Stanislas G

Semaine de colle n° 5

Exercice 1. On considère pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+e^x)^n \end{array}$. $f =$

1. Calculer la dérivée seconde de f.
2. Exprimer f'' à l'aide d'une somme.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Solution :

1) Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (1+e^x)^n \end{array} \right.$

on a $\dfrac{df}{dx} = n e^x (1+e^x)^{n-1}$

et $\dfrac{d^2f}{dx^2} = n\left(e^x(1+e^x)^{n-1} + (n-1)e^{2x}(1+e^x)^{n-2}\right)$

$= n e^x (1+e^x)^{n-2}\left(1+e^x + (n-1)e^x\right)$

$= n e^x (1+e^x)^{n-2}(1+ne^x)$

donc $\boxed{\dfrac{d^2f}{dx^2} = n e^x (1+e^x)^{n-2}(1+ne^x)}$

2) $(1+e^x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} e^{xk}$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx}$ (*)

(*)' $= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k e^{kx}$

(*)'' $= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 e^{kx}$

$\boxed{\text{donc } \dfrac{d^2f}{dx^2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 e^{kx}}$

3) On en déduit que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = \frac{d^2 f}{dx^2}$ en $x=0$

donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = n \times 2^{n-2} \times (1+n)$

$= (n+n^2) \times 2^{n-2}$

$= n 2^{n-2} + n^2 2^{n-2}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = n 2^{n-2} + n^2 2^{n-2}}$$

MANGIALOMINI
Antoine

Semaine de colle n° 4

Coefficient devant $a^3 b^3 c^2 d^2$ dans $(a+b+c+d)^{10}$

On écrit $(a+b+c+d)^{10}$ comme ;

$$\sum_{k=0}^{10} \underbrace{(a+c)^k}_{1} \underbrace{(b+d)^{10-k}}_{2} \binom{10}{k}$$

Dans 1 et 2 on cherche les expressions où on obtient a^3c^2 et b^3d^2 en même temps ce qui est le cas lorsque $k=5$ où on a $\binom{10}{5}(a+c)^5(b+d)^5$

Coeff devant $a^3b^3c^2d^2 = \binom{10}{5} \times$ coeff $a^3c^2 \times$ coeff b^3d^2

or a^3c^2 dans $(a+c)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^k c^{5-k}$

et d'où seulement pour $k=3$ et or pour coeff $\binom{5}{3}$

On a donc coeff $a^3b^3c^2d^2 = \binom{10}{5} \times \binom{5}{3} \times \binom{5}{3}$

(Coeff de b^3d^2 fonctionne de manière analogue à celui de a^3c^2)

$$= \frac{10 \times \cancel{9} \times 8 \times 7 \times 6 \times \cancel{4} \times 5 \times 4}{\cancel{5} \times \cancel{3} \times \cancel{3}} = 10 \times 20 \times 32 \times 42$$

$$\boxed{= 268\,800}$$

Martin K.-L. Colle de la semaine 5.

Exercice 1. Soient x, y, z des complexes et a, b, c des entiers naturels, $n \in \mathbb{N}$.
Quel est le coefficient de $x^a y^b z^c$ dans le développement de $(x+y+z)^n$.

Solution. Soit $(x, y, z, a, b, c, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
On cherche le coefficient de $x^a y^b z^c$ dans le développement de $(x+y+z)^n$.

On cherche en premier lieu des conditions sur a, b, c. On a

$$(x+y+z)^n$$

$$= ((x+y)+z)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+y)^k z^{n-k} \quad \text{(Par Newton)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\sum_{a=0}^{k} \binom{k}{a} x^a y^{k-a} \right) \cdot z^{n-k} \quad \text{(Par Newton)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{a=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{a} x^a y^{k-a} z^{n-k}$$

On voit que tout terme de la forme $x^a y^b z^c$ apparaissant dans le développement de $(x+y+z)^n$ est de la forme $x^a y^{k-a} z^{n-k}$

avec $(k,q) \in [\![0,n]\!]^2$ tel que $k \geq q$.
On a d'autre part que $a+b+c = q+k-q+n-k = n$.
Et, le coefficient devant $x^q y^{k-q} z^{n-k}$ vaut $\binom{k}{n} \cdot \binom{q}{k}$.

