Exercice 3 : Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
On considère la fonction définie sur un ensemble D par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Déterminer une fonction g telle que pour tout $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)(\ln(1+bx))^2}$$

3) Etudier les variations de g et en déduire le signe de g puis les variations de f.

Solution :

1) f est défini si $\begin{cases} 1+ax > 0 \\ 1+bx > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{1}{a} \text{ (car } a > 0) \\ x > -\frac{1}{b} \text{ (car } b > 0) \\ x \neq 0 \end{cases}$

Comme $0 < a < b$

$\iff 0 > -a > -b$ (car $-1 < 0$)

$\iff 0 < -\frac{1}{a} < \underbrace{-\frac{1}{b}}_{< x}$ (car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$)

donc f définie si $\begin{cases} x > -\frac{1}{b} \\ x \neq 0 \end{cases}$ donc $D = \left]-\frac{1}{b} ; +\infty\right[\setminus \{0\}$

2) Soit $x \in D$

f est dérivable sur D

$\forall x \in D$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(1+bx)^2} \times \left[\frac{a\ln(1+bx)}{1+ax} - \frac{\ln(1+ax)b}{1+bx}\right]$$

$$= \frac{1}{\ln(1+bx)^2} \times \frac{a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)}{(1+ax)(1+bx)}$$

$$= \frac{a(1+bx)\ln(1+bx) - b\ln(1+ax)\,(1+ax)}{(1+ax)(1+bx)\ln(1+bx)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)\ln(1+bx)^2}$$

Par identification

$\forall x \in D$

$$g(x) = a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$$

3) g dérivable sur D

$$g'(x) = ab\ln(1+bx) + \frac{ab\cancel{(1+bx)}}{\cancel{1+bx}} - ba\ln(1+ax) - \frac{ba\cancel{(1+ax)}}{\cancel{1+ax}}$$

$$= ab\ln(1+bx) + \cancel{ab} - \cancel{ba} - ba\ln(1+ax)$$

$$= \underbrace{ab}_{>0}\left(\ln(1+bx) - \ln(1+ax)\right)$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $\ln(1+bx) - \ln(1+ax)$

$\ln(1+bx) - \ln(1+ax) > 0$

$\Leftrightarrow \ln(1+bx) > \ln(1+ax)$

$\Leftrightarrow 1+bx > 1+ax$

ln INJ
exp INJ

$\Leftrightarrow bx - ax > 0$

$\Leftrightarrow x\underbrace{(b-a)}_{>0} > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

x	$-\frac{1}{b}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	||	$+$
g	$\searrow$	0 || 0	$\nearrow$

Donc $\forall x \in D$, $g(x) \geq 0$

Donc les variations de f se déduisent du signe de $\overbrace{(1+ax)}^{>0}\overbrace{(1+bx)}^{>0}$
$\times \underbrace{\ln(1+bx)^2}_{>0}$

Donc f est croissante sur D.

Sofia L. Colle de la semaine 7

Exercice 1
Soit f la fonction d'une variable réelle suivante :

$$f : x \mapsto \sin(2x) - \frac{3}{4}\tan(x).$$

1. Étudier la parité et vérifier que f est π périodique.
2. Montrer que f admet un maximum sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et préciser la valeur de ce maximum.
3. Représenter f sur un intervalle de longueur trois périodes.

Solution :

Soit $f : x \mapsto \sin(2x) - \frac{3}{4}\tan(x)$

1. Etudions la parité de f : $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
On sait que $\sin(x)$ est impaire
et $\tan(x)$ est impaire
donc f est impaire

Vérifions que f est π périodique :
f est π périodique si elle vérifie $f(x) = f(\pi + x)$
Calculons $f(\pi + x)$:

$$f(\pi + x) = \sin(2(x + \pi)) - \frac{3}{4}\tan(\pi + x)$$

$$= \underbrace{\sin(2x + 2\pi)}_{= \sin(2x) \text{ car } \sin \text{ est } 2\pi \text{ périodique}} - \frac{3}{4}\underbrace{\tan(\pi + x)}_{= \tan x \text{ car } \tan \text{ est } \pi \text{ périodique}}$$

$$f(\pi + x) = f(x)$$

donc f est π périodique.

2. Montrons que f admet un maximum sur $[0; \frac{\pi}{2}[$
f est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$
Calculons la dérivée $f'(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2\cos(2x) - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)$$

$$f'(x) = 2(2\cos^2(x) - 1) - \frac{3}{4\cos^2(x)}$$

$$= 4\cos^2(x) - 2 - \frac{3}{4\cos^2(x)}$$

$$= \frac{4\cos^2(x) . 4\cos^2(x) - 2 . 4\cos^2(x) - 3}{4\cos^2(x)}$$

$$= \frac{16\cos^4(x) - 8\cos^2(x) - 3}{4\cos^2(x)}$$

Posons $X = \cos^2(x)$

$$f'(x) = \frac{16X^2 - 8X - 3}{4X > 0 \text{ car } X = \cos^2(x)}$$

Étudions le signe de $16X^2 - 8X - 3$:

$\Delta = 256 > 0$

$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{1}{4}$ absurde car $X = \cos^2(x)$

$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2(x) = \frac{3}{4}$

$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a deux candidats $\left\{-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6}\right\}$

Or, $-\frac{\pi}{6} \notin [0; \frac{\pi}{2}[$

donc $x = \frac{\pi}{6}$

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	

Je n'ai pas su finir.

Yhomim, R Colle de la semaine n°7

Etudier $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ (symétrie, dérivée, reconnaître quelque chose). Montrer aussi que $F : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Arcsin}(x)\right)$ vérifie que $F' = f$.

Solution :

Soit $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

Déterminons son domaine de définition :

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \text{ est bien défini} \iff 1 - x^2 \geq 0$$

$$\iff 1 \geq x^2$$

$$\iff x \in [-1;1]$$

Ainsi $Df = [-1;1]$

Affinons le domaine d'étude :

Montrons que f est paire :

- $[-1;1]$ est symétrique par rapport à 0
- Soit $x \in [-1;1]$:

$$f(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f(x)$$

Ainsi f est paire. On peut réduire le domaine d'étude à $[0;1]$.

Domaine de dérivation :

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

On doit donc trouver les valeurs de x pour lesquels $1-x^2=0$ avec $x \in [-1;1]$.

$$1-x^2=0$$
$$\Leftrightarrow \quad 1=x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 1=x \text{ ou } -1=x$$

Ainsi le domaine de dérivation est $]-1;1[$.

Dérivée :

Soit $x \in [0;1[$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Or $\sqrt{1-x^2} > 0$ et $x \geq 0$ donc $-x \leq 0$

On en déduit que $f'(x) \leq 0$.

Tableau :

x	0		1
$f'(x)$	0	$-$	$\|\|$
f	1	$\searrow$	0

$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$

$f(1) = \sqrt{1-1^2} = 0$

Conjecture :

f est la fonction qui à tout $x \in [-1;1]$ associe un $y \in [0,1]$ tel que le point de coordonnée (x,y) appartienne au cercle unité

Soit $x \in [-1;1]$

Étant donné que f est continue sur $[-1;1]$ et en se basant sur ces variations, $y = f(x) \in [0;1]$.

Montrons que $\quad y = \sqrt{1-x^2} \implies \sqrt{x^2+y^2} = 1$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$\implies y^2 = 1-x^2$$

$$\implies x^2+y^2 = 1$$

$$\implies \sqrt{x^2+y^2} = 1$$

Ainsi le point de coordonnée (x,y) appartient au cercle unité car son affixe a un module égal à 1.

Soit $\quad F : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Arcsin}(x)\right)$

Domaine de définition :

$\forall x \in \mathbb{R}$

$F(x)$ est bien défini $\iff \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 & (\text{prop. } \sqrt{\cdot}) \\ -1 \leq x \leq 1 & (\text{prop. Arcsin}) \end{cases}$

$\iff x \in [-1;1]$

Domaine de dérivabilité :

. $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1;1[$

Ainsi $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1;1[$

. Arcsin est dérivable sur $]-1;1[$

. Donc F est dérivable sur $]-1;1[$.

Soit $x \in]-1;1[$

$$\frac{d}{dx} x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} + x \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} x\sqrt{1-x^2} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$F'(x) = \sqrt{1-x^2} = f(x)$$

Colle de la semaine 7

Louis Guillaume S.

EXERCICE 7 — Calculer, pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \text{ch}^2(kx)$.

Solution : Soit $(x;n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$

On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \text{ch}^2(xk)$. Transformons l'écriture ;

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{2kx}+e^{-2kx}+2\right) \quad \text{(prop. algébriques de exp)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} 2 + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{2x}\right)^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-2x}\right)^k \quad \text{(prop. } \Sigma\text{)}$$

Si $x = 0$, $e^{2x} = 1$ et $e^{-2x} = 1$:

$$S_n(x) = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}(n+1) = \boxed{\frac{3}{2}(n+1)}$$

Si $x \neq 0$,

$$S_n(x) = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}\,\frac{1-e^{2x(n+1)}}{1-e^{2x}} + \frac{1}{4}\,\frac{1-e^{-2x(n+1)}}{1-e^{-2x}}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}\,\frac{-2\text{sh}(x(n+1))e^{x(n+1)}}{-2\text{sh}(x)\,e^{x}} + \frac{1}{4}\,\frac{2\text{sh}(x(n+1))e^{-x(n+1)}}{2\text{sh}(x)\,e^{-x}} \quad \text{(angle moitié)}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}\,\frac{\text{sh}(x(n+1))e^{x(n)} + \text{sh}(x(n+1))e^{-xn}}{\text{sh}(x)} \quad \text{(même dénominateur)}$$

$$\left(e^{xn}+e^{-x}\right) = 2\text{ch}(xn)$$

$$\boxed{S_n(x) = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}\,\frac{\text{sh}(x(n+1))\,\text{ch}(xn)}{\text{sh}(x)}}$$

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Etudier les variations de f.

Solution :

f est définie $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+ax > 0 \\ \text{et } 1+bx > 0 \\ \text{et } \ln(1+bx) \neq 0 \end{cases}$

- $1 + ax > 0$
  $\Leftrightarrow \quad x > -\dfrac{1}{a}$

- $1 + bx > 0$
  $\Leftrightarrow \quad x > -\dfrac{1}{b}$

or $a < b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{a} < -\dfrac{1}{b}$

On en déduit $x > -\dfrac{1}{b}$.

- $\ln(1+bx) \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad 1+bx \neq 1$
$\Leftrightarrow \quad x \neq 0 \quad$ car $b \neq 0$

Ainsi $\mathcal{D}f = \left]-\dfrac{1}{b} ; +\infty\right[\cap \mathbb{R}^*$

$= \left]-\dfrac{1}{b} ; 0\right[\cup \left]0 ; +\infty\right[$

Variation : $\forall x \in \mathcal{D}f, \quad f'(x) = \dfrac{\dfrac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \ln(1+ax)\dfrac{b}{1+bx}}{\ln^2(1+bx)}$

Du signe de : $\dfrac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \ln(1+ax)\dfrac{b}{1+bx} > 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1+bx}{b}\ln(1+bx) > \ln(1+ax) \times \dfrac{1+ax}{ax}$

Soit $f_x \left| \begin{array}{l}]0;b[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1+xt}{t}\ln(tx+1) \end{array} \right.$

$\forall t \in \mathbb{R}_{>0}, \quad f_x'(t) = \dfrac{xt - (1+xt)}{t^2}\ln(tx+1)$

$+ \dfrac{\cancel{1+xt}}{t} \times \dfrac{x}{\cancel{tx+1}}$

$= -\dfrac{\ln(tx+1)}{t^2} + \dfrac{x}{t}$

Or $\frac{x}{t} > \frac{\ln(tx+1)}{t^2}$

$\Leftrightarrow xt > \ln(tx+1)$

Vrai car : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(x) < x+1$

Ainsi vu que $b > a$ alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in D_f$.

