Colle de la semaine 4

Youssef B

> Soit $z \in \mathbb{C}^*$, Démontrer que
> $$\frac{z+i}{1+iz} \in \mathbb{R} \iff |z| = 1$$

Solution :

pour montrer que $\frac{z+i}{1+iz} \in \mathbb{R} \iff |z| = 1$

On fait par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

$\frac{z+i}{1+iz} \in \mathbb{R}$ donc $\exists k \in \mathbb{R}, \frac{z+i}{1+iz} = k$

Donc $z + i = k + ikz$

Donc $z(1 - ik) = k - i$

Donc $z = \frac{k-i}{1-ik}$

$$|z| = \left|\frac{k-i}{1-ik}\right| = \frac{|k-i|}{|1-ik|}$$

$$= \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

$\Leftarrow$ $|z| = 1$. Mq $\dfrac{z+i}{1+iz} \in \mathbb{R}$

On pose $Z = \dfrac{z+i}{1+iz}$

$$\frac{Z}{\overline{Z}} = \frac{\left(\frac{z+i}{1+iz}\right)}{\overline{\left(\frac{z+i}{1+iz}\right)}}$$

$$= \frac{\frac{z+i}{1+iz}}{\frac{\bar{z}-i}{1-i\bar{z}}}$$

$$= \frac{(z+i)(1-i\bar{z})}{(1+iz)(\bar{z}-i)}$$

$$= \frac{z+\bar{z}+i(1-z\bar{z})}{z+\bar{z}+i(z\bar{z}-1)}$$

Or, $z\bar{z} = |z|^2$ et $|z|^2 = 1^2$

Donc $\dfrac{Z}{\overline{Z}} = \dfrac{z+\bar{z}}{z+\bar{z}} = 1$

Donc $Z = \overline{Z}$

Donc $Z = \dfrac{z+i}{1+iz}$ est un réel

Hugo SCHÜTZ — Colle de la semaine 4.

Résoudre l'équation $z^4 = \bar{z}^2$ où l'inconnue z appartient à $\mathbb{C}$

Par analyse synthèse

Analyse:

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}$ tel que:

$$z = a + ib.$$

Et pour $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$z = re^{i\theta}$$

Ainsi, pour $z \neq 0$:

$$z^4 = (re^{i\theta})^4 = r^4 e^{i4\theta}$$

Et $\bar{z} = re^{-i\theta}$

Alors $\bar{z}^2 = r^2 e^{-i2\theta}$

Supposons $z^4 = \bar{z}^2$:

Alors on a :

$$z^4 = \bar{z}^2$$

Donc $r^4 e^{i4\theta} = r^2 e^{-i2\theta}$

Donc $r^2 e^{i4\theta} = e^{-i2\theta}$

Et $r^2 = e^{-i6\theta}$

Alors $r = e^{-i3\theta}$ On a alors $r = e^{-i3\theta}$ comme candidat.

Synthèse:

Si $r = e^{-i3\theta}$, alors:

$$z^4 = r^4 e^{i4\theta} = e^{-i12\theta} e^{i4\theta} = e^{-i8\theta}$$ (produit de 2 exponentielles complexes)

Et $\bar{z}^2 = r^2 e^{-i2\theta} = e^{-6i\theta} e^{-i2\theta} = e^{-i8\theta}$

Ainsi $z^4 = \bar{z}^2$

$r = e^{-i3\theta + 2k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est bien solution de $z^4 = \bar{z}^2$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

Martin K.-L.

Colle de la semaine 4

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ et $z' = \frac{z+i}{z-2i}$.

a). Détermine l'ensemble des images des nombres z tels que $z' \in \mathbb{R}$.
b) Détermine l'ensemble des images des nombres z tels que $z' \in i\mathbb{R}$.

Solution : a). On cherche les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z' \in \mathbb{R}$.
On a $z' \in \mathbb{R} \iff z' = \overline{z'}$. Ainsi :

$$z' = \frac{z+i}{z-2i} = \overline{z'} = \overline{\left(\frac{z+i}{z-2i}\right)} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+2i}$$

$$\iff (z+i)(\overline{z}+2i) = (\overline{z}-i)(z-2i)$$
$$\iff |z|^2 + 2iz + i\overline{z} - 2 = |z|^2 - 2i\overline{z} - iz - 2$$
$$\iff z = -\overline{z} \iff z \in i\mathbb{R}.$$

L'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z' \in i\mathbb{R}$ est donc $i\mathbb{R} \setminus \{2i\}$.

b). On cherche les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z' \in i\mathbb{R}$
On a $z' \in i\mathbb{R} \iff z' = -\overline{z'}$. Ainsi :

$$z' = \frac{z+i}{z-2i} = -\overline{z'} = -\overline{\left(\frac{z+i}{z-2i}\right)} = \frac{i-\overline{z}}{\overline{z}+2i}$$

$$\iff (z+i)(\overline{z}+2i) = (i-\overline{z})(z-2i)$$
$$\iff |z|^2 + 2iz + i\overline{z} - 2 = -|z|^2 + 2i\overline{z} + iz + 2$$
$$\iff 2|z|^2 + iz - i\overline{z} - 4 = 0$$

On pose $z = x+yi$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, on a :

$$2(x^2+y^2) + i(x+yi) - i(x-yi) - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2y - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

Cela correspond au cercle de centre $(0, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{3}{2}$. L'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z' \in i\mathbb{R}$ est donc $\mathcal{C}\left((0,\frac{1}{2}), \frac{3}{2}\right) \setminus \{0, 2\}$.

Leçon 5 Colle de la semaine 3

Énoncé

1) Déterminer, dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|(1+i)z - 2i| = 2$

2) Reconnaître la transformation du plan qui associe à z : $z' = (1+i)z - 2i$

Solution.

1) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points d'affixe z tels que $|(1+i)z - 2i| = 2$

Soit $z \in \mathcal{E}$. Alors

$$|(1+i)z - 2i| = 2$$

$$\iff \left|(1+i)\left(z - \frac{2i}{1+i}\right)\right| = 2$$

$$\iff |1+i| \left|z - 2i \times \frac{1-i}{2}\right| = 2$$

$$\iff |z - (1+i)| = \sqrt{2}$$

$$\iff z \in \mathcal{C}(1+i, \sqrt{2})$$

Donc $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$

2) Soit f une transformation du plan tel que

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \to (1+i)z - 2i \end{array} \right.$$

f est une similitude direct.

On recherche le point fixe.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z = f(z)$$

donc $z = (1+i)z - 2i$

donc $-zi = -2i$

donc $z = 2$

Soit Ω le point d'affixe $z = 2$

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Soit $h_{\Omega,\sqrt{2}}$ et $r_{\Omega,\frac{\pi}{4}}$ telque

$h_{\Omega,\sqrt{2}} \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \to 2 + \sqrt{2}(z-2) \end{array} \right.$

$r_{\Omega,e^{i\frac{\pi}{4}}} \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \to 2 + e^{i\frac{\pi}{4}}(z-2) \end{array} \right.$

$f(z) = h_{\Omega,\sqrt{2}} \circ r_{\Omega, e^{i\frac{\pi}{4}}}(z)$

Eliam A. Semaine 4

Exercice 1. *On définit l'application :*

$$C: \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

1. *Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}$ par C.*
2. *Déterminer l'image réciproque de $\{2+i\}$ par C.*
3. *Montrer que C est surjective avec le moins de calcul possible.*
4. *C est-elle bijective ?*

1. $C(\mathbb{R}) = \left\{ \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} : z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \{ \cos(z) : z \in \mathbb{R} \}$

$= [-1, 1]$

2. $C^{-1}(\{2+i\}) = \{ z \in \mathbb{C} : f(z) \in \{2+i\} \}$

Cela revient à résoudre $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2+i$, $z \in \mathbb{C}$

Donc on a $e^{iz} + e^{-iz} = 4+2i$

On pose $X = e^{iz}$

On a $X + \frac{1}{X} = 4+2i$

Donc $X^2 - X(4+2i) + 1 = 0$

Donc $(X - (2+i))^2 - (2+4i) = 0$

$(X-(2+i))^2 - (\sqrt{2+4i})^2 = 0$

$(X - (2+i) - \sqrt{2+4i})(X - (2+i) + \sqrt{2+4i}) = 0$

Cintègre Donc $X = 2+i + \sqrt{2+4i}$ ou $X = 2+i - \sqrt{2+4i}$

3. En reprenant la question 2 et en remplaçant $\{2+i\}$ par $x \in \mathbb{C}$, on remarque que chaque x possède 2 antécédents par C donc C est surjective

4. C n'est pas bijective car $\{2+i\}$ a deux antécédents

MANGIACOMIN
Amélien

<u>Colle semaine 4 :</u>

EXERCICE 9 — L'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$$

est-elle injective ? surjective ? bijective ?

On pose $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \end{array} \right.$

On a ; Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f \circ g((x,y)) = f\left(\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)$$

$$= (x, y) = id_{\mathbb{R}^2}(x,y)$$

et Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

$$g \circ f((x,y)) = g(x+y, x-y)$$

$$= \left(\frac{x+y+x-y}{2}, \frac{x+y-x+y}{2}\right)$$

$$= (x, y) = id_{\mathbb{R}^2}(x,y)$$

f est inversible par la droite (resp. gauche) par g elle est donc injective (resp. surjective). Elle est donc bien bijective et son application réciproque est $f^{-1} = g$.