On a donc

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{q}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{q! \cdot (k-q)!} \quad \left(\text{Définitions de } \binom{n}{k}, \binom{k}{q}\right).$$

$$= \frac{n!}{q!(k-q)!(n-k)!}$$

$$= \boxed{\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}}$$

en posant $q \leftarrow a$, $(k-q) \leftarrow b$, $(n-k) \leftarrow c$, puisque chacun des q, $(k-q)$, $(n-k)$, peut prendre chaque valeur dans $[\![0,n]\!]$.

Timothée. F

Question de cours 11 : Formule du binôme de Newton.
Calcul de $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Formule</u> : Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

<u>Démonstration</u> : Par récurrence simple

Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$

<u>Initialisation</u> : Soit $P(n) = "(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}"$.
Montrons que $P(0)$ est vraie :

$(a+b)^0 = 1$ et $\binom{0}{0}a^0 b^0 = 1$

Donc $P(0)$ vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit n fixé tel que $P(n)$ vraie.
Montrons que $P(n+1)$ est vraie :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \quad \text{Hypothèse de récurrence}$$

$$= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}$$

Changement d'indice

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}$$

$$= \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1}$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} \quad \text{et} \quad \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1}$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n-k+1}$$

Donc, $P(n+1)$ vraie.

<u>Conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}$

Synthèse F

<u>Calcul</u> : $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} - 1$$

Formule du binôme de Newton

$$= (1-1)^n - 1$$

$$= 0^n - 1 \qquad (n \neq 0 \Rightarrow 0^n \neq 1)$$

$$= -1$$

Antoine B.

colle de la semaine

$$\boxed{\text{Montrer que pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n \text{ est un entier pair.}}$$

Solution : $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \times \sqrt{5}^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n} \times \sqrt{5}$

(binôme de Newton) $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \times \sqrt{5}^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \times (-\sqrt{5})^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \times \sqrt{5}^k + \binom{n}{k} 3^{n-k} \times (-\sqrt{5})^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \left(\sqrt{5}^k + (-\sqrt{5})^k \right)$$

disjonction de cas :

- k est impair :
  $\sqrt{5}^k + (-\sqrt{5})^k = \sqrt{5}^k - \sqrt{5}^k = \underline{0}$.
  est pair

- k est pair :
  $\sqrt{5}^k + (-\sqrt{5})^k = 5^{k/2} + 5^{k/2} = \underbrace{2 \times 5^{k/2}}_{\text{est pair}}$

De plus : $\binom{n}{k} \times 3^{n-k}$ est un entier.

donc on a $\binom{n}{k} 3^{n-k} \left(\sqrt{5}^k + (-\sqrt{5})^k \right)$ est pair

$\boxed{\text{et ainsi : } (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5}) \text{ est une somme de pairs, est pair}}$

Sophie G.

Colle de la semaine 5

$$\boxed{\text{Montrer que tout } n \in \mathbb{N},\ (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n \text{ est un entier pair}}$$

La solution :
Montrons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{Z}, (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = 2k.$$

$$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k} \sqrt{5}^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k} (-5)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \sqrt{5}^{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (-\sqrt{5})^{k}$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ \text{pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \sqrt{5}^{k} + \cancel{\sum_{\substack{k=0 \\ \text{impair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \sqrt{5}^{k}}$$

$$+ \sum_{\substack{k=0 \\ \text{pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (\sqrt{5})^{k} - \cancel{\sum_{\substack{k=0 \\ \text{impair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \sqrt{5}^{k}}$$

$$= 2 \sum_{\substack{k=0 \\ \text{pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \sqrt{5}^{k}$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{3^{n-k}}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{5^{\frac{k}{2}}}_{\in \mathbb{Z} \text{ (car } k \text{ pair)}}$$