Ainsi f est strictement croissante sur $]-\frac{1}{b};0[$ puis sur $]0;+\infty[$.

Youssef B — Colle de la semaine 7

EXERCICE 6 — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)}$ et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la

aleur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}\left(2^k x\right)$.

Solution :

$$\frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{th(x)} = \frac{2}{\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}} - \frac{1}{\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}}$$

$$= \frac{2(e^{2x}+e^{-2x})}{e^{2x}-e^{-2x}} - \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$

$$= \frac{2(e^{2x}+e^{-2x}) - (e^{x}+e^{-x})^2}{(e^{x}-e^{-x})(e^{x}+e^{-x})}$$

$$= \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{(e^{x}-e^{-x})(e^{x}+e^{-x})}$$

$$= \frac{(e^{x}-e^{-x})^2}{(e^{x}-e^{-x})(e^{x}+e^{-x})} \quad (\text{car } 2 = 2e^{x}e^{-x})$$

$$= \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = th(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k th(2^k x) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\frac{2}{th(2^{k+1} x)} - \frac{1}{th(2^k x)} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^{k+1}}{th(2^{k+1} x)} - \frac{2^k}{th(2^k x)} \right)$$

Or, $\sum_{k=0}^{n} (U_{k+1} - U_k) = U_{n+1} - U_0$ (somme telescopique)

Donc $\sum_{k=0}^{n} 2^k th(2^k x) = \frac{2^{n+1}}{th(2^{n+1} x)} - \frac{1}{th(x)}$

Paul C. Semaine de colle n°7

Exercice 13 : Soit $f : x \mapsto \text{Arcos}(1-2x^2)$. Déterminer l'ensemble de définition, les variations, le signe de f et en donner une expression simplifiée.

Solution :

- Ensemble de définition

Les éléments sont définis si $-1 \leq 1-2x^2 \leq 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$1-2x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 0$ Vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$

$-1 \leq 1-2x^2 \Rightarrow x^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow |x| \leq 1$ vrai pour tout $x \in [-1;1]$

On obtiens $D_f =]-\infty;+\infty[\cap [-1;1] = [-1;1]$

On remarque que D_f est symétrique par rapport à 0.
Montrons que f est paire :
Soit $x \in D_f$,

$f(-x) = \text{Arcos}(1-2(-x)^2) = \text{Arcos}(1-2x^2) = f(x)$

On peut donc réduire l'intervalle d'étude de f à $[0;1]$ par parité de f.

- Variations de f

Arccos est dérivable sur $]-1;1[$. déterminons les $x \in [0;1]$ tels que $\begin{cases} 1-2x^2=1 \\ \text{ou} \\ 1-2x^2=-1 \end{cases}$

$1-2x^2=1 \iff x=0$

$1-2x^2=-1 \iff x^2=1$

$\iff x=1$ car $x \geq 0$

Par dérivabilité d'une fonction composée, on obtiens que f est dérivable sur $]0;1[$.
Soit $x \in]0;1[$,

$$f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-x^4}}$$

comme $x>0$, $f'(x)>0$ sur $]0;1[$ donc f est strictement croissante sur $]0;1[$ (critères différentiels de stricte monotonie)
$f(0)=\text{Arccos}(1)=0$
$f(1)=\text{Arccos}(-1)=\pi$
par parité, $f(-1)=\pi$

Tableau de variation de f (complété par parité)

x	-1		0		1
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$
f	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π

- Signe de f

comme f est strictement décroissante sur $[-1;0]$ et strictement croissante sur $[0;1]$, et $f(0)=0$,

on obtient $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in D_f$ et $f(x)>0$ pour tout $x \in D_f \setminus \{0\}$

- Simplification de l'expression :

Soit $x \in]0;1[$.

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-x^4}} = \frac{x \times 2}{x\sqrt{1-x^2}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

une primitive de f' sur $]0;1[$ est f, mais $2\,\text{Arcsin}(x)$ est également une primitive de f' sur $]0;1[$

On a donc, pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) = 2\,\text{Arcsin}(x) + k$ avec k une constante réelle.

$\frac{\sqrt{2}}{2} \in]0;1[$,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \text{Arccos}\left(1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \text{Arccos}(0)$$
$$= \pi/2 \qquad (\text{Arccos}(0) = \text{Arccos}(\underbrace{\cos(\pi/2)}_{\in[0;\pi]}))$$

$$2\,\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/2$$

On en déduit donc que $k = 0$,

d'où, $\forall x \in]0;1[$, $f(x) = 2\,\text{Arcsin}(x)$

$f(0) = 0 = 2\,\text{Arcsin}(0)$

$f(1) = \pi = 2\,\text{Arcsin}(1)$

donc, $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = 2\,\text{Arcsin}(x) = |2\,\text{Arcsin}(x)|$

par parité de f et $|\cdot|$ et imparité de Arcsin,

On a :

$\forall x \in [-1;1] = \mathcal{D}_f$, $f(x) = |2\,\text{Arcsin}(x)|$

On peut donc simplifier l'écriture de f par :

$f : x \mapsto |2\,\text{Arcsin}(x)|$

Nicolas.H Colle de la semaine 7

Enoncé

$$\boxed{\text{Etudier } f : x \longrightarrow \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{x}}\right) + \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{x}}\right)}$$

Solution:

$$f \text{ est défini} \Leftrightarrow \begin{cases} \cdot\ x \geqslant 0 & \text{(racine)} & (1) \\ \cdot\ \frac{1}{2}+\sqrt{x} \geqslant 0 & & (2) \\ \cdot\ \frac{1}{2}-\sqrt{x} \geqslant 0 & & (3) \\ \cdot\ -1 \leq \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{x}} \leq 1 & \text{(Arcsin)} & (4) \\ \cdot\ -1 \leq \sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{x}} \leq 1 & & (5) \end{cases}$$

(1) vrai quand $x \geqslant 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$

(2) $\frac{1}{2} + \sqrt{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant -\frac{1}{2}$, vrai car $x \in \mathbb{R}_+$

(3) $\frac{1}{2} - \sqrt{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant \sqrt{x}$

$$\underset{\substack{\text{carré} \\ \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+}}{\overset{\sqrt{\cdot} \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+}{\Leftrightarrow}} \frac{1}{4} \geqslant x.$$

Soit $x \in [0, \frac{1}{4}]$

(4) $-1 \leq \overbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{x}}}^{\in \mathbb{R}}$ vrai

$\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{x}} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{4}$

(5) $-1 \leq \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{x}}}_{\in \mathbb{R}}$ vrai

$\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{x}} \leq 1 \iff \underbrace{-\sqrt{x}}_{\in \mathbb{R}_-} \leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in \mathbb{R}}$ vrai

Donc $D_f = [0, \frac{1}{4}]$

f est dérivable sur $]0, \frac{1}{4}[$ ($\sqrt{\cdot}$ non dérivable en 0 et $\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{x}}=0$ lorsque $x=\frac{1}{4}$)

Soit $x \in]0; \frac{1}{4}[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{x}}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{x}}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{x}}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{x}}} = 0$$

Donc f est constante sur $]0; \frac{1}{4}[$

Calculons les valeurs possibles de f:

$f(0) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \arcsin(1) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$

$f\left(\frac{1}{16}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

Donc $\forall x \in [0, \frac{1}{4}]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$

Mouchonnet Raphaël colle semaine n° 7

$$\text{Etudier } f : x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right) - \operatorname{arsin}\left(\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}\right)$$

Solutions : $f(x)$ est défini $\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1+\sin(x)}{2} \geq 0 \\ \text{et } \frac{1+\cos(x)}{2} \geq 0 \\ \text{et } \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}} \in [1,1] \\ \text{et } \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \in [1,1] \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on sait

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

donc $0 \leq \frac{1+\sin(x)}{2} \leq 1$

et $0 \leq \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}} \leq 1$

($\sqrt{\cdot}$ ↗ sur $\mathbb{R}_+$)

De manière analogue on traite le cas de l'autre membre

Ainsi $D_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est stable par translation de 2π.

De plus sachant que sin et cos sont 2π-périodique, on déduit que f est également 2π-périodique

On peut réduire l'intervale d'étude à $[0, 2\pi]$

Arcos et Arsin ne sont pas dérivable en 1 et -1
Soit pour $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}$
dans le cas de $f_{|[0,2\pi]}$

De plus racine carré n'est pas dérivable en 0.
Soit pour $x \in \{\frac{3\pi}{2}, \pi\}$ dans le cas de $f_{|[0,2\pi]}$

On nomme S l'ensemble
$S := \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$
Par composé de fonction dérivable
$f_{|[0,2\pi]}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus S$

$$f' \left| \begin{array}{l} [0,2\pi] \setminus S \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{2|\cos(x)|} - \dfrac{\sin(x)}{2|\sin(x)|} \end{array} \right.$$

si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$f'(x) = 0$ car $\cos(x) > 0$
$\sin(x) > 0$

si $x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$

$f'(x) = 0$ car $\cos(x) < 0$
$\sin(x) < 0$

Houchonnet Raphaël

si $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$f'(x) = -1$ car $\cos(x) < 0$
$\sin(x) > 0$

si $x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$

$f'(x) = 1$ car $\cos(x) > 0$
$\sin(x) < 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		0	$\Vert$	$+$	$\Vert$	0	$\Vert$	$-$	
f	$-\frac{\pi}{4}$	$\rightarrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{4}$

avec $f(0) = \frac{-\pi}{4}$

et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\pi}{4}$

et $f(\pi) = \frac{\pi}{4}$

et $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{+\pi}{4}$

et $f(2\pi) = \frac{-\pi}{4}$

Thibault N. Colle semaine 7

Exercice 1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = e^{\operatorname{sh}(x)} - x - 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$:

$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

1. Montrer que l'équation $2\operatorname{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note a cette solution.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x) \geqslant 0$$
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que
$$\forall x \in]0;1[,\ 1 + x \leqslant e^{\operatorname{sh}(x)} \leqslant \frac{1}{1-x}$$
5. En déduire que :
$$\forall n \geqslant 2,\ \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \geqslant S_n \geqslant -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right).$$
6. Déterminer alors la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution:

1) On pose $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2\operatorname{sh}(x)+1 \end{array} \right.$. sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g l'est aussi.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $g'(x) = 2\operatorname{ch}(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Comme g est dérivable sur $\mathbb{R}$, g est continue sur $\mathbb{R}$, qui est un intervalle.

Par le théorème de la bijection : $\tilde{g} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to g(\mathbb{R}) \\ x \mapsto g(x) \end{array} \right.$ est bijective.

On $\operatorname{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Ainsi $\tilde{g} = g$ est bijective. On en déduit $g(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une unique solution car $0 \in \mathbb{R}$.

2) ~~D'après 1)~~ $\cancel{\operatorname{sh}(a) = -\frac{1}{2}}$. ~~On sait : ch~~
$\cancel{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}^2(x) \geqslant 1}$ ~~(car ch strictement croissante sur~~ $\cancel{\mathbb{R}_{>0}}$~~)~~

On pose $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ch^2(x)+sh(x) \end{array}\right.$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $g'(x) = ch(x)(2sh(x)+1)$.

On résout $g'(x) \geq 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $g'(x) \geq 0 \iff 2sh(x)+1 \geq 0$ $\quad$ ($ch(x) > 0$)

$\iff x \geq a$ $\quad$ (q1))

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(a)$	$\nearrow$	

D'après q1) $sh(a) = -\frac{1}{2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $ch^2(x) > 1$ (carré strictement croissante sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$)

Donc $g(a) \geq 0$.

On a bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0.}$

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = ch(x)e^{sh(x)} - 1$.