Piero T. Colle de la semaine 4

> Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Solution :

On remarque que i n'est pas solution. En effet :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ (2i)^n \neq 0^n$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

$$(z+i)^n = (z-i)^n \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$$

$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad z+i = ze^{\frac{i2k\pi}{n}} - ie^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad z(1-e^{\frac{i2k\pi}{n}}) = -i(1+e^{\frac{i2k\pi}{n}})$$

$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad z = \frac{-i(1+e^{\frac{i2k\pi}{n}})}{(1-e^{\frac{i2k\pi}{n}})} \text{ et } k \neq 0$$

$$\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \quad z = \frac{-i(2\cos(\frac{k\pi}{n})e^{\frac{ik\pi}{n}})}{-2i\sin(\frac{k\pi}{n})e^{\frac{ik\pi}{n}}}$$

$$\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] \quad z = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$Sol = \left\{\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) : k \in [\![1, n-1]\!]\right\}$$

Billy . G

Khôlle de la semaine 4

Exercice 2
$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)+1=0$$

Solution : On résout l'équation : $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)+1=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$

On pose : $\omega=\frac{z+i}{z-i}$

On a : $\omega^3+\omega^2+\omega+1=0$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{3}\omega^k=0$

$\Leftrightarrow \frac{1-\omega^4}{1-\omega}=0$ (pour $\omega\neq 1$; $\omega=1$ n'est pas solution) (Formule)

$\Leftrightarrow \omega^4=1$

$\Leftrightarrow \omega\in\mathbb{U}_4$

Ainsi, on a : (description de $\mathbb{U}_4$)

$\omega=e^{\frac{2ik\pi}{4}}$ où $k\in[\![1;3]\!]$ (car $\omega\neq 1$)

On a : $\omega_1=i$; $\omega_2=-1$; $\omega_3=-i$.

Or : $\omega=\frac{z+i}{z-i}$

$\Leftrightarrow \omega(z-i)=z+i$ ($z\neq i$)

$\Leftrightarrow z-\omega z+i+i\omega=0$

$\Leftrightarrow z(1-\omega)=-(i+i\omega)$

$\Leftrightarrow z=\frac{-(i+i\omega)}{1-\omega}$ ($\omega\neq 1$)

$Sol=\{-1;0;1\}$

Anaé D — Rapport de colle — semaine 3

Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^6 + 2z^3 + 2 = 0$$

Solution :

Analyse : Supposons $z \in \mathbb{C}$ solution de $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$. On pose $Z = z^3$ avec $Z \in \mathbb{C}$. On a donc

$$Z^2 + 2Z + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (Z+1)^2 - 1 + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (Z+1)^2 - (-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (Z+1)^2 - (i^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (Z+1-i)(Z+i+1) = 0$$

$\mathbb{C}$ intègre $\Leftrightarrow \begin{cases} Z = -1+i \\ \text{ou} \\ Z = -1-i \end{cases}$

On cherche une forme trigonométrique de $-1+i$ et $-1-i$.

$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

D'où $-1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$|-1-i| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

D'où $-1-i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

Comme $Z = z^3$, on a $\begin{cases} z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \text{ou} \\ z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$

On trouve donc 2 candidats pour z.

Synthèse : Vérifions les candidats trouvés en fin d'analyse

- $z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 + 2\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 + 2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} + \sqrt{2}\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) + 2$$
$$= 2e^{i\frac{3\pi}{2}} + 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} + 2$$
$$= 2\left(0 + (-1)i\right) + 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2$$
$$= 0 - 2i - 2 + i2 + 2$$
$$= 0$$

Donc le premier candidat est vérifié

- $z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6 + 2\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^3 + 2 = 2e^{-i\frac{3\pi}{2}} + 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} + 2$$
$$= 2(0 + i) + 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2$$
$$= 0 + 2i - 2 - 2i + 2$$
$$= 0$$

Donc le deuxième candidat est vérifié

Conclusion : L'équation $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ d'inconnu $z \in \mathbb{C}$ a pour solution $\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Louis D Semaine n°4

$$\boxed{\text{Résoudre sur } \mathbb{C} \text{ l'équation } (z+i)^n = (z-i)^n}$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ $\quad \left((2i)^n \neq 0^n\right)$

$$(z+i)^n = (z-i)^n$$

$$\iff \Big(\underbrace{\frac{z+i}{z-i}}_{\in \mathbb{U}_n}\Big)^n = 1 \qquad (z - i \neq 0)$$

$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad z + i - z\,e^{i\frac{2k\pi}{n}} + i\,e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$$

$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad z\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$$

$$\iff \exists k \in [\![1^{*}, n-1]\!] \quad z = \frac{-i\left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)}{\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{*}\; e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{0} \\ \iff i\,2\frac{k\pi}{n} = 0 \\ \iff k = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!]$$

(angle moitié et Euler)

$$z = \frac{-i\,2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cancel{e^{i\frac{k\pi}{n}}}}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cancel{e^{i\frac{k\pi}{n}}}} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) : k \in [\![1, n-1]\!] \right\}$$

Jules R. Colle de la semaine 4

EXERCICE 4 — Résoudre l'équation $z^4 = \overline{z}^2$ où l'inconnue z appartient à $\mathbb{C}$.

Solution : (E_z) $z^4 = \overline{z}^2$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

0 est solution de cette équation.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
Alors, on peut écrire z sous la forme :
$$z = re^{i\theta} \quad \text{où } r \in \mathbb{R}_{>0} \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$
Ainsi :
$$z^4 = \overline{z}^2 \iff r^4 e^{i4\theta} = r^2 e^{-i2\theta} \quad \text{(Moivre}$$

$$\underset{\text{cas d'égalité forme trigo.}}{\iff} \begin{cases} r^4 = r^2 \\ \text{et} \\ 4\theta \equiv -2\theta \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r^2 = 1 \quad (r \neq 0) \\ \text{et} \\ \theta \equiv 0 \ [\frac{\pi}{3}] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = 1 \\ \text{et} \\ \theta \equiv 0 \ [\frac{\pi}{3}] \end{cases}$$

Ainsi :
$$\text{Sol} = \{0\} \cup \{e^{ik\frac{\pi}{3}} : k \in \mathbb{Z}\}$$

Hugo D. Colle de la semaine n°4

$\boxed{\text{Montrer que } f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z} - 2i \text{ est une bijection}}$

Solution : Montrons que f est bijective, i.e. que pour tout $y \in \mathbb{C}$, il existe un unique $z \in$ tel que $f(z) = y$

Soient $(z, y) \in \mathbb{C}^2$

$$f(z) = y \iff \bar{z} - 2i = y$$
$$\iff \overline{\bar{z} - 2i} = \bar{y} \quad \text{(Conjugué)}$$
$$\iff z + 2i = \bar{y} \quad \text{(Caractère involutif de la conjugaison)}$$
$$\iff z = \bar{y} - 2i$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{C}$, on trouve un unique $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = y$

Donc f est bijective

Louis Guillaume S. Colle de la semaine 4

Exercice 1. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) : \ 1 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = 0.$$

Solution : Soit $z \in \mathbb{C}$. On raisonne par équivalence pour déterminer les solutions de (E_1) :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ puisque i n'est pas solution (division par 0)

On pose $Z = \frac{z+i}{z-i}$

$$(E_1) \Leftrightarrow Z^3 + Z^2 + Z^1 + 1 = 0$$

On remarque que -1 est solution évidente puisque : $-1+1-1+1=0$

On peut alors factoriser par $(Z+1)$:

$$(E_1) \Leftrightarrow (Z+1)\underbrace{(Z^2 - Z + 1)}_{2 \text{ solutions}} = 0$$

$$Z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad Z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nous pouvons exprimer Z sous la forme exponentielle, tel que :

$$Z = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad Z = -e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Remplaçons pour trouver z :

1. $$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = ze^{i\frac{\pi}{3}} - ie^{i\frac{\pi}{3}} - i$$

$$\Leftrightarrow z\underbrace{\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}_{\neq 0} = -i\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-i\left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

② $\frac{z+i}{z-i} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z\left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = -i\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad z = \frac{-i\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}}}$$

③ $\frac{z+i}{z-i} = -1 \Leftrightarrow 2z = 0 \Leftrightarrow \boxed{z=0}$

Ainsi, les solutions de (E_1) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont :

$$S_{(E_1)} = \left\{0 ; \frac{-i\left(1+e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}{1-e^{-i\frac{\pi}{3}}} ; \frac{-i\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}}\right\}$$

Sophie G. Colle de la semaine 3

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^7 = 1$. Soit ω l'une des solutions différente de 1

b) Calculer $\sum_{k=0}^{6} \omega^k$

c) Calculer $\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6}$

d) En déduire la valeur de $\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{6\pi}{7}}$

Solution :

a) Soit $z^7 = 1$; $z \in \mathbb{C}$

Alors $z \in \mathbb{U}^7$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{7}} \,;\, k \in [\![0;6]\!] \right\}$$

b) $\sum_{k=0}^{6} \omega^k = \sum_{k=0}^{6} \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^k$ (Moivre)

$= \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^7}{1 - e^{i\frac{2\pi}{7}}}$ (somme géométrique $\omega \neq 1$)

$= \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{7}}}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0}$$ (car $e^{i2\pi} = 1$)

c) $\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6} = \frac{\omega(1+\omega^4)(1+\omega^6) + \omega^2(1+\omega^2)(1+\omega^6) + \omega^3(1+\omega^2)(1+\omega^4)}{(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^6)}$