Donc $\boxed{(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n \text{ est pair.}}$

Billy. G

Khôlle de la semaine 5

$$\boxed{\text{Exercice : Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ déterminer } \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{i}}$$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{i}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 1^{i} \times 1^{k-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n} \qquad \text{(formule du binôme de Newton)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n} \times 1^{n-k}$$

$$= 3^{n} \qquad \text{(formule du binôme de Newton)}$$

Lina. A

Colle de la semaine n° 5

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Simplifier $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right)$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right) \times \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2}$$ (deux fois le telescopage)

$$\boxed{\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}}$$

Ibrahim. k

Colle de la Semaine

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

1) - Mq u_n est croissante et majorée par 2

2) - Determiner la limite de u_n en $+\infty$

1) - Soit $n \in \mathbb{N}^*$; Étudions :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \frac{1}{n+1+(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \frac{1}{2n+2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} - \frac{1}{n+k}}_{\text{Somme télescopique}}$$

$$= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1) + (2n+2)(n+1) - (2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{2n^2 + 3n + 1 + 2n^2 + 4n + 2 - 4n^2 - 6n - 2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)}$$

$$=$$

$$= \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)(n+1)} > 0$$

donc

$$u_{n+1} \geq u_n$$

On a $k \in [\![1; n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$

donc $1 \leq k \leq n$

donc $n+1 \leq n+k \leq 2n$

or inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$

donc

$$\frac{1}{2n} \leq \underbrace{\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}}_{(1)}$$

on s'intéresse à (1).

on a $k \in [\![1; n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \frac{n}{n+1}$$

ainsi

$$u_n \leq \frac{n}{n+1}$$

or $\frac{n}{n+1} - 2 = \frac{n-2n-2}{n+1} = \frac{-n-2}{n+1} < 0$

donc

$$\frac{n}{n+1} \leq 2$$

ainsi par transitivité de la relation d'ordre

$$u_n \leq 2$$

2) on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante et majorée donc

elle est convergente

et

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} \qquad \text{(puisque } k \in \mathbb{N}^*\text{)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

ainsi $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{1}{1+x} \end{array} \right.$

ainsi on reconnait une somme de Riemann

ainsi

$$u_n \xrightarrow[+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2$$

Nicolas. H

Colle de la semaine 5

$$\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}. \text{ Simplifier } \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)}$$

Solution: $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$

$$= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k-1) \times \prod_{k=2}^{n} k+1}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k^2}$$

$l = k-1$ $\quad$ $p = k+1$

$k=2 \rightarrow l=1$ $\quad$ $k=2 \rightarrow p=3$

$k=n \rightarrow l=n-1$ $\quad$ $k=n \rightarrow p=n+1$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{l=1}^{n-1} l \times \prod_{l=3}^{n+1} p}{(n!)^2}$$

$$= \frac{\displaystyle\prod_{l=2}^{n} l \times \prod_{p=2}^{n} p \times (n+1)}{(n!)^2 \times 2 \times n}$$

$$= \frac{(n!)^2\,(n+1)}{(n!)^2 \times 2 \times n}$$

$$\boxed{= \frac{n+1}{2n}}$$

Tigüin, David Colle de la semaine 5

Exercice 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n et I_n les sommes suivantes*

$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}.$$

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$ en fonction de n.*
2. *En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P_n et I_n en fonction de n.*

Solution

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $P_n + I_n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (1)^l (1)^{n-l}$

$= (1+1)^n = 2^n$
(binôme de Newton)

Et $P_n - I_n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (-1)^l (1)^{n-l} = (-1+1)^n = 0$
(binôme de Newton)

2) On a que $\begin{cases} P_n + I_n = 2^n \\ P_n - I_n = 0 \end{cases}$ ainsi

$\begin{cases} P_n + I_n = 2^n \\ P_n - I_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_n + I_n = 2^n \\ I_n = (2^{n-1}) \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

Et comme $n \in \mathbb{N}$ alors $P_n = 2^{n-1}$

Enfin on a que $P_n = 2^{n-1}$ et $I_n = 2^{n-1}$

Adam M.