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\quad f''(x) = ch^2(x)e^{sh(x)} > 0$

Donc f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $f'(0) = 1-1 = 0$ donc

~~Donc~~ $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0$

On conclut que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) Soit $x \in]0,1[$. D'après q3) $f(x) \geq 0$ donc $\boxed{e^{sh(x)} \geq x+1.}$

On suit donc $e^{sh(-x)} \geq 1-x$

d'où $\boxed{e^{sh(x)} \leq \frac{1}{1-x}}$ $\quad$ (inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_{>0}$)

5) On admet 5

6) Soit $n \geq 2$. $\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \ln\left(p+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(p)$

$-\ln\left(\frac{n-1}{np}\right) = -\ln\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{p}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(p)$

D'après 5) et le théorème des gendarmes : $\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(p).}$

Rapport de Colle de la semaine 7

Wassim M.

EXERCICE 1 — Soit f la fonction définie par $f: x \longmapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Préciser le domaine de dérivabilité de f et donner l'expression de sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites éventuelles aux bornes de l'ensemble de définition.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) $-1 \leqslant \dfrac{1+x}{1-x} \leqslant 1$ et $x \neq 1$

donc $\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| \leqslant 1$ $\quad x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$\iff \dfrac{|1+x|}{|1-x|} \leqslant 1$

$\iff |1+x| \leqslant |1-x|$

$\iff (1+x)^2 \leqslant (1-x)^2$

carré ↗ sur $\mathbb{R}^+$

$\iff x^2+2x+1 \leqslant 1-2x+x^2$

$\iff 4x \leqslant 0$

$\iff x \leqslant 0$

$D_f:]-\infty, 0]$

2) Df n'est pas centré en 0 donc la fonction n'est ni paire ni impaire.

3) Arcsin est derivable sur $]-1,1[$

$\frac{1+x}{1-x} = -1$ impossible

$\frac{1+x}{1-x} = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

donc f est derivable sur $]-\infty, 0[$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}}$$

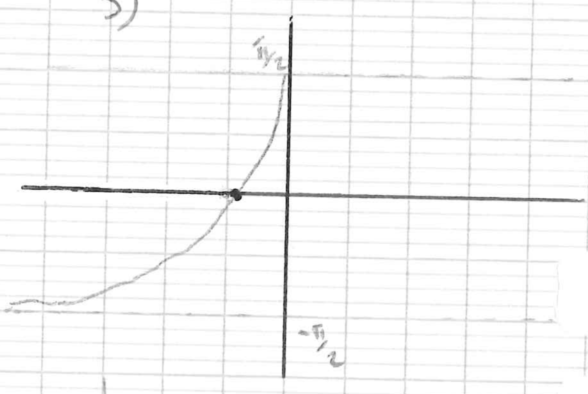
$$= \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x)^2-(1+x)^2}{\underbrace{(1-x)^2}_{>0}}}}$$

$$= \frac{2}{\underbrace{(1-x)^2}_{>0}} \times \frac{\overbrace{1-x}^{>0}}{\underbrace{\sqrt{-4x}}_{>0}}$$

4)

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	$\Vert$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

5)



$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{x}}{-1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$ $\Big\}$ comp. $\Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2}$ de lim

$\operatorname{Arcsin}(X) \xrightarrow[X \to -1]{} -\frac{\pi}{2}$

$\frac{1+x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ $\Big\}$ par comp de lim $\Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{Arcsin}(X) \xrightarrow[X \to 1]{} \frac{\pi}{2}$

Adam M. Colle de la semaine 7

Exercice 2
Calculer $\theta = \arctan(2) + \arctan(3)$.

Solution :

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$

Donc $\theta = \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3)$

$= \pi - \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

Or $0 < \frac{1}{2} < 1$

$0 < \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{4}$ Car Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

De même on trouve

$0 < \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$

On additionne membre à membre et on obtient

$S_\theta = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$S_\theta = \text{Arctan}\left(\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right)$

$= \text{Arctan}\left(\dfrac{\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1 - \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right)}\right)$

$= \text{Arctan}\left(\dfrac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}}\right)$

$= \text{Arctan}(1)$

$= \frac{\pi}{4}$ car ~~$1 \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$~~ $1 \in \mathbb{R}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Donc $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Ibrahim.K

Colle de la semaine 7

Étudier :

$$f : x \longmapsto \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right) - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}\right)$$

1) Domaine de définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$f(x)$ est définie si et seulement si :

- $\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}} \in [0,1]$

et

- $\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \in [0,1]$:

Ainsi soit $x \in \mathbb{R}$:

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

d'où

$$0 \leq \frac{1+\cos(x)}{2} \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{1+\sin(x)}{2} \leq 1 \quad \left(\frac{1}{2} > 0\right)$$

ainsi puisque $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

on déduit que

$$0 \leq \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}} \leq 1$$

Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2) périodicité :

f est 2π périodique car cos et sin sont les deux 2π-périodique ; on réduit donc l'intervalle d'étude à $\mathbb{R} \cap [-\pi, \pi] = [-\pi, \pi]$.

3) - Dérivabilité et dérivée :

il est clair que f est dérivable sur

$I : [-\pi, \pi] \setminus \{-\pi ; -\frac{\pi}{2} ; 0 ; \frac{\pi}{2} ; \pi\}$

car elle est la composé de la combinaison linéaire de fonction dérivable sur I ainsi

Soit $x \in I$:

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1+\sin x}{2}}} \times \frac{\frac{\cos(x)}{2}}{2\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1+\cos(x)}{2}}} \times \frac{\frac{-\sin(x)}{2}}{2\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}} \right)$$

$$= \frac{-\cos(x)}{4\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}\sqrt{\frac{1-\sin x}{2}}} + \frac{\sin(x)}{4\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}}$$

$$= \frac{-\cos(x)}{4\sqrt{\frac{1-\sin^2(x)}{4}}} + \frac{\sin(x)}{4\sqrt{\frac{1-\cos^2(x)}{4}}} \quad \text{(Pythagore}$$

$$= \frac{-\cos(x)}{4\,\frac{|\cos(x)|}{2}} + \frac{\sin(x)}{4\,\frac{|\sin(x)|}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\cos(x)}{|\cos(x)|} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(x)}{|\sin(x)|}$$

on divise ainsi l'étude en 4 cas :

→ Si $x \in]-\pi ; -\frac{\pi}{2}[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos(x)}{-\cos(x)} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(x)}{-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Ibrahim . K

→ Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \frac{\cos(x)}{\cos(x)} + \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{-\sin(x)}$$

$$f'(x) = -1$$

→ Si $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x) = \frac{-1}{2} \frac{\cos(x)}{\cos(x)} + \frac{1}{2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)}$$

$$= 0$$

→ Si $x \in \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \frac{\cos(x)}{-\cos(x)} + \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\sin x}$$

$$f'(x) = 1$$

Ainsi

→ f est constante sur $\left]-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right[$ qui est un intervalle.

~~et~~ ~~f~~ ~~sur~~ $f(x) = \frac{\pi}{4}$ $\forall x \in \left]-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right[$

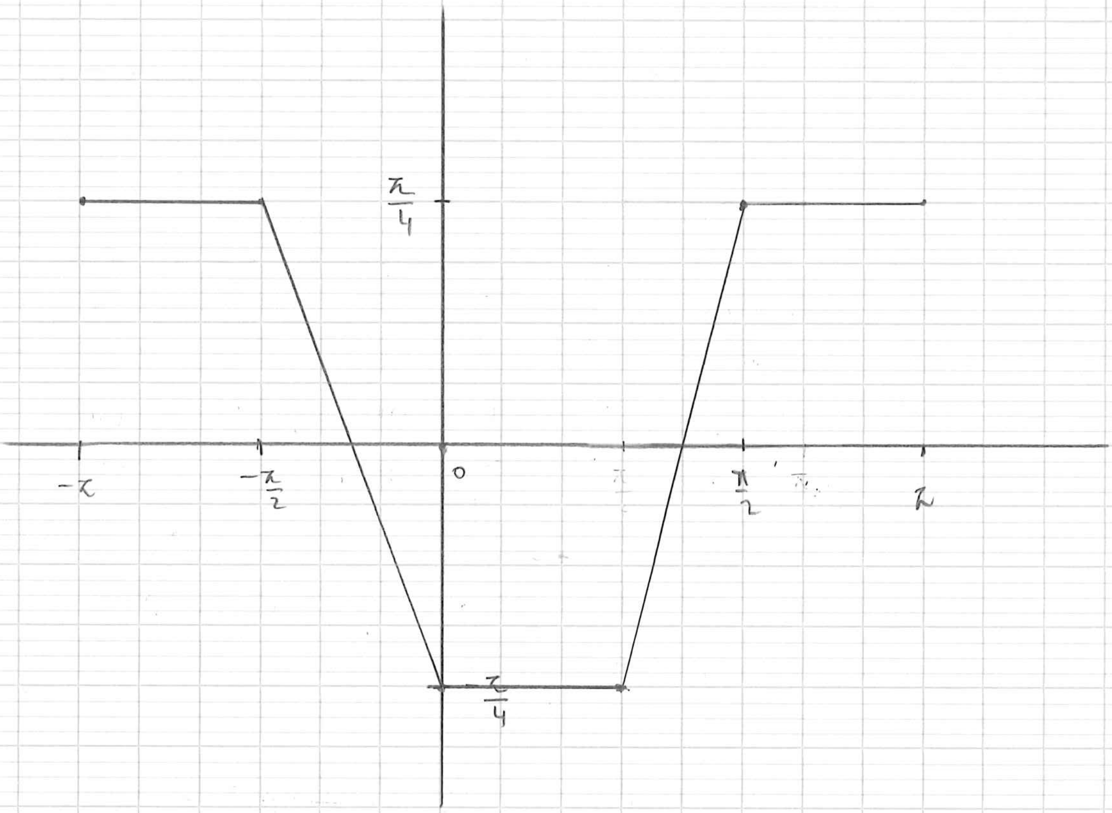
→ f est une fonction afine sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; 0\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$

→ f est constante sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ qui est un intervalle.

$\forall x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f(x) = \frac{-\pi}{4}$$

on déduit donc le graphe de f :


$\frac{\pi}{4}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$-\frac{\pi}{4}$

Tigüin
David
Pierre T.

Colle de la semaine 7

> 1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction
> $f : x \rightarrow 2\,\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \text{Arcsin}(2x-1)$
>
> 2. Simplifier $f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

1. $\cdot\ x \neq 0$ (diviser par 0)

$\cdot\ \frac{1-x}{x} > 0$ donc (domaine de définition de $\sqrt{\cdot}$)

$(\times \frac{1}{x} \neq 0)$ $1 - x > 0$ alors

$x < 1$

$\cdot\ -1 \leq 2x - 1 \leq 1$ (domaine de déf. de Arcsin)

$(+1)$ $0 \leq 2x \leq 2$

$(\times \frac{1}{2} \neq 0)$ $0 \leq x \leq 1$

Ainsi le domaine de définition $\mathcal{D} =]0, 1]$

2. Posons $f \left| \begin{array}{l}]0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow 2\,\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \text{Arcsin}(2x-1) \end{array} \right.$

f est dérivable en $\mathcal{D}$, calculons sa dérivée $\forall x \in \mathcal{D}$

$\text{Arctan}'(u(x)) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

$\text{Arcsin}'(u(x)) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

$$f'(x) = \frac{-\frac{2}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}}{1+\frac{1}{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2+4x-1}}$$

$$= -\frac{x}{x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}} + \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = -\frac{1}{x\sqrt{\frac{1}{x}-1}} + \frac{2}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$= 0$$

Donc $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathcal{D}$. $f(x) = k$

- Calculons $f(x)$ pour $x = 1$

$2\operatorname{Arctan}(0) + \operatorname{Arcsin}(1) = 0 + \pi/2 = \pi/2$

En conclusion $\forall x \in \mathcal{D}$ $f(x) = \pi/2$ et f est la fonction.

$$f \begin{vmatrix}]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \pi/2 \end{vmatrix}$$

$2^{\text{ème}}$ solution :

Soit $x \in]0,1]$.

