Robin G. Colle de la semaine 30

Soit $f : (S_n, \circ) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ morphisme.
a) Montrer que pour toute transposition τ, $f(\tau) = 1$ ou $f(\tau) = -1$
b) Montrer que pour tout cycle d'ordre 3 c, $f(c) = 1$.
c) Montrer que toutes les transpositions ont même image par f et conclure.

Solution :

a) Soit $\tau \in S_n$ transposition.
• $\tau \circ \tau = id_{[\![1,n]\!]}$ (τ involutive).

Donc $f(\tau \circ \tau) = f(\tau)^2$ (f morphisme)
$= f(id)$
$= 1$ (f morphisme)

Donc $\underline{f(\tau) = 1 \text{ ou } f(\tau) = -1}$.

b) Soit $c \in S_n$ tel que $c^3 = id_{[\![1,n]\!]}$ et $c \neq id_{[\![1,n]\!]} \neq c^2$.
• $f(c)^3 = f(id) = 1$
• c est d'ordre 3 donc il existe 2 transpositions τ_1, τ_2 de S_n telles que $c = \tau_1 \circ \tau_2$

$f(c) = f(\tau_1) f(\tau_2) \in \{-1, 1\}$ par a)

Si $f(c) = -1$, alors $f(c)^3 = -1$ ce qui n'est pas.

Donc $\underline{f(c) = 1}$.

1/2

~~c) Soit $\tau \in S_n$ transposition, telle que $\tau = (i\ j)$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $i \neq j$.~~
~~Soient k, $[\![1,n]\!]$ tq $k \neq$ et k~~
~~Alors~~

~~$\tau = (j\ i\ k) \circ (i\ j) \circ$~~

~~et $f(\tau) = f(\tau$~~

c) Soient $\tau_1 = (i\ j)$, $\tau_2 = (h\ l)$, telles que i, j, h, l 2 à 2 distincts.

$$\tau_1 = \underbrace{(l\ j\ i)}_{} \circ (h\ l) \circ \underbrace{(i\ h\ l)}_{}$$

$$\tau_1 = c_1 \circ \tau_2 \circ c_2$$, c_1 et c_2 cycles d'ordre 3

car
$$\begin{pmatrix} i & j & h & l \\ h & j & l & i \\ l & j & h & i \\ j & i & h & l \end{pmatrix}$$
(c_2, τ_2, c_1)

Donc $f(\tau_1) = f(c_1)\, f(\tau_2)\, f(c_2)$
$\underset{b)}{=} f(\tau_2)$

Donc : • si l'image de toute transposition par f est 1, alors $f(\sigma) = 1$ pour tout $\sigma \in S_n$.

• si l'image de toute transposition par f est -1, alors f est le morphisme signature de S_n.

Donc <u>le morphisme signature de S_n est l'unique morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ différent de</u> $\begin{vmatrix} (S_n, \circ) \to (\mathbb{C}^*, \times) \\ \sigma \longmapsto 1 \end{vmatrix}$.

Nicolas. M — Colle de la semaine 30

Énoncé

Soit f un morphisme de $(S_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$

a) Montrer que pour toute transposition τ
$$f(\tau) = \pm 1$$

b) Montrer que pour tout cycle d'ordre 3 c,
$$f(c) = 1$$

c) Montrer que toutes les transpositions ont même image par f

d) Conclure

Solution

a) Soit $\tau \in S_n$ une transposition

$\exists (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \qquad \tau = (i\ j)$

$\tau^{-1} = (i\ j) = \tau$

$$1 = f(id) = f(\tau \circ \tau^{-1}) \underset{\text{morphisme}}{=} f(\tau) \times f(\tau) = f(\tau)^2$$

donc $\boxed{f(\tau) = 1 \text{ ou } f(\tau) = -1}$

b) Soit c un cycle d'ordre 3.

$\exists (x,y,z) \in [\![1,n]\!]^3 \qquad c = (x\ y\ z) = (x\ y)(x\ z)$

$$f(c) = f((x\,y)) \times f((y\ z)) = \pm 1$$

$$f(c^3) = f(id) = f(c) \times f(c) \times f(c) = f(c)^3 = 1$$

donc $f(c) \in \{j, j^2, 1\} \cap \{-1, 1\} = \{1\}$

donc $\boxed{f(c) = 1}$

c) Soit $(\tau_1, \tau_2) \in S_n^2$ des transpositions.

Cas 1 : $\exists (a,b,c) \in [\![1,n]\!]^2$ $a \neq b \neq c$

$\tau_1 = (a\,b)$ $\quad \tau_2 = (b\,c)$

$$f(\tau_1 \circ \tau_2) \underset{b)}{=} 1 = f(\tau_1) \times f(\tau_2)$$

donc $\boxed{f(\tau_1) = f(\tau_2)}$

Cas 2 : $\exists (a,b,c,d) \in [\![1,n]\!]^2$ $\quad a,b,c,d$ deux à deux distincts

$\tau_1 = (ab)$ $\quad \tau_2 = (c\,d)$

$$\tau_1 \circ \tau_2 = (c\,b\,a) \circ (c\,d\,a)$$

$$f(\tau_1 \circ \tau_2) = f(\tau_1) \times f(\tau_2) = f((c\,b\,a)) \times f((c\,d\,a)) = 1 \times 1 = 1$$

donc $\boxed{f(\tau_1) = f(\tau_2)}$

d) D'après c) . Si $\forall \tau \in S_n$ transposition, $f(\tau) = -1$, alors $\boxed{f = \varepsilon}$ (où ε est la signature)