Etudions les termes du numérateur

$\omega(1+\omega^4)(1+\omega^6) = \omega + \omega^5 + \underset{1}{\omega^7} + \omega^{11} = \omega + \boxed{\omega^4} + \boxed{\omega^5} + \omega^7$

$\omega^{10} = \omega^7 \times \omega^3$

$\omega^{11} = \omega^7 \times \omega^4$

$\omega^2(1+\omega^2)(1+\omega^6) = \omega^2 + \omega^4 + \omega^8 + \omega^{10} = \omega^2 + \omega^4 + \boxed{\omega^3} + \boxed{\omega^3}$

$\omega^3(1+\omega^2)(1+\omega^4) = \omega^3 + \omega^5 + \underset{\omega^0}{\boxed{\omega^7}} + \boxed{\omega^9} = \omega^3 + \omega^5 + \underset{\omega^0}{\boxed{\omega^7}} + \boxed{\omega^2}$

En les sommant on retrouve le numérateur $\left(\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0\right)^*$

$$\boxed{\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6}} = \frac{\overset{*}{(\omega^0 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6)} - \omega^6 + \overset{*}{\boxed{\omega^0 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6}} - \omega^6}{(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^6)}$$

$$= \frac{-2\omega^6}{\frac{\omega^{12}}{\omega^5} + \frac{\omega^{10}}{\omega^3} + \frac{\omega^8}{\omega^1} + 2\omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1} = \frac{-2\omega^6}{\underbrace{1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^8}_{\text{Par}(*)\ :\ 0}} = \boxed{-2}$$

d) Comme $\omega \in \mathbb{U}^7$ (ω est de module 1)

Posons $\omega = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$

Or $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$ (angle moitié)

Alors :

$$\frac{\omega}{1+\omega^2} = \frac{\cancel{e^{i\theta}}}{2\cos(\theta)\cancel{e^{i\theta}}}$$

$$\frac{\omega^2}{1+\omega^4} = \frac{\cancel{e^{i2\theta}}}{2\cos(2\theta)\times\cancel{e^{i2\theta}}}$$

$$\frac{\omega^3}{1+\omega^6} = \frac{\cancel{e^{i3\theta}}}{2\cos(3\theta)\cancel{e^{i3\theta}}}$$

J'ai $\frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6} = \frac{1}{2\cos(\theta)} + \frac{1}{2\cos(2\theta)} + \frac{1}{2\cos(3\theta)}$

Or $\theta = \frac{2k\pi}{7}$; $k \in [\![0, 6]\!]$

Par suite, pour $k = 1$

$$-2 = \frac{\omega}{1+\omega^2} + \frac{\omega^2}{1+\omega^4} + \frac{\omega^3}{1+\omega^6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos(\theta)} + \frac{1}{\cos(2\theta)} + \frac{1}{\cos(3\theta)}\right)$$

(Par c)

$\frac{2\pi}{7}$ $\frac{4\pi}{7}$ $\frac{6\pi}{7}$

$$\boxed{-4 = \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)}}$$

Sofia L. Colle de la semaine 4

Exercice 12. *On considère l'application*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x+2y). \end{array}$$

1. *Montrer que l'application f est bijective.*
2. *Déterminer l'image réciproque de $E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ u = v\}$.*

<u>Solution :</u>

1_ Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (2x+y, x+2y)$

<u>Mq</u> f est bijective

Soit $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés

$f(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

d'où $\begin{cases} x_2 = 2x_1 + y_1 & L_1 \\ y_2 = x_1 + 2y_1 & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 + y_1 \\ y_2 - \frac{1}{2} x_2 = x_1 + 2y_1 - x_1 - \frac{1}{2} y_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 + y_1 & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_1 \\ y_2 = \frac{1}{2} x_2 + \frac{3}{2} y_1 & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_1 = x_2 - \frac{1}{2} x_2 + y_1 - \frac{1}{2} y_1 \\ \frac{3}{2} y_1 = y_2 - \frac{1}{2} x_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1 \\ y_1 = \dfrac{y_2 - \frac{1}{2}x_2}{\frac{3}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + y_1 \\ y_1 = \left(y_2 - \frac{1}{2}x_2\right)\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + y_1 \\ y_1 = \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}x_2 \text{ par substitution} \\ y_1 = \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{3}y_2 \\ y_1 = \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}x_2 \end{cases}$$

pour tout $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a trouvé une unique solution. f est bijective.

Eliott SV

Colle de la semaine 4

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$ et $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longmapsto g(x) \end{array} \right.$ bijectives.

Demontrer que $h \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longmapsto g(x)f(x) \end{array} \right.$ n'est pas bijective.

<u>Solution</u>:

Par l'absurde.

Supposons h bijective. Alors :

$$\forall y \in \mathbb{Z}, \exists! x \in \mathbb{Z}, \ y = g(x)f(x)$$

En particulier pour $y = 1$; il vient :

$$g(x)f(x) = 1, \iff \begin{cases} g(x) = -1 \text{ et } f(x) = -1 \\ g(x) = 1 \text{ et } f(x) = 1 \end{cases} \text{ ou}$$

Et pour $y = -1$, il vient :

$$g(x)f(x) = -1, \iff \begin{cases} g(x') = -1 \text{ et } f(x') = 1 \\ g(x') = 1 \text{ et } f(x') = -1 \end{cases} \text{ ou}$$

Absurde ! En effet, g est bijective, hors -1 à deux antécédents par g, qui sont x et x'.

Ainsi, h n'est pas bijective.

Mathéo.N

Exercice de colles de la semaine 4.

EXERCICE 1 — Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et soit n un entier naturel. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

Solution : On pose : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{Re}(e^{ikx})}{\cos^k(x)}$$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right)$$

: $\cos^k(x) \in \mathbb{R}$ et une somme de parties réelles est la partie réelle de la somme.

Soit $S_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k$

- Pour $x \not\equiv 0 \, [\pi]$:

$$S_2(x) = \frac{1 - \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos(x)}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^{n+1}(x) - e^{ix(n+1)}}{\cos^{n+1}(x)}}{\frac{\cos(x) - e^{ix}}{\cos(x)}}$$

$$= \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos(x(n+1)) - i\sin(x(n+1))}{\cos^n(x)\left(\cos(x) - e^{ix}\right)}$$

$$= \frac{\cos^{n+1}(x) - \cos(x(n+1)) - i\sin(x(n+1))}{\cancel{\cos^{n+1}(x)} - \cancel{\cos^n(x)\cos(x)} - i\cos^n(x)\sin(x)}$$

$$= -\frac{1}{i}\,\frac{\cos^{n+1}(x) - \cos(x(n+1))}{\cos^n(x)\sin(x)} + \frac{\sin(x(n+1))}{\cos^n(x)\sin(x)}$$

$$= i\,\frac{\cos^{n+1}(x) - \cos(x(n+1))}{\cos^n(x)\sin(x)} + \frac{\sin(x(n+1))}{\cos^n(x)\sin(x)}$$

Ainsi : $S_n(x) = Re(S_2(x))$ Pour $x \not\equiv 0 [\pi]$.

$$= \frac{\sin(x(n+1))}{\cos^n(x)\sin(x)}$$

- <u>Pour $x \equiv 0 [\pi]$</u> :

$$S_2(x) = n+1$$

donc : $S_n(x) = n+1$

On a donc : $\boxed{S_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x(n+1))}{\cos^n(x)\sin(x)} & \text{si } x \not\equiv 0 [\pi] \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}}$

Rapport de colle, semaine 4

Wassim M.

Exercice: Soit z un nombre complexe de module 1. A quelle condition a-t-on $|1+z| \leq 1$?

Solution:

$|1+z| \leq 1$ avec $z \in \mathbb{C}$

On pose $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$

On a $e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$ (technique de l'angle moitié)

donc $|1+z| \leq 1$

$\iff \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta/2}\right| \leq 1$

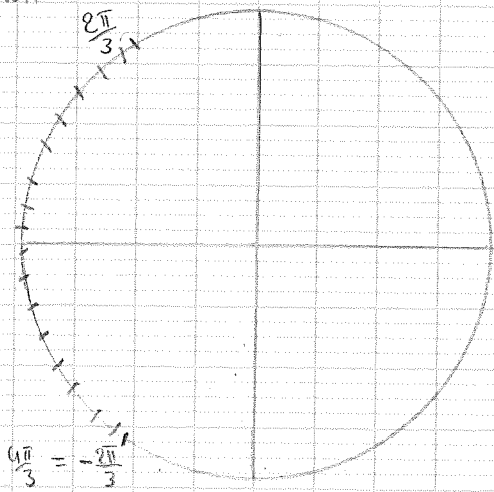
$\iff 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \underbrace{\left|e^{i\theta/2}\right|}_{=1} \leq 1$ (Propriétés sur le module)

$\iff \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}$

On résout l'équation: $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$

cas d'égalité de deux cosinus $\iff$ $\begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta = -\frac{2\pi}{3} + 4k\pi \end{cases}$$



Ainsi,

$|1+z| \leqslant 1$ si

l'argument de z est

dans l'intervalle

$[\frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3}]$

Ahmed
Amine S.