$\exists! t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ $x = \cos^2(t)$

$$f(x) = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \operatorname{Arcsin}(2x-1)$$

$$= 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-\cos^2(t)}{\cos^2(t)}}\right) + \operatorname{Arcsin}(2\cos^2(t)-1)$$

$$= 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}\right) + \operatorname{Arcsin}(\cos(2t))$$

$$= 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{\tan^2(t)}) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}(\cos(2t))$$

$$= 2\operatorname{Arctan}(|\tan(t)|) + \frac{\pi}{2} - 2t \qquad (2t \in [0, \pi[)$$

$$= 2t + \frac{\pi}{2} - 2t \qquad (t \geq 0 \text{ donc } \tan(t) \geq 0)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Titouan D

Rapport de colle semaine 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall x \geq 0 \quad f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

1) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R} \quad e^t \geq 1+t$

2) En deduire que $\forall x \geq 0 \quad f_n(x) \geq 0$

3) Donner le tableau de variation de f_n

1) Soit $\Delta \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t - 1 - t \end{array} \right.$

Δ est la somme de fonctions derivables sur $\mathbb{R}$ donc Δ derivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall t \in \mathbb{R} \qquad \Delta'(t) = e^t - 1$

Donc

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$\Delta'(t)$		$-$	0	$+$	
Δ	$\searrow$		$\Delta(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$		$\nearrow$

Donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad \Delta(t) \geq 0$

Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad e^t \geq 1+t}$

2) Soit $(x, n) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{N}^*$

On pose $t = \frac{x}{n} \in \mathbb{R}$

Donc $e^{\frac{x}{n}} \geq 1 + \frac{x}{n}$

$n > 0$ donc par croissance de la fonction puissance

$$e^{\frac{nx}{n}} \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

donc $e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 0$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \; f_n(x) \geq 0}$

3) $f_n(x)$ derivable sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$

et $\forall x \geqslant 0$ $\quad f_n'(x) = e^x - n\left(\frac{d}{dx}\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$

$$= e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

$1+\frac{x}{n} \geqslant 1$ $\quad$ donc $\quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

$(\times(-1) < 0)$ $\quad$ donc $\quad -\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \geqslant -\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

$(+e^x)$ $\quad$ donc $\quad f_n'(x) \geqslant f_n(x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ $\; f_n'(x) \geqslant 0$ $\quad$ (par transitivité)

Ainsi

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	$0 \nearrow +\infty$

$$f_n(0) = e^0 - \left(1+\frac{0}{n}\right)^n$$
$$= 0$$

$$\left.\begin{array}{l} e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right\} \underset{\text{de limites}}{\overset{\text{par composée}}{\Longrightarrow}} \quad f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Lina . A

Colle de la semaine 5

En étudiant une fonction, montrer que :

$$\forall x \in]0,1[\,,\quad x^{x}(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

Solution :

Soit $x \in]0,1[$

• Posons :

$$\Delta \left| \begin{array}{l}]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{x\ln(x)}\, e^{(1-x)\ln(1-x)} - \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Δ est dérivable sur $]0,1[$.
Et :

$$\Delta'(x) = \left(1 + \ln(x) - \ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{(1-x)}\right) \times e^{x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)}.$$

$$= e^{x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)} \ln\left(\frac{x}{\underbrace{1-x}_{>0 \text{ car } x \in]0;1[}}\right)$$

• Résolvons : $\frac{x}{1-x} \geqslant 1$.
Soit $x \in]0,1[$

$$\frac{x}{1-x} \geqslant 1 \iff \underline{x \geqslant \frac{1}{2}}$$

Nous pouvons ainsi en déduire les variations de la fonction Δ :

x	0		$1/2$		1
$\Delta'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
Δ	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	‖

Or $\Delta\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 0$

Donc

$\underline{\Delta(1/2) = 0}$

Comme 0 est le minimum de Δ sur l'intervalle $]0,1[$, alors

$\forall x \in]0,1[\qquad \Delta(x) \geqslant 0$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,1[\quad x^x(1-x)^{(1-x)} \geqslant \frac{1}{2}}$

Pièce V. Colle de la semaine 7

Résoudre $\text{Arcsin}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)$

Solution

$0 < \frac{3}{4} < 1$

donc $0 < \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$ (Arctan strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$)

$0 < \frac{5}{12} < 1$

donc $0 < \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{4}$ (Arctan strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$)

Donc $0 < \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$

Soit $x \in]-1,1[$

(E) : $\text{Arcsin}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)$

$\Leftrightarrow \tan(\text{Arcsin}(x)) = \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)\right)$ (tan injective sur $]-\pi/2, \pi/2[$)

Or on sait que $0 < \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)$

$\Leftrightarrow 0 < \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)\right)$ (tan strictement croissant sur $[0, \pi/2[$)

Alors $0 < \tan(\text{Arcsin}(x))$

$\Leftrightarrow 0 < \text{Arcsin}(x)$ (Arctan strictement croissant sur $\mathbb{R}_+$)

$\Leftrightarrow 0 < x$ (sin strictement croissant sur $[0, \frac{\pi}{2}[$)

Donc $x \in]0,1[$

Soit $x \in]0,1[$

$(E) \Leftrightarrow \frac{\sin(\text{Arcsin}(x))}{\underbrace{\cos(\text{Arcsin}(x))}_{>0}} = \frac{3/4 + 5/12}{1 - \frac{3}{4} \times 5/12} = \frac{7}{6} \times \frac{16}{11} = \frac{56}{33}$ (formule d'addition de tan)

$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{56}{33}$

$\Leftrightarrow 33\underbrace{x}_{>0} - 56\sqrt{1-x^2} = 0$ $(\sqrt{1-x^2} \neq 0)$

$\Leftrightarrow 33^2x^2 - 56^2 + 56^2x^2 = 0$ (carré strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$)

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{56^2}{33^2+56^2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x}_{>0} = 56/65$

Donc $x = \frac{56}{65}$

Billy. 6 Khôlle de la semaine 7.

Exercice 6 : Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $th(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{th(x)}$ et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\sum_{k=0}^{n} 2^k th(2^k x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$

Solution : $\frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{th(x)}$

$$= \frac{2(e^{2x}+e^{-2x})}{e^{2x}-e^{-2x}} - \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$

$$= \frac{2(e^{2x}+e^{-2x})}{(e^{x}+e^{-x})(e^{x}-e^{-x})} - \frac{(e^{x}+e^{-x})^2}{(e^{x}-e^{-x})(e^{x}+e^{-x})}$$

$$= \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{(e^{x}+e^{-x})(e^{x}-e^{-x})}$$

Or : $th(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

$$= \frac{(e^{x}-e^{-x})^2}{(e^{x}+e^{-x})(e^{x}-e^{-x})} \quad (\forall x \in \mathbb{R}^* \; e^{x}-e^{-x} \neq 0)$$

$$= \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{(e^{x}+e^{-x})(e^{x}-e^{-x})}$$

Par transitivité, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $th(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{th(x)}$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \, th(2^k x) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\frac{2}{th(2^{k+1}x)} - \frac{1}{th(2^k x)} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{th(2^{k+1}x)} - \frac{2^k}{th(2^k x)} \quad \text{(somme téléscopique)}$$

$$= \frac{2^{n+1}}{th(2^{n+1}x)} - \frac{1}{th(x)}$$

Léon. N

Colle de la semaine n°7

Résoudre (E) : $\text{Arcsin}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)$

On a $\frac{3}{4} < 1$ et $\frac{5}{12} < 1$ donc par $\nearrow$ de Arctan, $\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$ et $\text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{4}$

On a $0 < \text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$

Ainsi, on résout pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ solution de (E) $\iff \tan(\text{Arcsin}(x)) = \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right)\right)$

$\nearrow$ tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\iff \tan(\text{Arcsin}(x)) = \dfrac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{12}} = \cancel{\frac{28}{9}}\ \frac{56}{33}$

addition tangente

$\iff \text{Arcsin}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{56}{33}\right)$

Arctan $\nearrow$

$\iff x = \sin\left(\text{Arctan}\left(\frac{56}{33}\right)\right)$

sin $\nearrow$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\iff \quad x = \cancel{\frac{\frac{28}{9}}{\sqrt{\left(\frac{28}{9}\right)^2+1}}} \quad \frac{\frac{56}{33}}{\sqrt{\left(\frac{56}{33}\right)^2+1}}$$

$$\iff \quad x = \frac{56}{65}$$

Donc

$$Sol_{(E)} = \left\{ \frac{56}{65} \right\}$$

SAINT-VANNE E. SEMAINE 7

> En étudiant une fonction, montrer que :
> $\forall x \in [0;1], \operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)$

Solution :

On se propose d'étudier la fonction suivante :

$$\Delta \left| \begin{array}{l} [0;1] \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1) \end{array} \right.$$

Δ est dérivable sur $[0;1]$ ssi $\forall x \in [0,1]$,

$$\begin{cases} \sqrt{x} \in]-1;1[\setminus 0 \\ 2x-1 \in]-1;1[\end{cases} \iff \begin{cases} x \in]0;1[\\ x \in]0;1[\end{cases}$$

Ainsi, Δ est dérivable sur l'intervalle $]0;1[$ et, $\forall x \in]0;1[$,

$$\Delta'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$$

$x \in]0;1[$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$$

$\sqrt{\cdot}$ multiplicative

$$= \frac{1}{\sqrt{4x(1-x)}} - \frac{1}{\sqrt{1-(4x^2+1-4x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} = 0$$

Ainsi, Δ' est nulle sur $]0;1[$, donc Δ est constante sur $]0;1[$, ie $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in]0;1[, \Delta(x) = k$.

Determinons k :

On spécifie à $x = \frac{1}{2} \in]0;1[$:

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arcsin}(0)$$

$$= \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arcsin}(0)$$

$$= \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arcsin}(\sin(0))$$

$\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \in]-\pi/2 ; \pi/2[^2$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

$$= 0.$$

Ainsi, $k = 0$ donc $\forall x \in]0;1[$, $\Delta(x) = 0$

ie $\text{Arcsin}(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arcsin}(2x-1) = 0$

ie $\text{Arcsin}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}(2x-1)$

Ainsi, $\forall x \in]0;1[$, l'égalité est vraie.

Il faut la prouver pour $x = 0$ et $x = 1$

On sait $\forall x \in [0;1]$ Δ est définie.

$x = 0$

$$\Delta(0) = \text{Arcsin}(0) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arcsin}(-1)$$

$$= \text{Arcsin}(\sin(0)) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arcsin}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$0 \in [-\pi/2 ; \pi/2]$
$\pi/2 \in [-\pi/2 ; \pi/2]$.

$$= \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0.$$

$x = 1$,

$$\Delta(1) = \text{Arcsin}(1) - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\text{Arcsin}(1) = 0$$

Ainsi, $\forall x \in [0;1]$, $\text{Arcsin}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}(2x-1)$

Léa N.

Colle de la Semaine 7

Énoncé :

1/ Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction

$$f : x \longmapsto 2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \mathrm{Arcsin}(2x-1)$$

2/ Simplifier $f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

Solution :

1/ Soit $f : x \longmapsto 2\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \mathrm{Arcsin}(2x-1)$

$$f \text{ existe} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{et } \frac{1-x}{x} \geq 0 \\ \text{et } 2x-1 \in [-1, 1] \end{cases}$$

• $\frac{1-x}{x} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x} - 1 \geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x} \geq 1$

$\underset{\text{inv. } \searrow \text{ sur } \mathbb{R}_{>0}}{\Rightarrow} \quad x \leq 1$

• $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$

$\underset{+1}{\Rightarrow} \quad 0 \leq 2x \leq 2$

$\underset{\times \frac{1}{2} > 0}{\Rightarrow} \quad 0 \leq x \leq 1$

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est définie sur : } \mathcal{D} =]0, 1]}$$

2/ $f : x \longmapsto 2\,\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \text{Arcsin}(2x-1)$

f est dérivable sur $]0, 1[$.