Colle de la semaine 5

EXERCICE 9 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $A(n) := \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$ et $B(n) := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}$.
2. En déduire les valeurs de $\sum_{p=0}^{n} \binom{2n}{2p}$ et $\sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n}{2p+1}$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. $A(n) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n} = 4^n$

$B(n) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k = (1+(-1))^{2n} = 0$

(Formule du binome de Newton)

2. $A(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = U(n) + V(n)$

$B(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = U(n) - V(n)$

(Regroupement de termes suivant la parité de l'indice)

$$\begin{cases} U(n) + V(n) = 4^n & L_1 \\ U(n) - V(n) = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U(n) + V(n) = 4^n \\ 2U(n) = 4^n & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V(n) = \frac{4^n}{2} & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_1 \\ 2U(n) = 4^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} V(n) = \frac{4^n}{2} \\ U(n) = \frac{4^n}{2} \end{cases}}$$

Citouan

D

$$\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{Calculer} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \qquad (k = k+1-1)$$

donc $$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(n+1)!}$$ (Changement d'indice)

donc $$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}}$$ (télescopage)

Mehdi B. Colle de la semaine 5

Exercice 4 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $p < n$.

Montrer que $\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{n-1}{p}$

<u>Solution</u> : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ tel que $p < n$.

Posons $P(n) =$ " $\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{n-1}{p}$

Montrons $P(n)$ par récurrence simple

<u>Initialisation au rang 1</u>

$\binom{1}{0+1} = 1$ et $\binom{0}{0} = 1$ Donc $P(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > p$ et $P(n)$ vraie.
Montrons $P(n+1)$ est vraie,
ie : " $\binom{n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \ldots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p}$

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \quad \text{(Relation de Pascal)}$$

$$\overset{HR}{=} \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \ldots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p} \quad \square$$

<u>Conclusion</u> : d'après l'initialisation au rang 1, l'hérédité et l'axiome de récurrence, <u>$P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$</u>, $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p < n$

Léon . N

Colle de la semaine n°5.

Étudiant : .....

Cours : Formule du binôme de Newton (énoncé et démonstration). Calcul de $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Déterminer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Déterminer $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} i$.

Système s'il reste du temps : (dicté)

Exercice : soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} i}_{S_1(k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{S_2(n)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{S_1(n)}\right]$$

(linéarité)

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{3}\right)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} i = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$$

Jour D

Semaine n° 5

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. Montrer que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{k+1}$

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$

On raisonne par récurrence

$P(n) =$ " $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ "

<u>Initialisation à $n = p$:</u>

$\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$ et $\binom{p+1}{p+1} = 1$ donc $P(p)$ vraie

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ vraie.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}$$

$$(HR) = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Relation de}\\ \text{Pascal}\end{pmatrix} = \binom{n+2}{p+1}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Mathéo.N

Exercice de colle semaine n°5

Exercice 1
Soit $n \geq 1$.

$$S_n \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{i}{i+j}.$$

On pourra remarquer que $\frac{i}{i+j} = \frac{i+j-j}{i+j}$.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{i}{i+j} \quad (*)$$

[Somme rectangulaire] $= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i+j-j}{i+j}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{i+j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{i+j}$$

$$= n^2 - \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{j}{i+j}$$

(*) on retrouve la somme du début au terme près

$$S_n = n^2 - S_n$$

D'où : $2 S_n = n^2$

$\underset{2 \neq 0}{\Leftrightarrow}$ $S_n = \frac{n^2}{2}$

Jules R. Colle de la semaine 5

$$\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}. \text{ Calculer } \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}}$$

Solution :