Énoncé :

Résoudre (E) : $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

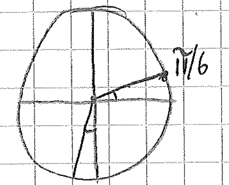
Solution : Analyse . Soit z solution de (E)

Posons $z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et (E) : $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

On a : $|z_1| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

et, θ l'argument de z_1 modulo 2π qui vérifie :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-1}{2} \\ \text{et} \\ \sin(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



Donc $\theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi - \pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$

Donc $z_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Alors : $z^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Donc $z^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4$ et $e^{i\pi/3} \neq 0$

Donc $\left(\frac{z}{e^{i\pi/3}}\right)^4 = 1$

$\in \mathbb{U}_4$

Donc $\exists k \in [\![0;3]\!]$ tq $\frac{z}{e^{i\pi/3}} = e^{i\frac{2k\pi}{4}}$

Alors $z = e^{i\pi/3} e^{i\frac{2k\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{4\pi + 6k\pi}{12}\right)}$

Synthèse.

Vérifions s'ils sont bien solutions de (E) :

$$\left(e^{i\left(\frac{4\pi + 6k\pi}{12}\right)}\right)^4 = e^{i\left(\frac{4\pi + 6k\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{3}} e^{i\frac{6k\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}\left(e^{i\pi}\right)^{2k} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Les candidats trouvés ~~sont~~ bien solutions de (E), donc :

$$Sol(E) = \left\{ e^{i\left(\frac{4\pi + 6k\pi}{12}\right)} : k \in [\![0;3]\!] \right\}$$

Maximilien T. Colle de la semaine 4

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$. a. Montrer que $T = \overline{S}$ et $\text{Im}(S) \geq 0$.
b. Calculer $S + T$ et ST. c. En déduire S et T.

Solution:

a. $\overline{S} = \overline{w + w^2 + w^4} = \overline{w} + \overline{w^2} + \overline{w^4}$ (Propriétés du conjugué)

$= e^{\frac{-2i\pi}{7}} + e^{\frac{-4i\pi}{7}} + e^{\frac{-8i\pi}{7}} = e^{\frac{12i\pi}{7}} + e^{\frac{10i\pi}{7}} + e^{\frac{6i\pi}{7}}$ (2π-périodicité et Moivre)

$= w^6 + w^5 + w^3 = T$

$\text{Im}(S) = \text{Im}\left(e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{4i\pi}{7}} + e^{\frac{8i\pi}{7}}\right)$

$= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$

$= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ (Transformation affine et imparité de sinus)

Or $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ et sinus est croissant sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

Ainsi $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \geq 0$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \geq 0$ $\left(0 < \frac{4\pi}{7} < \pi\right)$

$\text{Im}(S) \geq 0$

b. $S + T = w + w^2 + w^4 + w^3 + w^5 + w^6$

$= \sum_{k=1}^{6} w^k = \sum_{k=0}^{6} w^k - w^0$ $\left(w = e^{\frac{2i\pi}{7}} \neq 1\right)$

$= \frac{1 - w^7}{1 - w} - 1 = \boxed{-1}$ $\left(e^{2i\pi} = 1\right)$

$$ST = (w + w^2 + w^4)(w^3 + w^5 + w^6)$$

$$= w^4 + w^5 + w^7 + w^6 + w^7 + w^8 + w^7 + w^9 + w^{10}$$

$$= w^1 + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 + 3w^7 \quad (2\pi\text{-périodicité})$$

$$= S + T + 3 = \boxed{2} \quad (w^7 = 1)$$

c. Nous savons $S + T = -1$ et $ST = 2$

Pour trouver S et T il nous suffit de résoudre

$z^2 + z + 2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}\,i}{2}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}\,i}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}\,i}{2}\right) = 0$

$\mathbb{C}$ intègre

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i \\ \text{ou} \\ z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i \end{cases}$

Or nous savons de ⓐ que $Im(S) \geq 0$ ainsi

$\boxed{S = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i}$ et $\boxed{T = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i}$

Nous remarquons aussi que $\overline{S} = T$ ce qui est cohérent avec ⓐ.

Antoine B Colle de la semaine

10.

Reconnaître la transformation f :

a. $f(z) = -iz + 4i$ *b.* $f(z) = 3z + 3 - i$

Solution :

Soit $z \in \mathbb{C}$

Recherche du point fixe : $f(z) = z$

$\iff 3z + 3 - i = z$

$\iff 2z = -3 + i$

$\iff z = \frac{-3}{2} + \frac{1}{2}i$

la transformation f est une homothétie de point fixe $\Omega\left(\frac{-3}{2} + \frac{1}{2}i\right)$ et de rapport 3.

Raphaël M.

Colle de la semaine 4

Exercice : Montrer que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, montrer que $A = B = \emptyset$ lorsque $A\Delta B = A \cap B$, et montrer que $A\Delta B = A\Delta C$ si et seulement si $B = C$. On signale ou rappelle que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Solution :

Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Sachant $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$$(A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B}) \quad \text{(définition)}$$
$$= (A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}) \quad \text{(De Morgan)}$$
$$= \underbrace{(A\cap\bar{A})}_{\emptyset}\cup(A\cap\bar{B})\cup\underbrace{(B\cap\bar{B})}_{\emptyset}\cup(B\cap\bar{A}) \quad \text{(distributivité)}$$
$$= (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})$$
$$= (A / B)\cup(B / A)$$

Supposons $A \Delta B = A \cap B$

alors $(A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\cap B)$

$(A\cap B)$ est égal à un ensemble privé des éléments de $(A\cap B)$, donc $(A\cap B) = \emptyset$

ainsi $(A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\cup B) = \emptyset$

donc $A = B = \emptyset$

Supposons $A\Delta B = A\Delta C$ et montrons $B = C$

$\boxed{\subset}$ Supposons $x \in B$, montrons $x \in C$

<u>cas $x \in A\Delta B$:</u>

Comme $x \in B$ et $x \in (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

alors $x \notin A$

or $x \in (A\setminus C)\cup(C\setminus A)$ donc $x \in C$

<u>cas $x \notin A\Delta B$:</u>

Comme $x \in B$ et $x \notin (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

alors $x \in A$

or $x \notin (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$
donc $x \in C$

$\boxed{\supset}$ Deuxième cas analogues pour C devient B et inversement.

Mehdi B.

Exercice 1. Soit $a \notin \mathbb{U}$. Démontrer que $f_a(z) = \dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}$ définit une bijection de $\mathbb{U}$ sur lui-même et déterminer une expressions de ${f_a}^{-1}$.

<u>Solution :</u> Soit $a \notin \mathbb{U}$. Montrons d'abord que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $f_a(z) \in \mathbb{U}$, ie $|f_a(z)| = 1$

Soit $z \in \mathbb{U}$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
Par les propriétés du module :

$$|f_a(z)| = \frac{|e^{i\theta}+a|}{|1+\overline{a}e^{i\theta}| \times \underbrace{|e^{-i\theta}|}_{1}} = \frac{|e^{i\theta}+a|}{|e^{-i\theta}+\overline{a}|}$$

Comme $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et d'après les propriétés de la conjugaison complexe :

$$|f_a(z)| = \frac{|\overbrace{e^{i\theta}+a}^{\in \mathbb{C}}|}{|\underbrace{\overline{e^{i\theta}+a}}_{\in \mathbb{C}}|} = 1 \text{ donc } \boxed{f_a(z) \in \mathbb{U}}$$

- Nous avons établi : $f_a(z) \left| \begin{array}{l} \mathbb{U} \to \mathbb{U} \\ z \to \dfrac{z+a}{1+\overline{a}z} \end{array} \right.$

$f_a(z)$ est bien définie :
$$\begin{aligned} & \overline{a}z = -1 \\ \iff & |\overline{a}z| = 1 \\ \iff & |\overline{a}|\,|z| = 1 \\ \iff & \underbrace{|\overline{a}| = 1}_{\text{faux car } a \notin \mathbb{U} \text{ et } \overline{a} \notin \mathbb{U}} \end{aligned}$$

Ainsi $\overline{a}z \neq -1$, donc $\underbrace{1+\overline{a}z \neq 0}_{(*)}$.

Soit $y \in \mathbb{U}$ fixé. Résolvons l'équation (E) $\left| \begin{array}{l} f_a(z) = y \\ z \in \mathbb{U} \end{array} \right.$

$$f_a(z) - y = 0 \iff \frac{z + a - y - y\bar{a}z}{1 + \bar{a}z} = 0$$

$$\overset{1+\bar{a}z \neq 0 \text{ d'après } (*)}{\iff} z(1 - y\bar{a}) = y - a$$

$$\overset{\text{De même, } y \in \mathbb{U} \text{ donc } 1-\bar{a}y \neq 0}{\iff} z = \frac{y-a}{1-\bar{a}y} \boxed{= f_{-a}(y)}$$

Ainsi (E) possède une unique solution $z = f_{-a}(y)$

Nous avons démontré que $f_a(z)$ est bijective.
Son application réciproque est :

$$f_a^{-1}(z) = f_{-a}(z) \quad \text{avec } f_{-a}(z) \left| \begin{array}{l} \mathbb{U} \to \mathbb{U} \\ z \to \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z} \end{array} \right.$$

Louis B

Khôlle de la semaine 4

Résoudre $z^6+(7-i)z^3-8-8i$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$

Soit $P(z)=z^6+(7-i)z^3-8-8i$, $z\in\mathbb{C}$

On pose $Z=z^3$

On a donc $P(z)=Z^2+(7-i)Z-8-8i$

$$=\left(Z+\frac{7-i}{2}\right)^2-\frac{80}{4}-\frac{18}{4}i$$

$$=\left(Z+\frac{7-i}{2}\right)^2-\left(\frac{9+i}{2}\right)^2$$

$$=\left(Z+\frac{7-i}{2}-\frac{9+i}{2}\right)\left(Z+\frac{7-i}{2}+\frac{9+i}{2}\right)$$

donc on a $\begin{cases} Z=-8 \\ \text{ou} \\ Z=1+i \end{cases}$

Or $Z=z^3$, donc l'ensemble solution est l'ensemble solution des racines $3^{\text{èmes}}$ de -8 et de $1+i$:

$$S=\left\{\sqrt[3]{8}\,e^{i\frac{\pi}{3}},\ \sqrt[3]{8}\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)},\ \sqrt[3]{8}\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)},\ 2e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)},\ 2e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)},\ 2e^{i\left(\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)}\right\}$$