- $\dfrac{d}{dx}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = -\dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = -\dfrac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1-x}{2}}}$

- $\dfrac{d}{dx}\, 2\,\text{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) = -2 \times \dfrac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \times \dfrac{1}{1+\frac{1-x}{x}}$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = -\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

- $\dfrac{d}{dx}\,\text{Arcsin}(2x-1) = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$

Donc, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} + \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = 0$$

Donc, par caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle, f est constante sur $]0, 1]$.

Alors : $\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]0, 1] \quad f(x) = K$

Prenons : $x = 1$.

$$2\,\text{Arctan}(0) + \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{Donc : } \forall x \in]0, 1], \ f(x) = \frac{\pi}{2}}$$

Mehdi B Colle de la semaine 7

EXERCICE 13 — Soit $f : x \longmapsto \text{Arccos}\left(1-2x^2\right)$. Déterminer l'ensemble de définition, les variations, le signe de f et en donner une expression simplifiée.

Solution $f : x \mapsto \text{Arccos}(1-2x^2)$

Ensemble de définition

f existe $\iff 1-2x^2 \in [-1;1]$

- (I_1) : $1-2x^2 \geq -1$
$\iff x^2 \leq 1 \quad \left(\times\left(-\frac{1}{2}\right)<0\right)$

Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$

$(I_1) \iff |x| \leq 1$

$\text{Sol}_{(I_1)} = [-1;1]$

- (I_2) : $1-2x^2 \leq 1$
$\iff x^2 \geq 0$

$\text{Sol}_{(I_2)} = \mathbb{R}$

Ainsi $\text{Sol}_I = \text{Sol}_{(I_1)} \cap \text{Sol}_{(I_2)} = [-1,1]$.

En remarquant que f est paire, nous restreindrons l'étude à : $\boxed{D=[0,1]}$

<u>Variations</u> f est dérivable sur $]-1,1[$.

$$\forall x \in]-1,1[\quad f'(x) = -\frac{-4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}}$$

Ainsi $f'(x)$ sera du signe de x pour tout $x \in]-1,1[$.
Donc :

f est $\begin{cases} \text{strictement décroissante sur } [-1,0] \\ \text{strictement croissante sur } [0,1] \end{cases}$

<u>Expression simplifiée</u>

$$\forall x \in]-1,1[\quad f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

On reconnait la dérivée de Arcsin à une constante multiplicative près.

Ainsi : $\exists K \in \mathbb{R} \ \forall x \in [-1,1] \ f(x) = 2\,\mathrm{Arcsin}(x) + K$.

$x \leftarrow 0$: $f(0) = \mathrm{Arccos}(1) = 0$

$2\,\mathrm{Arcsin}(0) = 0$

Donc $K = 0$, d'où :

$\forall x \in [-1,1] \quad \boxed{f(x) = 2\,\mathrm{Arcsin}(x)}$

ALTINOK C. Colle de la semaine 7

énoncé

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $th(x) = \dfrac{2}{th(2x)} - \dfrac{1}{th(x)}$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\sum_{k=0}^{n} 2^k \, th(2^k x)$.

solution

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{th(x)} = \frac{2}{\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}} - \frac{1}{\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}} \quad \text{(definition de th)}$$

$$= \frac{2(e^{2x}+e^{-2x})}{e^{2x}-e^{-2x}} - \frac{e^{x}+e^{-x}}{\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}} \quad \left(\text{propriétés algébriques de exp}\right)$$

$$= \frac{2e^{2x}+2e^{-2x}-e^{2x}-e^{-2x}-2}{e^{2x}-e^{-2x}}$$

$$= \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{e^{2x}-e^{-2x}}$$

D'où $th(x) - \left(\dfrac{2}{th(2x)} - \dfrac{1}{th(x)}\right)$

$$= \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} - \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{e^{2x}-e^{-2x}}$$

$$= \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2-e^{2x}-e^{-2x}+2}{e^{2x}-e^{-2x}} = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{th(x) = \frac{2}{th(2x)} - \frac{1}{th(x)}}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \, th(2^k x) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(\frac{2}{th(2 \times 2^k x)} - \frac{1}{th(2^k x)} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{th(2^{k+1} x)} - \frac{2^k}{th(2^k x)}$$

(Sommes télescopiques) $$= \frac{2^{n+1}}{th(2^{n+1} x)} - \frac{1}{th(x)}$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \, th(2^k x) = \frac{2^{n+1}}{th(2^{n+1} x)} - \frac{1}{th(x)}$$

Timothée. F

Semaine 5

Montrer que :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

On pose $\Delta \left| \begin{array}{ccl}]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arcsin(x) - \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \end{array} \right.$

que l'on admet dérivable sur $]-1;1[$.

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \Delta'(x) = \frac{d}{dx}\arcsin(x) - \frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Or, on sait que $\dfrac{d}{dx}\arcsin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Calculons donc $\dfrac{d}{dx}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$:

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)(1-x^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{d}{dx}\arcsin(x)$$

donc $\Delta'(x) = 0$.

Donc Δ est constante, c'est-à-dire :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1;1[, \quad \Delta(x) = k$$
$$\Leftrightarrow \arcsin(x) - \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = k$$

or, pour $x=0$ on obtient $\Delta(x) = 0$
donc $k=0$.

Ainsi, $\forall x \in]-1;1[, \quad \arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

Louis B. Khôlle de la semaine 5

On pose a et b deux réels tels que $0<a<b$.
Etudier $f : x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ ($\mathcal{D}_f$ et limites)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}$ tq $0<a<b$.
On cherche x tq $1+ax$ et $1+bx > 0$

$$1+bx > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad bx > -1$$
$$\Leftrightarrow \quad x > -\frac{1}{b}$$

Comme $0<a<b$, $-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$ donc $x > -\frac{1}{a}$

De plus, f existe $\Leftrightarrow \ln(1+bx) \neq 0$
$\Leftrightarrow 1+bx \neq 1$
$\Leftrightarrow bx \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq 0$

Donc $\mathcal{D}_f =]-\frac{1}{b}, 0[\cup]0, +\infty[$

Limites :

en $-\frac{1}{b}$: $\ln(1+ax) \xrightarrow[x \to -\frac{1}{b}]{} 1-\frac{a}{b} \in \mathbb{R}_+^*$

$\ln(1+bx) \xrightarrow[x \to -\frac{1}{b}]{} -\infty$

donc $f \xrightarrow[x \to -\frac{1}{b}]{} 0^-$

en 0 : on sait que $\frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$

donc $f = \frac{\ln(1+ax)}{ax} \times \frac{bx}{\ln(1+bx)} \times \frac{a\cancel{x}}{b\cancel{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{a}{b}$

en $+\infty$: Forme indéterminée.

on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{a}{ax+1}}{\frac{b}{bx+1}} = \frac{a(bx+1)}{b(ax+1)}$

$= \frac{a}{b} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{bx+1}{ax+1}$

$= \frac{a}{b} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(b+\frac{1}{x})}{x(a+\frac{1}{x})}$

$= \frac{a}{b} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{b+\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

Or $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc $\frac{b+\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{b}{a}$

Donc $\frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = 1$

Semaine de colle n°7.

Mathéo. N

Exercice : Donner les variations de la fonction $\frac{\ln x}{x}$ sur son intervalle de définition (à préciser). Faire de même pour son inverse.

<u>Solution</u> : Soit $f : x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$

f est définie là où $x > 0$ ($\ln$ définie sur $\mathbb{R}_{>0}$)

Ainsi : $\mathcal{D}f = \mathbb{R}_+$

$\ln$ et x sont dérivables sur $\mathcal{D}f$ et $x \neq 0$ $\forall x \in \mathcal{D}f$.

Ainsi, f est dérivables sur $\mathcal{D}f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Or : $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\ln(1) = 0$

mais aussi, $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De même
Soit $x \in \mathcal{D}f$
$$\begin{cases} \text{si } x < e & : \ln(x) < 1 \\ \text{si } x = e & : \ln(x) = 1 \\ \text{si } x > e & : \ln(x) > 1 \end{cases}$$

x	0		e		$+\infty$
$1 - \ln(x)$		$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

$f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1}$ [Prop algé. de log]

$\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+$ $\underline{\underline{cc}}$

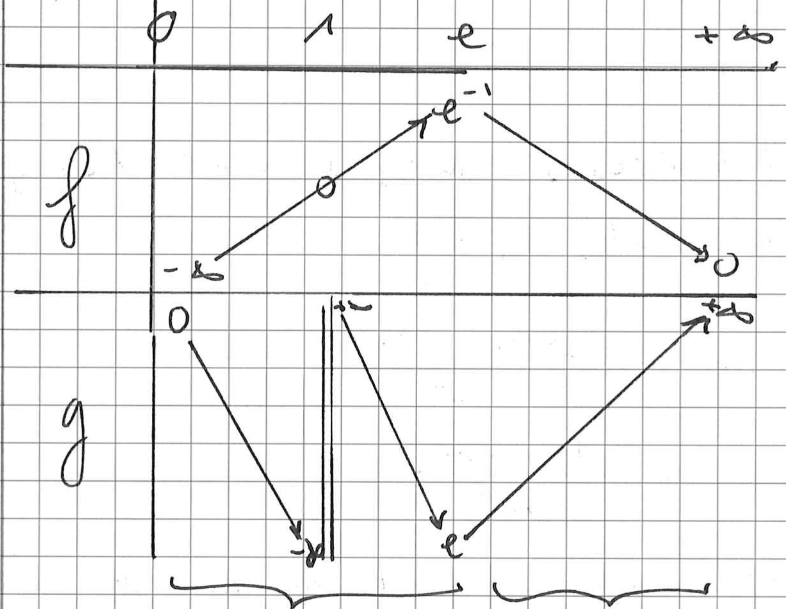
$\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty$

Etudions : $g : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$

g est définie là où $x \neq 0$ et $\ln(x) \neq 0$, i.e. $x \neq 1$

Ainsi : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

Nous pouvons alors reprendre le tableau de variation de f, son inverse et en déduire celui de g.



strictement décroissante car f est strictement croissante et que g est l'inverse de f.

"analogue"

- $\dfrac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$
- $g(e) = \dfrac{e}{\ln(e)} = e$
- $\dfrac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ cc
- $\dfrac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 1^-]{} -\infty$
- $\left.\begin{array}{l} \ln(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} 0^+ \\ \dfrac{x}{X} \xrightarrow[X \to 0^+]{} +\infty \end{array}\right\}$ composée de limites $\dfrac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 1^+]{} +\infty$

Robin G.   Colle de la semaine 7

Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{3x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x}$$

$$\forall x > 0 \quad \frac{\ln(1+2x)}{3x} = \frac{\ln\left(x\left(\frac{1}{x}+2\right)\right)}{3x} = \frac{\ln(x)}{3x} + \frac{\ln\left(\frac{1}{x}+2\right)}{3x}$$

$\frac{\ln(x)}{3x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée

$$\left.\begin{array}{l} \ln\left(\frac{1}{x}+2\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln(2) \\ 3x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\ln\left(\frac{1}{x}+2\right)}{3x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Donc par somme de limites $\frac{\ln(1+2x)}{3x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$$\forall x \neq 0 \quad \frac{\ln(1+2x)}{3x} = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{3x} + \frac{\ln\left(\frac{3}{2}+3x\right)}{3x} = \frac{1}{3x}\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}+3x\right)\right)$$

$\frac{3}{2} + 3x \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{3}{2}$ donc $\ln\left(\frac{3}{2}+3x\right) \xrightarrow[x \to 0]{} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$\frac{1}{3x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

Par produit de limites, $\frac{\ln(1+2x)}{3x} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$

Ahmed

Amine

Semaine 7

Énoncé :

Résoudre : (E) $9^x + 3^x - 12 = 0$

Solution Soit $x \in \mathbb{R}$.