Nous observons que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$\text{donc } = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Donc, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \quad \left(\text{quand } k=0 ;\ 0\times\binom{n}{0}=0\right)$$

$$\text{donc } = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \quad \left(k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \text{ pour tout } k\in[\![1,n]\!]\right)$$

$$\text{donc } = n\sum_{h=0}^{n-1}\binom{n-1}{h} \quad \left(\text{sortie constante } n \text{ et changement d'indice } h = k-1\right)$$

$$\text{donc } = n\sum_{h=0}^{n-1}\binom{n-1}{h} 1^{k} 1^{n-1-k}$$

$$\text{donc } = n2^{n} \quad (\text{binôme de Newton})$$

Thibault N. Colle semaine 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$a. \cancel{\prod_{k=3}^{17} 2}$ $\qquad$ $\cancel{b. \prod_{k=1}^{n} x}$

$e. \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ $\qquad$ $f. \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Solution :

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n} k} \quad \text{par commutativité du produit}$$

$$= \frac{(n+1)!}{n!} = \boxed{n+1} \quad \text{par définition de factorielle}$$

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule

Si $n = 1$: $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = 1$ par définition

Si $n \neq 1$: $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2}$

$$= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)(k-1)}{\prod_{k=2}^{n} k^2}$$

$$= \frac{(n+1)!\,(n-1)!}{n!^2}$$

$$= \frac{(n-1)!^2 \times n(n+1)}{n!^2} = \boxed{\frac{n+1}{(n-1)!\,(n!)}}$$

Remi. S

Semaine de colles n° 5

Soit $n \in \mathbb{N}$,

Calculer : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} ij$$

$$= \sum_{j=1}^{n} j \underbrace{\sum_{i=1}^{j} i}_{\frac{j(j+1)}{2}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} j^3 + j^2 \right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

Uta Bayen de Neyer

Rapport de colle semaine 5

Quel est le coefficient de $a^3b^3c^2d^2$ dans $(a+b+c+d)^{10}$?

5.a. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$

- D'après le binôme de Newton
$(a+b+c+d)^{10} = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} (a+b)^i (c+d)^{10-i}$

- La condition nécessaire qu'il y ait a^3b^3 dans $(a+b)^i$ est $i = 6$

- La condition nécessaire qu'il y ait c^2d^2 dans $(c+d)^{10-i}$ est $10-i = 4$ donc $i = 6$

- Donc il suffit de calculer $\binom{10}{4}$, $(a+b)^6$, $(c+d)^4$

- $\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

- $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + \boxed{20a^3b^3} + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

- $(c+d)^4 = c^4 + 4c^3d + \boxed{6c^2d^2} + 4cd^3 + d^4$

La coefficient de a^3b^3 est 20, c^2d^2 est 6

- On calcule le produit :

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 6 \times 20$$

$$= 25\,200$$

- On en déduit que le coefficient de $a^3b^3c^2d^2$ dans $(a+b+c+d)^{10}$ est $\boxed{25\,200}$

Anaé. D

Colle de la semaine 5

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Solution :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}}$$

Hugo. D

Colle de la semaine 5

$$\boxed{\text{Soit } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \text{ Calculer } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)}$$

<u>Solution :</u>

Soit $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in \mathbb{R}} \operatorname{Im}\left(e^{ikx}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Im}\left(\binom{n}{k} e^{ikx}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^{k} (1)^{n-k}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\left(1+e^{ix}\right)^{n}\right) \qquad \text{(Binôme de Newton)}$$

$$= \operatorname{Im}\left(\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}\right)^{n}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(2^{n} \cos\left(\frac{x}{2}\right)^{n} e^{i\frac{nx}{2}}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(2^{n} \cos\left(\frac{x}{2}\right)^{n} \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + i \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)\right)$$

$$\boxed{= 2^{n} \cos\left(\frac{x}{2}\right)^{n} \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