__Exercice 1__ Résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E) : 1 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = 0$$

__Solution__

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ $\quad \left(\frac{z+i}{z-i} \text{ est indéfini par } z = i\right)$

Posons $Z = \frac{z+i}{z-i}$

$$1 + Z + Z^2 + Z^3 = \sum_{k=0}^{3} Z^k = \begin{cases} \frac{1-Z^4}{1-Z} & \text{si } Z \neq 1 \\ 4 & \text{si } Z = 1 \end{cases}$$

Raisonnons par disjonction de cas

__1e cas__ $(Z = 1)$ Montrons par l'absurde que $Z \neq 1$

Supposons que $Z = 1$, alors :

$$\frac{z+i}{z-i} = 1$$

$\Leftrightarrow z + i = z - i \quad (z - i \neq 0)$

$\Leftrightarrow 2i = 0$ faux $\lightning$

Donc $Z \neq 1$

__2e cas__ $(Z \neq 1)$

$$\frac{1-Z^4}{1-Z} = 0$$

$\Leftrightarrow 1 - Z^4 = 0 \quad (1 - Z \neq 0)$

$\Leftrightarrow Z^4 = 1 \quad (\text{avec } Z \neq 1)$

$\Leftrightarrow Z \in \mathbb{U}_4 \setminus \{1\} = \left\{ e^{i\frac{2\pi k}{4}} : k \in [\![1, 3]\!] \right\} \quad (Z \neq 1 \text{ donc } k \neq 0)$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,3]\!] \quad \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2\pi k}{4}}$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,3]\!] \quad z + i - z e^{i\frac{2\pi k}{4}} + i e^{i\frac{2\pi k}{4}} = 0$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,3]\!] \quad z\left(1 - e^{i\frac{2\pi k}{4}}\right) + i\left(1 + e^{i\frac{2\pi k}{4}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,3]\!] \quad z = \frac{-i\left(1 + e^{i\frac{2\pi k}{4}}\right)}{1 - e^{i\frac{2\pi k}{4}}} \quad \left(1 - e^{i\frac{2\pi k}{4}} \neq 0\right)$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,3]\!] \quad z = \dfrac{-i\,(2\cos(\pi/4 \times k)\,e^{i\pi/4 k})}{-2i\sin(\pi/4 \times k)\,e^{i\pi/4 k}}$ (angle moitié)

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,3]\!] \quad z = \dfrac{\cos(\pi/4 \times k)}{\sin(\pi/4 \times k)}$

L'ensemble des solutions de l'équation $1+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=0$ est donc : $\{-1, 0, 1\}$

Stanislas G.	Colle de la semaine 4

2.

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$. Calculer: $\alpha+\beta, \alpha\beta, \alpha, \beta, \cos(\frac{2\pi}{5})$.

Solution: Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$

$$\alpha + \beta = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \sum_{k=0}^{4} \omega^k - 1$$

comme $\omega \neq 1$ $\quad \alpha + \beta = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} - 1$

or:

$\omega^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = 1$ donc $\boxed{\alpha + \beta = -1}$

$$\alpha\beta = (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3) = \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7$$

or: $\omega^6 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^6 = e^{i\frac{12\pi}{5}} = \underbrace{e^{i2\pi}}_{1}\underbrace{e^{i\frac{2\pi}{5}}}_{\omega^1} = \omega^1$

et

$\omega^7 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^7 = e^{i\frac{14\pi}{5}} = \underbrace{e^{i2\pi}}_{1}\underbrace{\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2}_{\omega^2} = \omega^2$

donc $\alpha\beta = \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \alpha + \beta$

donc $\boxed{\alpha\beta = -1}$

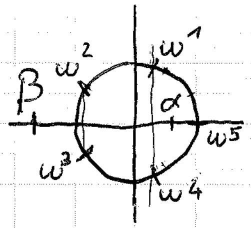
Comme $\alpha\beta = \alpha + \beta$, α et β sont les racines du polynome: $P(X) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta$ où $X \in \mathbb{C}$

$$= X^2 + 1X - 1$$

$$P(X) = \left(X - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 - \frac{5}{4} = \left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Les racines de $P(X)$ sont:

$$X_1 = \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{<0} \quad \text{ou} \quad X_2 = -\underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{>0}$$



de façon géométrique on s'apperçoit que $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

donc $\alpha = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

On sait que $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\left(\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\alpha}{2}$

donc $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

Nicolas H

Colle de la semaine 4

$\boxed{\text{Soit } z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}. \text{ Montrer que } \frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \iff |z| = 1.}$

Solution : Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$. Montrer que $|z|=1$

$\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z-i}{\underbrace{1-iz}_{\neq 0}} = k$

$\iff \exists k \in \mathbb{R} \quad z-i = k-ikz$

$\iff \exists k \in \mathbb{R} \quad z(1-ik) = k-i$

$\iff \exists k \in \mathbb{R} \quad z = \frac{k-i}{\underbrace{1-ik}_{\neq 0,\, k\in\mathbb{R}}}$

$\iff \exists k \in \mathbb{R}$

$|z| = \left|\frac{k-i}{1-ik}\right| = \frac{|k-i|}{|1-ik|} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^2+1}} = 1$

donc $|z|=1$

$\Leftarrow$ Supposons $|z|=1$ Mq $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$

Divisons $\frac{z-i}{1-iz}$ par son conjugué, si c'est égale à 1, $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$

$\frac{z-i}{1-iz} \times \frac{\overline{1-iz}}{\underbrace{\overline{z-i}}_{\neq 0}} = \frac{z+iz\bar{z}-i+\bar{z}}{z+i-iz\bar{z}+\bar{z}} = \frac{z+i\overbrace{|z|^2}^{=1}-i+\bar{z}}{z+i-i|z|^2+\bar{z}} = \frac{z+\bar{z}}{z+\bar{z}} = 1$

donc $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$

Alexandre M. Colle de la semaine 4

Enoncé

EXERCICE 1 — Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ et soit n un entier naturel. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ et soit $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right) \quad \text{[formule d'Euler]}$$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(e^{ix}\right)^k}{\cos^k(x)}\right) \quad \text{[formule de Moivre]}$$

$$= \mathrm{Re}\Bigg(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k}_{\text{somme de termes en progression géométrique.}}\Bigg) \quad \text{[propriété sur les puissances]}$$

Supposons $\frac{e^{ix}}{\cos(x)} = 1$

$\iff e^{ix} = \cos(x)$ $\quad [\, x \in \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}]$

$\iff \cos(x) + i\sin(x) = \cos(x)$

$\iff \sin(x) = 0$

$\iff \sin(x) = \sin(0)$

cas d'égalité de sinus :

$\iff \begin{cases} x \equiv 0 \;[2\pi] \\ \text{ou } x \equiv \pi \;[2\pi] \end{cases}$

$\iff \{ x \equiv 0 \;[\pi]$.

Ainsi, si $x \equiv 0 \;[\pi]$

$$S_n = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} 1^k\right)$$
$$= n+1$$

Si $x \not\equiv 0\ [\pi]$:

$$S_n = \operatorname{Re}\left(\frac{1-\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos(x)}}\right)$$

Rouyer. 6

Colle de la semaine 4

EXERCICE 6 — Résoudre $z^6+(7-i)z^3-8-8i$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Solution :

Soit $z\in\mathbb{C}$, solution de cette équation :

Posons $Z=z^3$:

On résout $Z^2+(7-i)Z-8-8i=0$

On trouve la forme canonique de ce polynôme :

$$Z^2+(7-i)Z-8-8i=\left(Z+\frac{7-i}{2}\right)^2-\left(\frac{7-i}{2}\right)^2-8-8i$$

$$=\left(Z+\frac{7-i}{2}\right)^2-\frac{49-1-14i}{4}-\frac{32}{4}-\frac{32i}{4}$$

$$=\left(Z+\frac{7-i}{2}\right)^2-\frac{48+32-14i+32i}{4}$$

$$Z^2+(7-i)Z-8-8i=\left(Z+\frac{7-i}{2}\right)^2-\frac{80+18i}{4}$$

On remarque que $\frac{80+18i}{4}=\frac{81-1+18i}{4}=\left(\frac{9+i}{2}\right)^2$

$$Z^2+(7-i)Z-8-8i=\left(Z+\frac{7-i}{2}\right)^2-\left(\frac{9+i}{2}\right)^2$$

$$=\left(Z+\frac{7-i-9-i}{2}\right)\left(Z+\frac{7+9-i+i}{2}\right)$$

$$=\left(Z+\frac{-2-2i}{2}\right)\left(Z+\frac{16}{2}\right)$$

$= (Z-1-i)(Z+8)$

$(\mathbb{C}$ intègre$) \iff Z = 1+i$ ou $Z = -8$

Ainsi $y^6 + (7-i)y^3 - 8 - 8i = 0 \iff y^3 = 1+i$ ou $y^3 = -8$

Disjonction de cas :

1er cas : $y^3 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(\sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3$

$\iff \dfrac{y^3}{\left(\sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3} = 1$

$\iff \dfrac{y}{\sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{12}}} \in \mathbb{U}_3$

$\iff \exists k \in [\![0;2]\!] \quad \dfrac{y}{\sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{12}}} = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$

$\iff \exists k \in [\![0;2]\!] \quad y = \sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)}$

2ème cas : $y^3 = -8 = 8e^{i\pi} = \left(\sqrt[3]{8} e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3$

$\iff \dfrac{y^3}{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3} = 1$

$\iff \dfrac{y}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} \in \mathbb{U}_3$

$\iff \exists k \in [\![0;2]\!] \quad \dfrac{y}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$

$\iff \exists k \in [\![0;2]\!] \quad y = 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$

Ainsi

$S = \left\{ \sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)} : k \in [\![0;2]\!] \right\} \cup \left\{ 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}} : k \in [\![0;2]\!] \right\}$

Adam M.