$3^{2x} + 3^x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x\ln(3)} + e^{x\ln(3)} - 12 = 0$

Soit $X = 3^x$, alors :

(E) $\Leftrightarrow X^2 + X - 12 = 0$

On trouve $X = 3$ et $X = -4$

alors $3^x = 3$ et $3^x = -4$

$x = 1$ impossible car $e^{x\ln(3)} > 0$

alors $S_E = \{1\}$

Alexandre .M. Colle semaine 7.

Exercice : Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la dérivée n-ième de la fonction logarithme népérien. Déterminer aussi la dérivée de la fonction $x \mapsto x^x$ puis étudier ses variations. S'il reste du temps, faire de même avec $x \mapsto x^{x^x}$.

Conjecture :

$(n=1)$ $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ $\ln^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$(n=2)$ $\ln^{(1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ $\ln^{(2)}(x) = -x^{-2}$

$(n=3)$ $\ln^{(2)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ $\ln^{(3)}(x) = 2x^{-3}$

$(n=4)$ $\ln^{(3)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$ $\ln^{(4)}(x) = -6x^{-4}$

- Définition du prédicat :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n) = $ " $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$ $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \times (n-1)! \times x^{-n}$ "

On raisonne par récurrence simple :

- Initialisation au rang $n = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$ $\ln^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} = (-1)^{1+1} \times (1-1)! \times x^{-1}$ ✓

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $P(n)$ est vraie. Montrons $P(n+1)$ vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}_{>0}$ $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \times (n-1)!\, x^{-n}$ [H.R]

donc, en dérivant de part et d'autre de l'égalité :

$$\ln^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} (n-1)! \times (-n)\, x^{-n-1} \times 1$$

$$\ln^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2} \times (n)! \times x^{-(n+1)}$$

□

Conclusion : d'après l'initialisation au rang $n=1$, l'hérédité et l'axiom de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2e partie :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$: $x^x = e^{\ln(x^x)}$
$= e^{x \ln(x)}$

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{x\ln(x)} \end{array} \right.$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$f'(x) = \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) e^{x\ln(x)}$$
$$= (\ln(x)+1)\, \underbrace{e^{x\ln(x)}}_{>0}$$

On résout $\ln(x) + 1 > 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_{>0}$

$\Leftrightarrow \ln(x) > -1$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$ [exp $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et ln sa bijection réciproque]

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ 1	$\searrow$	$e^{-e^{-1}}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = e^{\frac{1}{e}\ln(e^{-1})} = e^{-\frac{1}{e}} = e^{-e^{-1}}$$

[c, c].

$\left.\begin{array}{l} x\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \text{et } e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right\}$ par composée de limites $e^{x\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\left.\begin{array}{l} x\ln(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0 \\ \text{et } e^x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1 \end{array}\right\}$ $e^{x\ln(x)} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 1$

Amaé. D

Colle semaine n° 7

Exercice : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $C_n = \sum_{k=0}^{n} ch(a+kb)$

Solution : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} ch(a+kb)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{a+kb} + e^{-a-kb}}{2} \quad \text{(définition de ch)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{a+kb} + \sum_{k=0}^{n} e^{-a-bk}\right) \quad \text{(linéarisation)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{a}e^{kb} + \sum_{k=0}^{n} e^{-a}e^{-bk}\right) \quad \text{(propriété algébrique exponentielle)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{a}\sum_{k=0}^{n} e^{bk} + e^{-a}\sum_{k=0}^{n} e^{-bk}\right) \quad (e^{a} \text{ et } e^{-a} \text{ ne dépendent pas de } k)$$

Si $b \neq 0$:

$$C_n = \frac{1}{2}\left(e^{a} \times \frac{1-e^{b(n+1)}}{1-e^{b}} + e^{-a}\frac{1-e^{-b(n+1)}}{1-e^{-b}}\right) \quad \text{(somme de termes en progression géométrique)}$$

Si $b = 0$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} ch(a)$$

$$= (n+1)ch(a)$$

Semaine de colle n° 7

Louis D.

Exercice 2. *On cherche à résoudre l'équation d'inconnue x réelle (E) suivante :*

$$\mathrm{Arcsin}(\sqrt{15}x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(x).$$

1. *Déterminer l'ensemble D des valeurs du réel x pour lesquelles tous les termes de (E) sont correctement définis.*
2. *Soit $x \in D$.*
   (a) *Montrer que si $x < 0$, alors x n'est pas solution de (E).*
   (b) *Déterminer l'ensemble des solutions de (E).*

Solution 1) Soit $x \in \mathbb{R}$ $\Big\{$ $\mathrm{Arcsin} \begin{vmatrix} [-1, 1] \to [-\pi/2 ; \pi/2] \\ y \mapsto \text{l'unique } x \in [-\pi/2 ; \pi/2] \text{ tel que } \sin(x) = y \end{vmatrix}$

$\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(x)$ est défini si $x \in [-1, 1]$

$\mathrm{Arcsin}(\sqrt{15}\,x)$ est défini si $\sqrt{15}\,x \in [-1, 1]$ i.e. $|\sqrt{15}\,x| \leq 1$,

or : $|\sqrt{15}\,x| \leq 1$

$\iff \sqrt{15}\,|x| \leq 1$ $\quad (\sqrt{15} \geq 0)$

$\iff |x| \leq 1/\sqrt{15}$ $\quad (\sqrt{15} > 0)$

$\iff x \in [-1/\sqrt{15} ; 1/\sqrt{15}]$

Alors $\mathcal{D} = [-1, 1] \cap [-1/\sqrt{15} ; 1/\sqrt{15}]$

Donc $\boxed{\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{\sqrt{15}} ; \frac{1}{\sqrt{15}}\right]}$

2) a) Soit $x \in \mathcal{D} \setminus \mathbb{R}^+$ i.e. $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{15}} ; 0\right[$

$\mathrm{Arcsin}(\overbrace{\sqrt{15}\,x}^{<0}) < 0$

$\frac{\pi}{2} - \overbrace{\mathrm{Arcsin}(x)}^{\in [-\pi/2 ; 0[} \geq 0$

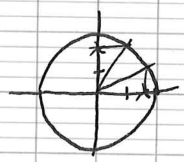
$\Big\}$ $\neq$ quelque soit x

$\boxed{\text{Si } x < 0, \text{ il n'est pas solution de } (E)}$

2) b) Soit $x \in D \setminus \mathbb{R}^{-*}$ ie $x \in \left[0 ; \frac{1}{\sqrt{15}}\right]$

$$\underbrace{\text{Arcsin}(\sqrt{15}\,x)}_{\in [0, \pi/2]} = \underbrace{\frac{\pi}{2} - \overbrace{\text{Arcsin}(x)}^{\in [0, \pi/2]}}_{\in [0, \pi/2]}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{15}\,x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)\right) \qquad \left(\sin_{|[-\pi/2 ; \pi/2]}^{|[-1,1]} \text{ injective}\right)$$



$$\Leftrightarrow \sqrt{15}\,x = \underbrace{\cos\left(\overbrace{\text{Arcsin}(x)}^{\in [0, \pi/2]}\right)}_{\geq 0}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{15}\,x = \sqrt{1 - \sin(\text{Arcsin}(x))}$$

$$\Leftrightarrow 15x^2 = 1 - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}^+)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \qquad (x \in \mathbb{R}^+)$$

Vérifions que $1/4 \in D$

$$9 < 15 < 16$$

$$\Leftrightarrow 3 < \sqrt{15} < 4 \qquad (\sqrt{\cdot} \nearrow\nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_{>0})$$

$$\Leftrightarrow 1/3 > 1/\sqrt{15} > 1/4 > -1/\sqrt{15} \qquad (\text{inverse } \searrow\searrow \text{ sur } \mathbb{R}_{>0})$$

✓

Ainsi $\boxed{Sol_{(E)} = \left\{\frac{1}{4}\right\}}$

MANGIACOMONI
Amélien

Colle semaine 7

Exercice 1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = e^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$:

$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

1. Montrer que l'équation $2\,\mathrm{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note a cette solution.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x)^2 + \mathrm{sh}(x) \geqslant 0$$
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que
$$\forall x \in]0;1[\,,\ 1 + x \leqslant e^{\mathrm{sh}(x)} \leqslant \frac{1}{1-x}$$
5. En déduire que :
$$\forall n \geqslant 2,\ \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \geqslant S_n \geqslant -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right).$$
6. Déterminer alors la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

1) $2\,\mathrm{sh}(x) + 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car combinaison linéaire de exp.

On a $\dfrac{d(2\,\mathrm{sh}(x)+1)}{dx} = 2\,\mathrm{ch}(x) \geq 2 > 0$ car $\mathrm{ch}(x) \geq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

donc $2\,\mathrm{sh}(x) + 1 \nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

$x \to -\infty$ $2\,\mathrm{sh}(x) + 1 \to -\infty$ et
$x \to +\infty$, $2\,\mathrm{sh}(x) + 1 \to +\infty$

Selon le théorème de la bijection $2\,\mathrm{sh}(x)+1$ est bijective sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On conclut que sur $\mathbb{R}$ $2\,\mathrm{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique sol.

2) Lemme ; $\forall x \in \mathbb{R}$ $1 + x^2 \geq x$
Si $x \in \mathbb{R}_-$; $1 + x^2 > 0 \geq x$
Si $x \in \mathbb{R}_+$; $(x-1)^2 \geq 0$ ie $1+x^2 \geq 2x \geq x$.

Donc ; pour $x \leftarrow -\mathrm{sh}(x)$ on a ;

$$1+\mathrm{sh}^2(x) \geq -\mathrm{sh}(x)$$

donc $$\underbrace{1+\mathrm{sh}^2(x)}_{\mathrm{ch}^2(x)} + \mathrm{sh}(x) \geq 0$$

3) On conjecture que $e^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1 \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et ≤ 0 sur $\mathbb{R}^-$

$$\frac{d\left(e^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1\right)}{dx} = \underbrace{\mathrm{ch}(x)\, e^{\mathrm{sh}(x)}}_{f'(x)} - 1$$

$$\frac{df'(x)}{dx} = \mathrm{sh}(x)\, e^{\mathrm{sh}(x)} + \mathrm{ch}^2(x)\, e^{\mathrm{sh}(x)}$$

$$= \underbrace{\left(\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}(x)\right)}_{\geq 0\ (Q2)} \underbrace{e^{\mathrm{sh}(x)}}_{>0}$$

Donc $f'(x) \nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

or $f'(0) = 0$ donc ;

x		0	
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$
signe $f'(x)$	$-$	0	$+$
variations $f'(x)$	$\nearrow$		
$f''(x)$		$+$	

Donc $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\searrow$ sur $\mathbb{R}_-$.