Leon 5 Colle semaine 5

Sujet

Résoudre $\begin{cases} 2x - 2y + z = 3 \\ 3x + y - z = 1 \\ x + 3y - 2z = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 3 \\ 3x + y - z = 1 \\ x + 3y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = -2 \\ 3x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + z = 3 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = -2 \\ -8y + 5z = 7 \\ -8y + 5z = 7 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -2 + 2z \\ y = \dfrac{5z - 7}{8} \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 \times -\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 + z}{8} \\ y = \dfrac{5z - 7}{8} \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

$$Sol = \left\{ \left(\frac{5+z}{8}, \frac{5z-7}{8}, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$$

Maximilien T. Colle de la semaine 5

Exercice 1. Soient x, y, z des complexes et a, b, c des entiers naturels, $n \in \mathbb{N}$. Quel est le coefficient de $x^a y^b z^c$ dans le développement de $(x+y+z)^n$.

<u>Solution</u> : Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ $n \in \mathbb{N}$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$

$$(x+y+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+y)^k z^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^l y^{k-l} z^{n-k}$$

Nous cherchons le coefficient devant $x^a y^b z^c$ nous devons trouver des valeurs de l, k et n tel que

$$\begin{cases} l = a \\ k - l = b \\ n - k = c \end{cases} \iff \begin{cases} l = a \\ k = b + a \\ n = c + b + a \end{cases}$$

Ainsi

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \frac{n! \times (b+a)!}{(b+a)!\, c!\, b!\, a!} = \boxed{\frac{n!}{a!\, b!\, c!}}$$

Exercice n°2 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$p_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\dots\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$$

1. Calculer p_0.

2. A l'aide de la ~~solution~~ valeur de l'expression de $\sin(2\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, simplifier p_n.

Solution :

1. $p_0 = \prod_{k=0}^{0} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) \quad \text{(Formule de duplication)}$$

Posons $\theta = \frac{\pi}{2^{k+2}}$, $k \in [\![0;n]\!]$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$$

Montrons que $\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) \neq 0$

i.e. $\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) \neq \sin(\pi)$

On raisonne par l'absurde :

Supposons $\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = \sin(\pi)$

Par un si égalité des sinus :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = \sin(\pi) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2^{k+2}} = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{2^{k+2}} = \pi - \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2^{k+2}} = 1 + 2k, \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \frac{1}{2^{k+2}} = 2k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Or $k \in [\![0; n]\!]$ donc $k+2 \in [\![2; n+2]\!]$

Ainsi $2 \leq k+2 \leq n+2$

$\underset{2^x \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}^+}{\Rightarrow}$ $2^2 \leq 2^{k+2} \leq 2^{n+2}$

$\Rightarrow$ $4 \leq 2^{k+2} \leq 2^{n+2}$

$\underset{\text{inv } \searrow \text{ sur } \mathbb{R}^+}{\Rightarrow}$ $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2^{k+2}} \geq \frac{1}{2^{n+2}}$

Or $1 > \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2^{n+2}} > 0$ car $1 \neq 0$.

Alors $1 > \frac{1}{2^{k+2}} > 0$

Or $l \in \mathbb{Z}$ donc $\begin{cases} \frac{1}{2^{k+2}} \neq 2l \\ \text{et} \\ \frac{1}{2^{k+2}} \neq 1 + 2l \end{cases}$ (Contradiction)

Exercice 6

Ainsi $\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) \neq 0$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$$

Ainsi $$P_n = \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$$

$$= \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \times \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \times \left(\prod_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \times \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

$$P_n = \frac{1}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

Alexandre M.

Colle semaine 7.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \\ \text{Démontrer } \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n!}{k!}\right) = \prod_{l=1}^{n} l^l\end{array}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $P := \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n!}{k!}\right)$

$$= \frac{n!}{0!} \times \prod_{k=1}^{n-1} \underbrace{\frac{\prod_{l=1}^{n} l}{\prod_{i=1}^{k} i}}_{\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times \cancel{k}\times\cancel{(k-1)}\times\cdots\times\cancel{1}}{\cancel{k}\times\cancel{(k-1)}\times\cdots\times\cancel{1}}}$$