Colle de la semaine 4

Exercice 1 : a) Résoudre l'équation : $z^2 = -3-4i$

b) Résoudre l'équation : $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$

Solution :

1. a.

Analyse : Soit $z \in \mathbb{C}$, solution de l'équation $z^2 = -3-4i$

On pose $z = a+ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}$

Donc $z^2 = a^2 - b^2 + i2ab$

Par unicité de la forme algébriques

$(L_1)\begin{cases} a^2-b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases}$
(L_2)
(L_3)

$(L_3)+(L_1)$: $2a^2 = 2$ donc $a=1$ ou $a=-1$

$(L_3)-(L_1)$: $2b^2 = 8$ donc $b=2$ ou $b=-2$

(L_2) indique que a et b sont de signes opposés

On obtient alors 2 candidats en fin d'analyse :

$z_1 = 1-2i$ et $z_2 = -z_1$

Synthèse :

Vérifions si z_1 et z_2 solution de l'équation

$z_1^2 = (-z_2)^2$

$z_1^2 = (1-2i)^2 = 1-4-i\,2\times2\times1 = -3-4i$

Donc z_1 et z_2 sont bien solutions

b. $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$ (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$\iff i\left(z^2 + \left(\frac{4i-3}{i}\right)z + 1 + 5i\right) = 0$$

$$\iff i\left(z^2 + 2\left(2+\frac{3}{2}i\right)z + \left(2+\frac{3}{2}i\right)^2 + 1 + 5i\right) = 0$$

$$\iff \left(z+2+\frac{3}{2}i\right)^2 - 4 + \frac{9}{4} - 6i + 5i + 1 = 0$$

$$\iff \left(z+2+\frac{3}{2}i\right)^2 - 3 + \frac{9}{4} - i = 0$$

$$\iff \left(z+2+\frac{3}{2}i\right)^2 - \frac{3+4i}{4} = 0$$

$$\iff \left(z+2+\frac{3}{2}i\right)^2 - \left(\frac{1-2i}{2i}\right)^2 = 0 \quad \text{(D'après Q1)}$$

$$\iff \left(z+2+\frac{3}{2}i - i\frac{1}{2} - 1\right)\left(z+2+\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}i + 1\right) = 0$$

$$\iff (z+1+i)(z+3+2i) = 0$$

$$\iff \begin{cases} z = -1-i \\ \text{ou} \\ z = -3-2i \end{cases}$$

$$S_{(E)} = \{-1-i\,,\ -3-2i\}$$

Titouan
D

Résoudre l'équation $z^2 = -12 - 16i$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$

Analyse : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = -12 - 16i$

$(a+ib)^2 = -12 - 16i$

$(a^2 - b^2) + i(2ab) = -12 - 16i$

on a donc

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -12 & L_1 \\ 2ab = -16 & L_2 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 & L_3 \end{cases}$$ (égalité des modules)

$L_1 + L_3$ nous livre $2a^2 = 8$

donc $a = 2$ ou $a = -2$

$L_3 - L_1$ nous livre $2b^2 = 32$

donc $b = 4$ ou $b = -4$

L_2 nous livre le signe combiné de a et b

donc a et b de signes opposés

Nous avons deux candidats $z_1 = 2 - 4i$ et $z_2 = -2 + 4i$

Synthèse : on remarque que $z_1 = -z_2$ donc $z_1^2 = z_2^2$

$z_1^2 = (2 - 4i)^2$

$= (4 - 16) + 2i(2 \times (-4))$

$= -12 - 16i$

$\boxed{\text{Donc les solutions de } z^2 = -12 - 16i \text{ sont } 2 - 4i \text{ et } -2 + 4i.}$

Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = (4 + 2i)^2 - 4 \times 1 \times (6 + 8i)$

$= -12 - 16i$

Soit δ une racine de Δ

D'après la question précédente on pose $\delta = 2 - 4i$

Les solution de l'équation (E) sont donc

$$z_1 = \frac{-2(2+i) + \delta}{2\times 1} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2(2+i) - \delta}{2\times 1}$$

$$z_1 = \frac{-2(2+i) + 2 - 4i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2(2+i) - 2 + 4i}{2}$$

$$\boxed{z_1 = -1 - 3i \quad \text{et} \quad z_2 = -3 + i}$$

Célia 1. Semaine n° 4

Exercice 1. Soit $a \notin \mathbb{U}$. Démontrer que $f_a(z) = \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ définit une bijection de $\mathbb{U}$ sur lui-même et déterminer une expressions de ${f_a}^{-1}$.

Solution Afin que f_a définisse une bijection de $\mathbb{U}$ sur lui-même, il faut qu'elle soit définie de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$.

Supposons que son ensemble de départ soit $\mathbb{U}$. Alors $|z| = 1$.

Montrons que son ensemble d'arrivée est $\mathbb{U}$, soit que $\left|\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}\right| = 1$.

Or, si $|f_a(z)| = 1$, $|z+a| = |1+\bar{a}z|$.

On cherche donc à savoir si $|z+a| = |1+\bar{a}z|$.

$$\left|\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right| = \left|\frac{(z+a)\bar{z}}{1+\bar{a}z}\right| \quad \text{car } |z| = |\bar{z}| = 1.$$

$$= \left|\frac{1+a\bar{z}}{1+\bar{a}z}\right|.$$

Or, $|1+a\bar{z}| = |1+\bar{a}z|$ car $|Z| = |\bar{Z}|$ avec $Z \in \mathbb{C}$.

D'où $\left|\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}\right| = 1$.

$\boxed{\text{Ainsi, } f_a \text{ est bien définie de } \mathbb{U} \text{ dans } \mathbb{U}.}$

Maintenant, on cherche à savoir si f_a est bijective. f_a est bijective si, et seulement si, elle admet une application réciproque. Par conséquent, si on détermine l'application réciproque ${f_a}^{-1}$, on prouve que f_a est bijective.

Pour déterminer l'application réciproque de f_a, on résout $\left| \begin{array}{l} f_a(z) = y \\ z \in \mathcal{U} \end{array} \right.$ avec $y \in \mathcal{U}$ fixé.

<u>Analyse</u> Supposons $f_a(z) = y$ avec $y \in \mathcal{U}$ fixé.

D'où
$$\frac{z+a}{1+\bar{a}z} = y$$
$$\Leftrightarrow \quad z + a = y + \bar{a}zy$$
$$\Leftrightarrow \quad z(1-\bar{a}y) = y - a$$
$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{y-a}{1-\bar{a}y}.$$

$1-\bar{a}y \neq 0$ car $\bar{a}y \neq 1$ avec $y \in \mathcal{U}$ et $a \notin \mathcal{U}$.

On a donc pour unique candidat

$$\boxed{f_a^{-1}(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}}$$

<u>Synthèse.</u> On vérifie si f_a^{-1} est bien l'application réciproque de f_a. On pose $z_0 \in \mathcal{U}$.

$$\bullet\ f_a^{-1} \circ f_a(z_0) = \frac{\left(\frac{z_0+a}{1+\bar{a}z_0}\right) - a}{1 - \bar{a}\left(\frac{z_0+a}{1+\bar{a}z_0}\right)} = \frac{\frac{z_0 + a - a - \bar{a}z_0 a}{1+\bar{a}z_0}}{\frac{1+\bar{a}z_0 - \bar{a}z_0 - \bar{a}a}{1+\bar{a}z_0}}$$
$$= \frac{z_0(1-\bar{a}a)}{1-\bar{a}a} = z_0 = id_{\mathcal{U}}(z_0)$$

$$\bullet\ f_a \circ f_a^{-1}(z_0) = \frac{\left(\frac{z_0-a}{1-\bar{a}z_0}\right) + a}{1 + \bar{a}\left(\frac{z_0-a}{1-\bar{a}z_0}\right)} = \frac{\frac{z_0 - a + a - a\bar{a}z_0}{1-\bar{a}z_0}}{\frac{1-\bar{a}z_0 + \bar{a}z_0 - \bar{a}a}{1-\bar{a}z_0}}$$
$$= \frac{z_0(1-\bar{a}a)}{1-\bar{a}a} = z_0 = id_{\mathcal{U}}(z_0).$$

<u>Conclusion.</u> f_a définit bien une bijection de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$ et f_a^{-1} est son application réciproque.

Lina A. Colle de la semaine 4.

Exercice 1 : a) Résoudre l'équation : $z^2 = -3-4i$

b) Résoudre l'équation : $iz^2+(4i-3)z+i-5=0$.