4) $e^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1$ vaut 0 pour $x = 0$ et est croissante sur $\mathbb{R}_+$ en particulier $]0;1[$

donc ;

$$\forall x \in \,]0;1[\quad 1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)}.$$

MANGIACOMINI
Amélien

Colle semaine 7

$$\frac{d^2\left(e^{-sh(x)}\right)}{dx} = ch^2(x)\, e^{-sh(x)} - sh(x)\, e^{-sh(x)}$$

$$= \underbrace{e^{-sh(x)}}_{\geq 0}\left(ch^2(x) - sh(x)\right)$$

①

et selon le lemme Q2 on a ;

$$1 + sh^2(x) \geq sh(x)$$

$$\text{ie} \quad \underbrace{1 + sh^2(x)}_{ch^2(x)} - sh(x) \geq 0$$

donc ① ≥ 0

$e^{-sh(x)}$ est convexe, elle majore toutes ses tangentes en particulier en $x = 0$ où on a

$$\underbrace{e^{-sh(x)}}_{\geq 0} \geq \underbrace{-ch(0)\, e^{-sh(0)}(x-0) + e^{-sh(0)}}_{1-x \;>0 \text{ pour } x\in]0;1[}$$

donc $e^{sh(x)} \leq \frac{1}{1-x}$ $\left(x \mapsto \frac{1}{x} \searrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*\right)$

$\forall x \in]0;1[$.

5) Selon Q4 pour $x = \frac{1}{k} \in]0;1[$ car $k \in [\![2;mp]\!]$

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq sh\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \quad (\ln \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$

Ainsi, $\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \geq y_n \geq -\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$

$$\ln\Big(\underbrace{\prod_{k=n}^{np} \frac{k+1}{k}}_{\frac{np+1}{n}}\Big) \geq y_n \geq -\ln\Big(\underbrace{\prod_{k=n}^{np} \frac{k-1}{k}}_{\frac{n-1}{np}}\Big)$$

b) $\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \geq y_n \geq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$ (1) (2)

$n \to +\infty$

(1) $\frac{\cancel{n}\left(p+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}} \to p$

(2) $\frac{\cancel{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\,p} \to \frac{1}{p}$

ie $n \to +\infty$ $\ln(p) \geq y_n \geq -\ln\left(\frac{1}{p}\right) = \ln(p)$

Donc selon le théorème d'encadrement quand $n \to +\infty$ $y_n \to \ln(p)$.

Antoine B   colle de la semaine 7

Exercice 3 : Soit a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. On considère la fonction définie sur un ensemble D par $f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

1) Déterminer le domaine de définition de *f*.

2) Déterminer une fonction *g* telle que pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)(\ln(1+bx))^2}$

3) Étudier les variations de *g* et en déduire le signe de *g* puis les variations de *f*.

Solution :

1/ f existe $\Leftrightarrow \begin{cases} (1+ax) > 0 \\ \text{et } (1+bx) > 0 \\ \text{et } (1+bx) \neq 1 \end{cases}$.

- $x > -\dfrac{1}{a}$ (car $a > 0$)
- $x > -\dfrac{1}{b}$ (car $b > 0$)

$\hookrightarrow$ i.e. $x > \dfrac{-1}{b} > -\dfrac{1}{a}$ (car $b > a$ soit : $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$)

- $x \neq 0$

donc $D = \left]-\dfrac{1}{b} ; 0\right[\cup \left]0 ; +\infty\right[$.

2/ $x \in D$ f est dérivable sur D. et $f'(x) = \dfrac{\dfrac{a}{1+ax} \times \ln(1+bx) - \dfrac{\ln(ax+1)b}{1+bx}}{\ln^2(1+bx)}$

i.e. $f'(x) = \dfrac{\ln(1+bx)a}{(1+ax)\ln^2(1+bx)} - \dfrac{\ln(ax+1)b}{(1+bx)\ln^2(1+bx)}$

$$f'(x) = \frac{a\ln(1+bx)(1+bx) - b\ln(1+ax)(1+ax)}{(1+ax)(1+bx)\ln^2(1+bx)}$$

or $$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)\ln^2(1+bx)}$$ (comme $x > -\frac{1}{b} > -1$, $f'(x)$ du signe de $g(x)$)

la fonction $g \left| \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a\ln(1+bx)(1+bx) - b\ln(1+ax)(1+ax) \end{array} \right.$

convient.

3/ g est dérivable sur D.

et $g'(x) = \frac{ab}{1+bx}(1+bx) + a\ln(1+bx)\times b - \frac{ba}{1+ax}\times(1+ax) - b\ln(1+ax)a$

$$= \cancel{ab} + ab\ln(1+bx) - \cancel{ba} - ba\ln(1+ax)$$

$$= \underbrace{ab}_{>0}\left(\ln(1+bx) - \ln(1+ax)\right) \begin{cases} >0 \text{ pour } x>0 \\ <0 \text{ pour } x<0 \\ =0 \text{ pour } x=0 \end{cases}$$

$$b > a$$
$$\Leftrightarrow bx > ax \quad (\text{pour } x>0)$$
$$\Leftrightarrow bx+1 > ax+1$$
$$\ln(\nearrow) \Leftrightarrow \ln(bx+1) > \ln(ax+1)$$

x	$-\frac{1}{b}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$g(x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. On considère la fonction définie sur un ensemble D par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$$

① Déterminer le domaine de définition de D

② Déterminer une fonction g telle que pour tout $x \in D$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)(\ln^2(1+bx))}$$

③ Etudiers les variations de g et en déduire celle de f

Solution :

① pour que f soit bien définie, il faut

$$\begin{cases} 1+ax > 0 \\ \text{et} \\ 1+bx > 0 \\ \text{et} \\ \ln(1+bx) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 > -ax \\ \text{et} \\ 1 > -bx \\ \text{et} \\ 1+bx \neq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{a} > -x & \times \frac{1}{a} > 0 \\ \text{et} \\ \frac{1}{b} > -x & \times \frac{1}{b} > 0 \\ \text{et} \\ bx \neq 0 & -1 \end{cases} \Bigg) \; -x < \underbrace{\frac{1}{b} < \frac{1}{a}}_{\text{car } b > a \text{ et inv } \searrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{1}{b} < x & \times(-1) < 0 \\ \text{et} \\ x \neq 0 & \mathbb{R} \text{ intègre et } b > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in \left]-\frac{1}{b}, +\infty\right[\\ \text{et} \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases} \iff x \in \left]-\frac{1}{b}, +\infty\right[\cap \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\iff x \in \left]-\frac{1}{b}, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$$

donc $\boxed{D = \left]-\frac{1}{b}, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[}$

② $f(x) = \dfrac{\overbrace{\ln(1+ax)}^{u(x)}}{\underbrace{\ln(1+bx)}_{v(x)}}$ $\qquad$ f dérivable sur D

$u'(x) = \dfrac{a}{1+ax} \qquad v'(x) = \dfrac{b}{1+bx}$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{a\ln(1+bx)}{1+ax} - \dfrac{b\ln(1+ax)}{1+bx}}{\ln^2(1+bx)}$$

donc $f'(x) = \dfrac{\overbrace{a\ln(1+bx) + abx\ln(1+bx) - b\ln(1+ax) - abx\ln(1+ax)}^{g(x)}}{(\ln^2(1+bx))(1+ax)(1+bx)}$

$$g(x) = abx(\ln(1+bx) - \ln(1+ax)) + a\ln(1+bx) - b\ln(1+ax)$$
$$= abx\ln\left(\frac{1+bx}{1+ax}\right) + a\ln(1+bx) - b\ln(1+ax)$$

$$\boxed{g(x) = a(\ln(1+bx))(1+bx) - b(\ln(1+ax))(1+ax)}$$

③ comme f est dérivable sur D
g est définie sur D et dérivable sur D

$$g'(x) = a\left(b\ln(1+bx) + \frac{b(1+bx)}{1+bx}\right) - b\left(a\ln(1+ax) + \frac{a(1+ax)}{1+ax}\right)$$
$$g'(x) = ab\left(\ln(1+bx) + 1 - \ln(1+ax) - 1\right)$$
$$g'(x) = \underbrace{ab}_{>0}\ln\left(\frac{1+bx}{1+ax}\right)$$

donc $g'(x)$ dépend du signe de $\ln\left(\frac{1+bx}{1+ax}\right)$

on résout $\ln(1+bx) - \ln(1+ax) > 0$

$\Leftrightarrow \ln(1+bx) > \ln(1+ax)$

$\Leftrightarrow 1+bx > 1+ax$ (ln inj, exp inj)

$\Leftrightarrow bx - ax > 0$

$\Leftrightarrow x(\overbrace{b-a}^{>0}) > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

x	$-\frac{1}{b}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
g	$\searrow$		0		$\nearrow$

Hugo SCHÜTZ — Colle de la semaine 8

Soit f une fonction bornée et g une fonction périodique. Montrer que la composée de f et g est bornée. Discuter également du caractère pair / impair de la somme / produit / composée des 2 fonctions paires / impaires / l'une paire et l'autre impaire.

I un intervalle de $\mathbb{R}$.

• Soit $f \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$

$\cancel{\exists M \in}$ $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in I \quad m \leq f(x) \leq M$

• Soit g une fonction périodique de période $T > 0$:

$$\forall x \in D_g \quad \left| \begin{array}{ll} \forall x \in D_g & x + T \in D_g \\ \forall x \in D_g & g(x) = g(x+T). \end{array} \right.$$

Soit $D_g \subset I$, alors si $g(x) \in D_g$, $g(x) \in I$.

. Comme $m \leq f(x) \leq M$

et $x \in I$ et $g(x) \in I$, alors

$$m \leq f(g(x)) \leq M.$$

Soit k_1 une fonction tel que :

$$k_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) + g(x) \end{array} \right.$$

Alors $k_1(-x) = f(-x) + g(-x)$
$= -(f(x) + g(x)) = -k_1(x)$.

La somme de f et de g donne une fonction impaire k_1

Soit k_2 une fonction tel que

$$k_2 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)\,g(x). \end{array} \right.$$

Alors $k_2(-x) = (-f(x))(-g(x))$
$= f(x)\,g(x) = k_2(x)$

Le produit de f et g donne une fonction paire

Soit k_3 une fonction tq :

$$k_3 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(g(x)) \end{array} \right.$$

Alors $k_3(-x) = f(-g(x))$
$= -f(g(x)) = -k_3(x)$.

Donc la composée donne une fonction impaire.

⚠ On a étudié ici pour les fonctions f et g impaires, pour les cas où elles sont paires, l'une impaire et l'autre paire, c'est analogue

Jules R. — Colle de la semaine 7.

Exercice : Étudier la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$

Solution :

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$

Pour que cette fonction soit définie, il suffit que :

$$\sin(x) \neq 0$$

$$\sin(x) = 0$$

$\iff$ (cas d'égalité des sinus) $\begin{cases} x = 0\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x = \pi\,[2\pi] \end{cases}$

Par imparité de la fonction sinus, on peut donc réduire notre domaine d'étude à $D_f =]0\,;\pi[$

On calcule une dérivée de la fonction :

$$f'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	↘	‖	↗	

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{1}{\sin(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)} = 1$$

Hugo D

Colle de la semaine 8

Soit $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

1. Déterminer le domaine de définition et la parité de f.
2. Préciser les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{3})$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.
3. Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et préciser sa dérivée.
4. Pour $x > 1$, donner une expression de $f(x)$ en fonction de arctan.
5. Donner de même une expression de $f(x)$ pour $x \in [0,1[$.
6. Représenter f.