[on sort le premier terme pour pouvoir exprimer $\prod_{i=1}^{k} i$]

$$= \frac{n!}{1} \times \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{l=k+1}^{n} l$$

$$= \prod_{l=1}^{n}(l) \times \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{l=k+1}^{n} l$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{l=k+1}^{n} l$$ [Relation de récurrence]

$$= \prod_{0\leq k<l\leq n} l$$ [formule d'inversion]

$$= \prod_{l=1}^{n} \prod_{k=0}^{l-1} l$$ [On inverse les deux produits]

$$= \prod_{l=1}^{n} l^{l-1+1}$$

$$\boxed{p = \prod_{l=1}^{n} l^{l}} \quad \square$$

Elian . A

Semaine 5

EXERCICE 7 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} ij$$

$$= \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=1}^{j} i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} j \, \frac{j(j+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

Semaine 5

Ahmed Amine

Énoncé :

Calculer $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

Solution :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(n!)}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} n \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} 1^{k-1} 1^{n-1-k}$$

$$= n(1+1)^{n-1} = \boxed{n 2^{n-1}.}$$

Louis B

Kholle de la semaine 4

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Démontrer par récurrence que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)} \quad (*)$$

<u>Définition du prédicat</u> : $P(n) =$ " $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \quad (*)$ "

<u>Initialisation</u> : à $n = 2$

$$\sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{2(4-1)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{2^2+2-2}{4\times 2(2+1)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

$=$

Donc $P(2)$ est vrai

<u>Hérédité</u> : Soit $P(n)$ vrai pour tout $n \geq 2$ fixé

Mq $P(n+1)$ est vrai

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)^2-1)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{(n+2)(n^2+n-2)}{(n+2)4n(n+1)} + \frac{4}{4(n+1)((n+1)^2-1)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{(n+2)(n^2+n-2)}{4(n+1)n(n+2)} + \frac{4}{4(n+1)n(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{(n+2)(n^2+n-2)+4}{4(n+1)n(n+2)} = \frac{n^3+3n}{4(n+1)n(n+2)} = \frac{n^2+2n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2+n+1-2}{4(n+1)(n+2)}$$

Rapport de colle 5

Wassim
N°

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(ka + (n-k)b)$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(ka + (n-k)b)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{Re}\left(e^{i(ka + (n-k)b)}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{Re}\left(e^{ika} \times e^{i(n-k)b}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ia})^k (e^{ib})^{n-k}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left((e^{ia} + e^{ib})^n\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right)^n\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)^n \left(\cos\left(n\frac{(a+b)}{2}\right) + i\sin\left(n\frac{(a+b)}{2}\right)\right)\right)\right)$$

$$= \left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)^n \cos\left(n\frac{(a+b)}{2}\right)$$

Colle de la semaine 5

Youssef B

Exercice : Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

Solution :

Nous démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

Initialisation à $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} = 1$$

et, $2 - \frac{1}{1} = 1$

$1 \leqslant 1$, donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$

Donc $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2}$

Donc $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}$

Donc $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)^2}$

Donc $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)^2}$

Or, $\frac{1}{n(n+1)^2} > 0$

Donc $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Piero T. Calle de la semaine 5

Exercice 3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $p < n$.
Montrez que : $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p+1}$

Solution :

$$\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n-1} \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \binom{n}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n}{p+1}$$

Strieverant L-G.

Colle de la semaine 4

Exercice 1 : Calculer $\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{5^{40}}+\frac{1}{5^{70}}+\ldots+\frac{1}{5^{400}}$

Solution On pose $(S) = \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{5^{40}} + \frac{1}{5^{70}} + \ldots + \frac{1}{5^{400}}$

Nous remarquons que $(S) = \sum_{k=0}^{13} \frac{1}{5^{10+30k}}$

$$= \sum_{k=0}^{13} \frac{1}{5^{10}} \times \frac{1}{5^{30k}} = \frac{1}{5^{10}} \sum_{k=0}^{13} \frac{1}{5^{30k}} = \frac{1}{5^{10}} \sum_{k=0}^{13} \left(\frac{1}{5^{30}}\right)^k$$

$\frac{1}{5^{30}} \neq 1$, nous avons donc ici une somme de termes en progression géométrique

Donc $(S) = 5^{-10} \times \frac{1-(5^{-30})^{14}}{1-5^{-30}} = \boxed{\frac{5^{-10}-5^{-430}}{1-5^{-30}}}$

Pierre V. Colle de la semaine 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $p < n$.