Solution :

a) Raisonnons par analyse-synthèse :

* Analyse : Supposons qu'il existe un $z \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$z^2 = -3-4i$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, posons $z = a+ib$

Ainsi :

$$a^2 - b^2 + 2aib = -3-4i$$

Par unicité de la forme algébrique :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 & L_1 \\ 2ab = -4 & L_2 \\ a^2+b^2 = 5 & L_3 \end{cases}$$

$L_3 + L_1$: $a^2 = 1$ donc $a = 1$ ou $a = -1$

$L_3 - L_1$: $b^2 = 4$ donc $b = 2$ ou $b = -2$

L_2 nous renseigne sur le signe de a et b :
comme $ab<0$, nous déduisons que a et b sont de signes opposés

Nous proposons alors deux candidats pour vérifier l'équation

$$z_1 = 1-2i \quad \text{et} \quad z_2 = -z_1$$

* Synthèse : Vérifions si les candidats obtenus en fin d'analyse sont solutions de l'équation.

$$z_1^2 = z_2^2 = (1-2i)^2 = 1-4-4i = -3-4i$$

Donc les racines carrées de $-3-4i$ sont

$$\boxed{z_1 = 1-2i \quad \text{et} \quad z_2 = -1+2i}$$

b) Résolvons l'équation :

$iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$. d'inconnu $z \in \mathbb{C}$

Posons : $P(z) = iz^2 + (4i-3)z + i - 5$

Ainsi :

$$P(z) = i\left[z^2 - i(4i-3)z + 1 + 5i\right]$$

$$= i\left[z^2 + (3i+4)z + 1 + 5i\right].$$

$$= i\left[\left(z + \frac{3i+4}{2}\right)^2 - \frac{(3i+4)^2}{4} + 1 + 5i\right]$$

$$= i\left[\left(z + \frac{3i+4}{2}\right)^2 - \frac{3+4i}{4}\right]$$

$$= i\left[\left(z + \frac{3i+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1(-3-4i)}{4}\right)\right]$$

or d'après la question a les racines carrées de $-3-4i$ sont $1-2i$ et $-1+2i$

Et donc : $P(z) = i\left(z + \frac{3i+4-i-2}{2}\right)\left(z + \frac{3i+4+i+2}{2}\right)$

$$= i\,(z+i+1)\,(z+2i+3).$$

Ainsi $P(z) = 0 \iff i\,(z+i+1)(z+2i+3) = 0.$

$\mathbb{C}$ intègre $\iff \begin{cases} z = -i-1 \\ \text{ou} \\ z = -2i-3 \end{cases}$

Donc : $\boxed{S = \{-1-i\,;\,-2i-3\}}$

Léa N.

Colle semaine n° 4

Énoncé :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation
$$(z+i)^n = (z-i)^n$$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$.

$$(z+i)^n = (z-i)^n$$

Supp. $z - i = 0$

donc $z = i$

Or $(-1)^n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc $z \neq i$

et $z - i \neq 0$

Alors on a : $(z+i)^n = (z-i)^n$

$$\underset{\times\frac{1}{(z-i)^n} \neq 0}{\iff} \frac{(z+i)^n}{(z-i)^n} = 1$$

$$\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1$$

$$\underset{\text{(propriété de } \mathbb{U}_n\text{)}}{\iff} \exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad \frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

$$\iff z + i = ze^{i\frac{2k\pi}{n}} - ie^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

$$\iff z\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$$

1er cas :

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$$

Donc $0 = -i\left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$

Alors cette équation n'a pas de solution pour
$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$$

2e cas : $e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 1$

$$\iff z = -i\,\frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$$

$$\iff z = -i\,\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}}$$

$$\iff z = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

Donc $Sol = \left\{ \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} : k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$

Exercice 3 : Soient f et g deux bijections de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que l'application $h : k \mapsto f(k)\, g(k)$ n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

[redacted]

Timothée. F

On considère $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ k \mapsto k \end{array} \right.$ et $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ k \mapsto -k \end{array} \right.$.

Il est clair que f et g sont des bijections de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

On pose $h \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ k \to f(k)g(k) \\ \quad\;\; = -k^2 \end{array} \right.$ une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. h n'est pas une bijection : en effet l'équation (E): $1 = h(k)$, d'inconnue k dans $\mathbb{Z}$ n'a pas de solution.

Thibault N. Colle semaine 4

EXERCICE 4 — Résoudre l'équation $z^4 = \overline{z}^2$ où l'inconnue z appartient à $\mathbb{C}$.

Solution :

On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $z \in \mathbb{C}$ solution de $z^4 = \overline{z}^2$ avec $z \in \mathbb{C}$.

$z^4 = \overline{z}^2$ donc $(z^2)^2 = \overline{z}^2$

donc $z^2 = \overline{z}$ ou $z^2 = -\overline{z}$

$z \in \mathbb{C}$ donc $z = re^{it}$ avec $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$.

d'où $(re^{it})^2 = re^{-it}$ ou $(re^{it})^2 = -re^{-it}$

Par cas d'égalité de formes trigonométriques ~~ou a~~ et Moivre :

$$\left(r^2 = r \text{ et } 2t \equiv -t\,[2\pi]\right) \text{ ou } \left(\underbrace{r^2}_{>0} = \underbrace{-r}_{<0} \text{ et } 2t \equiv -t\,[2\pi]\right)$$

donc $\underset{>0}{r} = 1$ et $t \equiv 0\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou impossible.

ainsi $z \in \left\{e^{i\frac{2\pi l}{3}} : l \in \mathbb{Z}\right\}$. d'où $z \in \mathbb{U}_3 = \left\{e^{i\frac{2l\pi}{3}} : l \in [\![0;2]\!]\right\}$

On trouve ainsi 3 candidats : $\boxed{z_1 = 0,\ z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}},\ z_3 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

Synthèse : Soit z_1, z_2, z_3 tels qu'en fin d'analyse. On vérifie qu'ils sont solution de : $z^4 = \overline{z}^2$ avec $z \in \mathbb{C}$.

$0^4 = 0 = \bar{0}^2$ donc z_1 est solution.

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 = e^{i\frac{8\pi}{3}} \quad \text{Par Moivre}$$
$$= \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^2$$
$$= \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^2$$
$$= \left(\overline{e^{\frac{2\pi}{3}}}\right)^2 \quad \text{donc } z_2 \text{ est solution.}$$

$$\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 = e^{-i\frac{8\pi}{3}} \quad \text{Par Moivre}$$
$$= \left(e^{-i\frac{4\pi}{3}}\right)^2$$
$$= \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2$$
$$= \left(\overline{e^{-\frac{2i\pi}{3}}}\right)^2 \quad \text{donc } z_3 \text{ est solution.}$$

On conclut que les solutions de $z^4 = \bar{z}^2$ avec $z \in \mathbb{C}$ sont :

$$\boxed{Sol = \left\{ 0 ; e^{\frac{2i\pi}{3}} ; e^{-\frac{2i\pi}{3}} \right\}}$$

Exercice : Montrer que l'application $f(x) = 2x + 3$ est injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Trouver une application surjective non triviale de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Par ailleurs, montrer que la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $f(k) = 2k$ si $k \geq 0$ et $f(k) = -1 - 2k$ si $k < 0$ est bijective.

Solution :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto 2x+3 \end{array} \right.$$

Montrons que f est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$. Mq : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Supposons $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

f est injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Application surjective non triviale de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si } x \equiv 0 \ [3] \\ \dfrac{x+2}{3} & \text{si } x \equiv 1 \ [3] \\ \dfrac{x+1}{3} & \text{si } x \equiv 2 \ [3] \end{cases} \end{array} \right.$$

1/2

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Montrons que f est bijective.

Mq pour tout $y \in \mathbb{N}$, l'équation $\left| \begin{array}{l} f(x) = y \\ \text{inc } x \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$ possède une unique solution.

Soit $y \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{Z}$.

On raisonne par disjonction de cas.

si y est impair, $y = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff -2x-1 = 2k+1 \quad \text{ou} \quad 2x = 2k+1 \\ &\iff -2x = 2k+2 \quad \text{ou} \quad x = k + \frac{1}{2} \\ &\iff \underline{x = -k-1 \in \mathbb{Z}} \quad \text{ou} \quad x \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

si y est pair, $y = 2k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(x) = y \iff & -2x-1 = 2k \quad \text{ou} \quad 2x = 2k \\ & x = -k - \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \underline{x = k \in \mathbb{N}} \\ & x \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = y$ admet bien une unique solution selon la parité de y, donc f est bijective.

2/2

Tiguin

Colle de la semaine 3

Déterminer les deux nombres complexes ayant $1+i$ pour carré et en déduire le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{8}$

- Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $z^2 = 1+i$. On résout l'équation d'inconnue z

$z^2 = 1+i \iff z^2 - (1+i) = 0$

(forme Trigo) $\iff z^2 - (\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}) = 0$

$\iff z^2 - (\sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}})^2 = 0$

$\iff (z - \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{8}})(z + \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}) = 0$

$\iff \begin{cases} z = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}} \\ \text{ou} \\ z = -\sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}} \end{cases}$

- Puis on résout $z^2 = 1+i$ par analyse synthèse
  - Analyse : Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $z^2 = 1+i$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $z = a+ib$

Alors $z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$

Par unicité de la forme ~~trigonométrique~~ algébrique

$\begin{cases} L_1 & a^2 - b^2 = 1 \\ L_2 & 2ab = 1 \\ L_3 & a^2 + b^2 = \sqrt{2} \end{cases}$

$L_1 + L_3$ donne $a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ ou $a = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

$L_3 - L_1$ donne $b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou $b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

D'après L_2 a et b sont du même signe donc on a deux candidats

$z = \underbrace{\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}}_{z_0}$ et $z = -z_0$

- Synthèse :

$(-z_0)^2 = z_0^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} + 2i\sqrt{\frac{1}{4}}$

$= 1+i$

Ensuite par unicité de la forme algébrique

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = \sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{donc} \quad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{alors} \quad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}}{4}} \quad \text{et donc} \quad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \quad [2\pi]$$

Ainsi :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \sqrt[4]{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{donc} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{alors} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad [2\pi]$$

Léon . N

Colle de la semaine n°4

Soit $z \in \mathbb{C}$, résoudre l'équation $(z-i)^6 = (z+i)^6$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$z \in \mathbb{C}$ solution de $(z-i)^6 = (z+i)^6$ $\cancel{\Leftrightarrow}$ ↯ donc $z \neq -i$

$(-i-i)^6 = -64$ et $(-i+i)^6 = 0$.