<u>Solution</u> 1) Soit $x \in \mathbb{R}$, f est bien définie si :

- $1+x^2 \neq 0$ (Vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$)
- $-1 \leq \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$$

$$\iff |2x| \leq 1+x^2 \quad (1+x^2 > 0)$$

<u>Si $x < 0$</u> $\quad |2x| \leq 1+x^2 \iff 1+x^2+2x \geq 0$

$$\iff (x+1)^2 \geq 0$$

<u>Si $x \geq 0$</u> $\quad |2x| \leq 1+x^2 \iff 1+x^2-2x \geq 0$

$$\iff (x-1)^2 \geq 0$$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}$

<u>Imparité</u> Soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0

$$f(-x) = \text{Arcsin}\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) = -\text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \quad \text{(Imparité de Arcsin)}$$

$$= -f(x)$$

2) $f(0) = 0 \quad f(1) = \dfrac{\pi}{2} \quad f(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3} \qquad \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc par continuité $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} f(0) = 0$

3) Arcsin dérivable sur $]-1,1[$. Trouvons les valeurs de x pour lesquelles

Soit $x \in \mathbb{R}$

$\frac{2x}{1+x^2} = 1$ et -1

$$\frac{2x}{1+x^2} = 1 \iff 2x = 1+x^2$$
$$\iff (x-1)^2 = 0$$
$$\iff x = 1 \quad (\mathbb{R} \text{ est intègre})$$

Et $\frac{2x}{1+x^2} = 1 \iff 2x = -1-x^2$
$$\iff (x+1)^2 = 0$$
$$\iff x = -1 \quad (\mathbb{R} \text{ est intègre})$$

Donc f dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$
et donc aussi sur $]1,+\infty[$

Soit $x \in]1,+\infty[$ $\quad f'(x) = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}$

$$= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{-2(x^2-1)}{(1+x^2)^2 \frac{|1-x^2|}{(1+x^2)}}$$

or $1-x^2 < 0$ donc $|1-x^2| = x^2-1$

$$= \frac{-2}{(1+x^2)} = -2\,\mathrm{Arctan}'(x)$$

4) Soit $x > 1$ $\quad f'(x) = -2\,\mathrm{Arctan}'(x)$ On en déduit qu'il existe un $k \in \mathbb{R}$ tel que
$$f(x) = -2\,\mathrm{Arctan}(x) + k$$

Or $-2\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{-2\pi}{3}$ et $f(\sqrt{3}) - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \pi$ Donc $k = \pi$
Et pour tout $x > 1$ $\quad f(x) = -2\,\mathrm{Arctan}(x) + \pi$

5) Si $x \in [0,1[$ Alors $|1-x^2| = 1-x^2$ et $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} = 2\,\mathrm{Arctan}'(x)$

Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}(x) + k$

$2\,\mathrm{Arctan}(0) = 0 = f(0)$ On en déduit que $k = 0$ et que pour tout $x \in [0,1[$,
$$f(x) = 2\,\mathrm{Arctan}(x)$$

Léon S Enoncé Colle de la semaine 5

résoudre $ch(x) = 2$

Solution

Soit $x \in \mathbb{R}$

$ch(x) = 2$

$\Leftrightarrow e^{x} + e^{-x} = 4$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^{x} + 1 = 0$

$\overset{\times}{\div} e^{x}$

$\Leftrightarrow (e^{x} - 2)^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (e^{x} - 2 + \sqrt{3})(e^{x} - 2 - \sqrt{3}) = 0$

$\mathbb{R}$ est intègre

$\Leftrightarrow e^{x} = 2 - \sqrt{3}$ ou $e^{x} = 2 + \sqrt{3}$

: $4 > 3$ donc, par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$ $2 > \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \ln(2 - \sqrt{3})$ ou $x = \ln(2 + \sqrt{3})$

ANDRIOLO Elian

Semaine 5

Exercice 1

Pour $x > 0$ on pose :

$$f(x) = 2x + 3\frac{\ln(x)}{x^2}.$$

1. Étudier la fonction $g : x \mapsto 2x^3 - 6\ln(x) + 3$ et en déduire son signe.
2. Préciser les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et $\mathscr{D}$ celle de la demi-droite d'équation $y = 2x$ avec $x > 0$. Représenter $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ (on précisera les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.)

1. $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in \mathcal{D}_g$ et g dérivable sur $\mathcal{D}_g$

$$g'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x}$$

$$= 6\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 6\left(\frac{x^3 - 1}{x}\right)$$

Comme $x \in \mathbb{R}_+^*$, le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $x^3 - 1$

$$x^3 - 1 \geqslant 0 \iff x^3 \geqslant 1$$
$$\iff x \geqslant 1$$

car fonction cube ↗

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

$g(1) = 5$

$$2x^3 - 6\ln(x) + 3 \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

$2x^3 \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

$-6\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

$$2x^3\left(1 - 3\frac{\ln(x)}{x^3} + \frac{3}{2x^3}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

$2x^3 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

CC $\frac{\ln(x)}{x^3} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$\frac{3}{2x^3} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

2. $$2x + 3\frac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$$

$2x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

CC $\frac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$

$$2x + 3\frac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

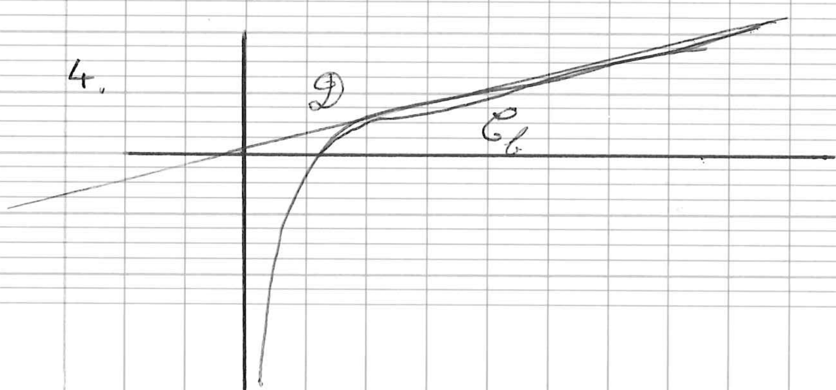
$2x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$\frac{\ln(x)}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

3.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

4.



Maximilien. T. Colle de la Semaine 5

Exercice 2 : On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\arctan(\sqrt{\frac{1-x}{x}}) + \arcsin(2x-1)$.

a) Déterminer D_f et $D_{f'}$.
b) Calculer f'.
c) En déduire une simplification de f.

Solution :

a) Nous savons que arctan est définie sur $\mathbb{R}$, que $\sqrt{\ }$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, inverse sur $\mathbb{R}^*$ et arcsin sur $[-1,1]$.

Nous déterminons dans un premier temps les valeurs de x pour lesquelles $\frac{1-x}{x}$ est supérieur à 0 et bien définie

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1-x}{x}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Nous remarquons ainsi que $\arctan(\sqrt{\frac{1-x}{x}})$ est définie sur $]0,1]$

$-1 \leq 2x-1 \leq 1 \iff 0 \leq x \leq 1$ ainsi $\arcsin(2x-1)$ est définie sur $[0,1]$

$Df =]0,1] \cap [0,1] = \boxed{]0,1]}$

De manière analogue en excluant les cas $\frac{1-x}{x} = 0$ et $2x-1 = 1$ et $2x-1 = -1$ nous avons

$Df' =]0,1[$

b) $\forall x \in]0,1[$

$$f'(x) = 2 \times \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) \times \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} + \frac{d}{dx}(2x-1) \times \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$$

$$= \frac{-1}{x\sqrt{\frac{1-x}{x}}} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x-1}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} = \boxed{0}$$

Ainsi f est constante sur $]0,1[$ (~~par continuité~~)

$f(1) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$

Ainsi $\boxed{f \left| \begin{array}{l} D_f \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right.}$ (Nous pouvons prolonger en 1 car la fonction y est définie)

Uta Bayen
de Neyer
MP2I

Rapport de Colle, semaine 7

Déterminer le domaine de defition puis simplifier l'expression

$$\mathrm{Arccos}(\mathrm{th}(x)) + 2\,\mathrm{Arctan}(e^x)$$

Soit $f : x \mapsto \mathrm{Arccos}(\mathrm{th}(x)) + 2\,\mathrm{Arctan}(e^x)$

• Déterminer le domaine de définition :

- $\mathrm{Arccos} \mid [-1,1] \to [0,\pi]$ et $]-1,1[\subset [-1,1]$
- $\mathrm{th} \mid \mathbb{R} \to]-1,1[$

- $\mathrm{Arctan} \mid \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$
- $\exp \mid \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

• On étudie la dérivée de f.

- Arccos est dérivable en $]-1,1[$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ \mathrm{th}(x) \in]-1,1[$
Donc f est dérivable dans $\mathbb{R}$

- $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (1 - \mathrm{th}^2(x)) \frac{-1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}} + 2e^x \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$= -\sqrt{1 - \text{th}^2(x)} + \frac{2e^x}{1+e^{2x}} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{\text{ch}^2(x)}} + \frac{2}{e^{-x}+e^x}$$

car $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$= -\frac{1}{\text{ch}(x)} + \frac{1}{\text{ch}(x)}$$

car $\text{ch}(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$= 0$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$

$$f(0) = \text{Arccos}(\underbrace{\text{th}(0)}_{0 = \cos(\frac{\pi}{2})}) + 2\,\text{Arctan}(\underbrace{1}_{\tan(\frac{\pi}{4})})$$

et $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$, $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$= \frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{4}$$

$$= \pi$$

- Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{Arccos}(\text{th}(x)) + 2\,\text{Arctan}(e^x) = \pi}$$

Martin N.-L. Colle de la semaine 7.

Exercice 2 : Soit a et b deux nombres réels tels que 0 < a < b . On considère la fonction définie sur un ensemble D_f par $f(x) = \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$.

1) Déterminer le domaine de définition de *f*.

2) Déterminer une fonction *g* telle que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)(\ln(1+bx))^2}$

3) Étudier les variations de *g* et en déduire le signe de *g* puis les variations de *f*.

Solution : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. On pose, si D_f est un ensemble tel que $D_f \subset \mathbb{R}$,

$$f \left| \begin{array}{l} D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}. \end{array} \right.$$

1). On cherche D_f. f est définie sur l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que

$1 + ax > 0$

et $1 + bx > 0$,

soit $x > -\frac{1}{a}$, $x > -\frac{1}{b}$ $(\{a,b\} \neq 0)$.

On a donc $D_f = \left]-\frac{1}{a}, +\infty\right[\cap \left]-\frac{1}{b}, +\infty\right[$.

Or, puisque $b > a$, on a $-\frac{1}{b} > -\frac{1}{a}$, et donc

$$\boxed{D_f = \left]-\frac{1}{b}, +\infty\right[}$$

2). On a pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{\frac{a}{1+ax} \cdot \ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx} \cdot \ln(1+ax)}{\ln^2(1+bx)}$$

$$= \frac{a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)}{(1+ax)(1+bx) \cdot \ln^2(1+bx)}.$$

Ainsi, la fonction g définie par

$$\boxed{g \left| \begin{array}{l} D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax) \end{array} \right.}$$

convient.

3). On a pour tout $x \in D_f$:

$$g'(x) = a \cdot b \cdot \ln(1+bx) + a \cdot (1+bx) \cdot \frac{b}{1+bx}$$
$$- a \cdot b \ln(1+ax)$$
$$- a \cdot (1+ax) \cdot \frac{a}{1+ax}$$

$$= ab(\ln(1+bx) - \ln(1+ax))$$
$$= ab \cdot \ln\left(\frac{1+bx}{1+ax}\right).$$

Or pour tout $x \in D_{f_{>0}}$, on a :

$$1 + bx > 1 + ax \quad [b > a]$$

Et donc, par ~~injectivité de~~ croissance stricte de ~~et~~ ln :

Martin K.-L.

$$\ln(1+bx) > \ln(1+ax)$$

Ce qui se réécrit comme :

$$\ln\Big(\underbrace{\frac{1+bx}{1+ax}}_{>0}\Big) > 0$$

Et encore :

$$\boxed{\underbrace{ab}_{>0} \cdot \ln\left(\frac{1+bx}{1+ax}\right) = g'(x) > 0}$$

Ainsi g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, et strictement décroissante sur $]-\frac{1}{b}, 0]$, le raisonnement se généralisant mutatis mutandis pour tout $x \in D_{f<0}$.

Or, $g(0) = 0$; ainsi pour tout $x \in D_f$, $g(x) \geq 0$, et donc pour tout $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\underbrace{(1+ax)(1+bx)\ln^2(1+bx)}_{>0}} \geq 0$$

Donc f est croissante sur D_f.