (x^2 - 2x + 3) e^{2x}$

on choisit $k : x \mapsto x^2 \dfrac{e^{2x}}{2} - \dfrac{3}{2} x e^{2x} + \dfrac{9}{4} e^{2x}$

on a donc $y_P : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{2} + \dfrac{9}{4}$

Ainsi $Sol_{(E), \mathbb{R}} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{9}{4} + k e^{-2x} \end{array} \right. , k \in \mathbb{R} \right\}$

Louis D

Semaine de colle n°9

$$\boxed{\text{Résoudre } (E)\ y'' + y' + 2y = \sin(x),\ y \in \mathcal{E}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

$(EH)\ y'' + y' + 2y = 0$

$(E_{car})\ z^2 + z + 2 = 0$

$\iff z = 1/2 + i\sqrt{7}/2$ ou $z = 1/2 - i\sqrt{7}/2$

$$Sol_{(EH),\mathbb{R}} = Vect\left(y_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \end{array}\right., y_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \end{array}\right.\right)$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \frac{1}{2i}e^{ix} - \frac{1}{2i}e^{-ix}$

$(E_1)\ y'' + y' + 2y = e^{ix}$ $\quad \begin{cases} A(x) = 1 \\ \lambda = i \end{cases}$

$(E_2)\ y'' + y' + 2y = e^{-ix}$

On cherche une solution y_{p_1} telle que $y_{p_1} : x \mapsto \overset{\in \mathbb{C}}{a} e^{ix}$

y_{p_1} sol $\iff \forall x \in \mathbb{C}\quad -a e^{ix} + a i e^{-ix} + 2a e^{ix} = e^{ix}$

$(\div e^{ix} \neq 0) \iff \forall x \in \mathbb{C}\quad a + ai = 1$

$\iff \forall x \in \mathbb{C}\quad a = 1/2 - 1/2\, i$

Donc $y_{p_1} : x \to (1/2 - 1/2\, i)e^{ix}$ sol de (E_1)

Et par conjugaison $y_{p_2} : x \to (1/2 + 1/2\, i)e^{-ix}$ sol de (E_2).

Or $\frac{1}{2i}y_{p_1} : x \mapsto \left(\frac{\sin(x) - \cos(x)}{4}\right) - i\left(\frac{\sin(x) + \cos(x)}{4}\right)$

et $-\frac{1}{2i}y_{p_2} : x \mapsto \left(\frac{\sin(x) - \cos(x)}{4}\right) + i\left(\frac{\sin(x) + \cos(x)}{4}\right)$

Par superposition : $Sol_{(E),\mathbb{R}} = \left\{ \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{1}{2}x}\left(\lambda_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right) \\ \quad + \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} \end{array} \right. : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$