$z \in \mathbb{C}$ solution de $(z-i)^6 = (z+i)^6 \underset{z \neq i}{\Leftrightarrow} \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^6 = 1$

$\Leftrightarrow \exists\, l \in [\![0,5]\!]$ tel que $\frac{z-i}{z+i} = e^{i\frac{\cancel{5}2l\pi}{6}} = e^{i\frac{l\pi}{3}}$
$\left(\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{U}_6\right)$

$\Leftrightarrow$ Cas $l=0$: $\frac{z-i}{z+i} = 1 \Leftrightarrow 0 = 2i$ ↯

pas de solutions

Cas $l \in [\![1,5]\!]$, $z = \frac{1+e^{i\frac{l\pi}{3}}}{\underbrace{1-e^{i\frac{l\pi}{3}}}_{\neq 0 \text{ car } l \neq 0.}}$

$\Leftrightarrow \exists l \in [\![1,5]\!]$ tel que $z = \frac{2\cos\left(\frac{\cancel{2}l\pi}{6}\right)e^{i\frac{l\pi}{6}}}{-2i\sin\left(\frac{l\pi}{6}\right)e^{i\frac{l\pi}{6}}}$
(angle moitié)

$\Leftrightarrow$ $\boxed{Sol = \left\{ i\cotan\left(\cancel{\tfrac{2l\pi}{6}}\ \frac{l\pi}{6}\right) ; l \in [\![1,5]\!] \right\}}$

Ibrahim. K Colle de la Semaine 4

Exercice 1 :

a) Résoudre l'équation (E) $z^2 = -12 - 16i$

b) Résoudre l'équation (E') $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

Solution : a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ainsi :

Analyse :

Soit $z = a + ib$ solution (E) ainsi on a :

$(a+ib)^2 = -12 - 16i$ donc :

$a^2 - b^2 + 2iba = -12 - 16i$ ainsi par unicité de la forme algébrique on a :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -12 & L_1 \\ 2ab = -16 & L_2 \\ a^2 + b^2 = 20 & L_3 \end{cases}$$ (égalité des Modules)

$(L_1 + L_3)$ livre que : $a^2 = 4$ ainsi $a = 2$ ou $a = -2$

$(L_3 - L_1)$ livre que : $b^2 = 16$ ainsi $b = 4$ ou $b = -4$

(L_2) livre que a et b sont de signe opposé ainsi les solutions possible sont : $2 - 4i$ ou $-2 + 4i$

Synthèse

On remarque que les deux solutions possibles sont conjugués ainsi il suffit de vérifier pour une seule solution :

ainsi $(2-4i)^2 = 4 - 16 - 2.8i = -12 - 16i$

ainsi

$$Sol_E = \{(2-4i) ; (-2+4i)\}$$

2). Soit $z \in \mathbb{C}$ tq z est solution de E_1 ainsi

z est solution de $E_1 \iff z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

$$\iff z^2 - 2(2+i)z + 3 + 4i + 3 + 4i = 0$$

$$\iff z^2 - 2(2+i)z + (2+i)^2 + 3 + 4i = 0$$

$((2+i)^2 = 3+4i)$

$$\iff (z-(2+i))^2 + 3 + 4i = 0$$

$-(i^2)(2+i)^2 = +(2+i)^2$

$$\iff (z-(2+i))^2 - (i^2(2+i)^2) = 0$$

$$\iff (z-(2+i))^2 - (2i-1)^2$$

(identités remarquables)

$$\iff (z-2-i+2i-1)(z-2-i-2i+1) = 0$$

$$\iff (z-3+i)(z-1-3i) = 0$$

$\mathbb{C}$ intègre

$$\iff z = 3-i \text{ ou } z = 3i+1$$

$$\iff Sol_{E_1} = \{(3-i), (1+3i)\}$$

Rémi S.

EXERCICE 5 — Soit $\alpha \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos(\alpha)$ où l'inconnue z appartient à $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

Solution :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1;1\}$, avec le changement de variable $X = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$, on a

$$X + \frac{1}{X} = 2\cos(\alpha)$$

$$\iff X^2 + 1 - 2\cos(\alpha) X = 0$$

$$\iff (X - \cos(\alpha))^2 - \cos^2(\alpha) + 1 = 0$$

$$\iff (X - \cos(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha) = 0$$

$$\iff (X - \cos(\alpha))^2 - (i\sin(\alpha))^2 = 0$$

$\mathbb{C}$ est intègre $\longrightarrow$ $\iff (X - \cos(\alpha) - i\sin(\alpha))(X - \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = 0$

$$\iff X = e^{i\alpha} \text{ ou } X = e^{-i\alpha}$$

On a $e^{i\alpha} = \overline{e^{-i\alpha}}$ donc cherchons les solutions de $e^{i\alpha} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$.

$$e^{i\alpha} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$$

$$\iff \left(e^{i\alpha/n}\right)^n = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$$

$$\iff \left(e^{i\alpha/n} \times \frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$

$\in \mathbb{U}_n$

$$\iff e^{i\alpha/n} \times \left(\frac{z+1}{z-1}\right) = e^{i\frac{\pi 2k}{n}} \text{ avec } k \text{ allant dans } [\![0;n-1]\!]$$

$$\iff \exists k \in [\![0;n-1]\!] \text{ tq } z+1 = e^{i\frac{\pi 2k}{n} - \frac{i\alpha}{n}} z - e^{i\frac{\pi 2k}{n} - \frac{i\alpha}{n}}$$

$$\iff \exists k \in [\![0;n-1]\!] \text{ tq } z\left(1 - e^{i\frac{2\pi k}{n} - \frac{i\alpha}{n}}\right) = -\left(e^{i\frac{\pi 2k}{n} - i\alpha/n} + 1\right)$$

angle moitié $\longrightarrow$ $\iff \exists k \in [\![0;n-1]\!] \text{ tq } z = \dfrac{+2\cancel{e^{i\pi k/n - \alpha/2n}} \cos\left(\frac{\pi k}{n} - \alpha\right)}{+2i\cancel{e^{i\pi/n - \alpha/2n}} \sin\left(\frac{\pi k}{n} - \alpha\right)}$

$$\boxed{\text{Ainsi} \quad Sol = \left\{ i\,\mathrm{cotan}(\pi k - \alpha) \,;\, -i\,\mathrm{cotan}(\pi k - \alpha) \right\}}$$

Ex3: Résoudre l'équation

$$(3z^2+z+1)^2+(z^2+2z+2)^2=0$$

où l'inconnue z appartient à $\mathbb{C}$

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Résoudre $P(z)$: $(3z^2+z+1)^2+(z^2+2z+2)^2=0$

$$(3z^2+z+1)^2+(z^2+2z+2)^2$$
$$= (3z^2+z+1)^2 - i^2(z^2+2z+2)^2$$
$$= (3z^2+z+1+i(z^2+2z+2))(3z^2+z+1-i(z^2+2z+2))$$

Donc résoudre $P(z)$ vient à résoudre :

$$(3z^2+z+1+iz^2+i2z+i2)=0$$

donc $\boxed{z^2(3+i)+z(1+2i)+1+2i=0}$

On cherche le discriminant de ce polynome de second degrée :

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$= (1+2i)^2 - 4(3+i)(1+2i)$$
$$= 1+4i-4-12-24i-4i+8$$
$$= -7-24i$$

On cherche les racines carrées de $-7-24i$.

Analyse :

Soit $z^2 = -7 - 24i$, $z = a + ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

donc $\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 & L_1 \\ 2ab = -24 & L_2 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{625} = 25 & L_3 \end{cases}$ (cas d'égalité de forme algébrique) (cas d'égalité de module)

$L_1 + L_3$: $2a^2 = 18$ donc $a = 3$ ou -3

$L_3 - L_1$: $2b^2 = 32$ donc $b = 4$ ou -4

L_2 donne que a et b sont de signes opposés

Donc $z = 3 - 4i$ et $-z$

Synthèse :

$$(z)^2 = (-z)^2 = (3 - 4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i$$

Donc les racines carrés de $-7 - 24i$ sont :

$$\boxed{z = 3 - 4i \text{ et } -z}$$

Donc les racines du polynome sont :

$$z_1 = \frac{-b - z}{2a} = \frac{-1 - 2i - 3 + 4i}{2(3+i)} = -\frac{7}{10} - i\frac{1}{10} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + z}{2a} = \frac{-1 - 2i + 3 - 4i}{2(3+i)} = -i$$

Donc $\boxed{S = \left\{ -\frac{7}{10} - i\frac{1}{10} \ ; \ -i \right\}}$