Montrer que $\binom{n}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n-1}{p}$

Solution

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p < n$, $P(n)$ "$\binom{n}{p+1} = \sum_{k=p}^{n-1} \binom{k}{p}$"

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie par récurrence

*) Initialisation pour $n = p+1$

$$\left.\begin{array}{l} \binom{p+1}{p+1} = 1 \\ \sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1 \end{array}\right\} P(p+1) \text{ est vraie}$$

*) Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie Montrons que $P(n+1)$

$$\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k}{p} = \binom{n}{p+1} \quad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=p}^{n-1} \binom{k}{p} + \binom{n}{p} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \quad \text{(relation de Pascal)}$$

*) Conclusion : D'après l'initialisation, l'hérédité et l'axiome de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p < n$, $P(n)$ est vraie

Celia A. Semaine n° 5

énoncé : Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

solution :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \, 1^{n-k}$$

$$= (1+1)^n$$ (formule du binôme de Newton)

$$= 2^n$$

donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$

Raphaël T.

Colle de la semaine n° 5

Soient n et p des entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Démontrer que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Solution :

Soit p fixer tq $p \leq n$.
On résonne par récurrence simple
Initialisation à $n=p$:

$$\sum_{k=p}^{p} \binom{k}{p} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{p+1}{p+1} = 1$$

Donc l'initialisation est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tq $P(n)$ vraie montrons que $P(n+1)$ est également vraie.

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p}$$

$$\underset{HR}{=} \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}$$

$$\underset{\text{(formule de Pascal)}}{=} \binom{n+2}{p+1}$$

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence et l'initialisation à $n=p$.

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$$

Léa N.

Colle de la semaine n°5

Énoncé :

Calculer $\frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{3^{40}} + \frac{1}{3^{60}} + \dots + \frac{1}{3^{360}}$

Solution :

$$S = \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{3^{40}} + \frac{1}{3^{60}} + \dots + \frac{1}{3^{360}}$$

$$S = \sum_{k=1}^{18} \left(\frac{1}{3^{20}}\right)^k$$

Donc $S = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3^{20}}\right)^{18}}{1 - \left(\frac{1}{3^{20}}\right)}$ (car $\frac{1}{3^{20}} \neq 1$)

$$S = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{18 \times 20}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{20}}$$

Robin G.

Colle de la semaine 5

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in \mathbb{R}^*. \\ \text{Simplifier } \sum_{k=-n}^{n} x^k.\end{array}}$$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\sum_{k=-n}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{2n} x^{k-n} \quad \text{(changement d'indice)}$$

$$= x^{-n} \sum_{k=0}^{2n} x^k$$

si $x = 1$, $\sum_{k=-n}^{n} x^k = 2n+1$

si $x \neq 1$,

$$\sum_{k=-n}^{n} x^k = x^{-n} \frac{1-x^{2n}}{1-x} = \frac{x^{-n} - x^{n}}{1-x}$$

Eliott SV

SEMAINE 5

$$\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Calculer } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j)}$$

SOLUTION :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j) \right)$$

Relation de Chasles

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i \right)$$

Or $\sum_{j=1}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2}$ et $\sum_{j=i+1}^{n} i = i \sum_{j=i+1}^{n} 1 = i(n-1)$, On a :

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} + i(n-i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{2} + \frac{i}{2} + in - i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} i^2$$

Linéarité

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \left(\frac{2n+1}{2}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(2n+1)(n(n+1)) - \frac{1}{12}\left(n(n+1)(2n+1)\right)$$

$$= (2n+1)n(n+1)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ainsi, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$