. Si $f(\tau) = 1$ pour toute transposition, alors, car toute permutation se décompose en produit de transposition et que f est un morphisme, $\boxed{f(S_n) = \{1\}}$

Leçon 5 Enoncé Semaine 30

Calculer le déterminant de
$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \quad \text{avec } (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$$

Solution

$$D = \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & d & c \\ a+b+c+d & b & a & d \\ a+b+d+a & c & b & a \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & b & a & d \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & 0 & a-c & 0 \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ 0 & a-c & 0 \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} a-b+c-d & d-c & c-d \\ 0 & a-c & 0 \\ a-b+c-d & b-c & a-d \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_3$$

$$= (a+b+c+d)(a-b+c-d) \begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 0 & a-c & 0 \\ 1 & b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 0 & a-c & 0 \\ 0 & b-d & a-c \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= (a+b+c+d)(a-b+c-d)\begin{vmatrix} a-c & 0 \\ b-d & a-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a-c)^2$$

Sophie G

Colle de la semaine n°

2.8

a) Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

b) En déduire : $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

<u>Solution</u>

a) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (abc)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = |V_3(a,b,c)|(abc)$$

linéarité par rapport aux colonnes

$$= \boxed{(abc)(b-a)(c-a)(c-b) := d_2}$$

b) $$d_1 := \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & b & c \\ a^2+b^2 & b^2 & c^2 \\ a^3+b^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

[Transvection].

$$= \begin{vmatrix} a+b & b+c & c \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} a+b & b+c & a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & a^3 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2 + C_1$$

[deux Transvections $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$]

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a+b & b+c & 2a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & 2a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & 2a^3 \end{vmatrix} \quad 2 \neq 0$$

$C_3 \leftarrow 2\, C_3$ [Dilatation]

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1 + C_2$$

[deux Transvections]

Donc $\boxed{d_1 = 2\, d_2}$

Louis D   Semaine de colle n° 30

__Énoncé :__

Soit $n \geqslant 2$, $(a_1, \dots a_n, x) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$$A_n := \begin{pmatrix} a_1+x & & (x) \\ & \ddots & \\ (x) & & a_n+x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Calculer le déterminant de A_n

__Solution :__

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & & \\ 0 & a_3 & -a_3 & \dots & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1} & -a_n \\ x & x & \dots & x & a_n \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \vdots \\ L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n \\ \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & -(a_2+a_1) & 0 & & & \\ 0 & a_2 & -(a_3+a_2) & \dots & & \\ & & \ddots & -(a_{n-1}+a_{n-2}) & & \\ & & & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ x & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2} \\ C_{n-2} \leftarrow C_{n-2} - C_{n-3} \\ \vdots \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \end{array}$$

développement 1/1 à la 1ère colonne $= (-1)^{1+1} a_1 \det((A_n)_{11}) + (-1)^{n+1} x \det((A_n)_{n1})$

déterminants de matrices triangulaires $= a_1 \prod_{i=2}^{n} a_i + (-1)^{n+1} x \left(\prod_{j=2}^{n-1} -(a_j + a_{j+1}) \right) (a_n)$

$$\boxed{\det(A_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i + a_n x \prod_{j=2}^{n-1} (a_j + a_{j+1})}$$

Antoine B. colle de la semaine 30.

Montrer que les transpositions $(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n)$ engendrent S_n

Une solution :

Montrons d'abord que toutes transpositions de S_n est engendré par $(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n)$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, tq $i \neq 1$, $j \neq 1$.

donc $(i\,j) = (i\,1) \circ (1\,j)$

Alors $(i\,j) = (1\,i) \circ (1\,j)$

si $i = 1$

alors $(1\,j) = (i\,j)$

de même, si $j = 1$

alors $(i\,1) = (i\,j)$

Ainsi toutes transpositions est engendré par $(1,2), \ldots (1,n)$

Comme tout $\sigma \in S_n$ est engendré par des transpositions

alors : $\boxed{\text{tout } \sigma \in S_n \text{ est engendré par } (1\,2), \ldots, (1\,n)}$

Hugo D. Colle de la semaine n°30

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{pmatrix}$$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $\det(A)$

Solution :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ -1 & -1 & 1+c \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \end{matrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & b \\ -1 & 1+c \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{1+c+b+a}$$

ELIOTT S.V. SEMAINE 30

ENONCÉ :

Determiner l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ à l'aide de sa comatrice.

SOLUTION :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1 \end{matrix}$$

$$= - \left((-4 \times 20) - (4 \times 4) \right) = 96.$$

Donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \mathrm{Com}(M)^T$

Calculons $\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2$, $\det(M_{i,j})$

$i = 1, \ j = 1.$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \left(2 \times 1 - (3 \times (-6)) \right) = -20$$

On procède de la même manière pour les 15 autres matrices. On en déduit

$$\mathrm{Com}(M) = \begin{pmatrix} +(-20) & -(-4) & +4 & -(-28) \\ -(-4) & +4 & -(-28) & +(-20) \\ +4 & -(-28) & +(-20) & -(-4) \\ -(-28) & +(-20) & -(-4) & +4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 4 & 4 & 28 \\ 4 & 4 & 28 & -20 \\ 4 & 28 & -20 & 4 \\ 28 & -20 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\mathrm{Com}(M)^T = \begin{pmatrix} -20 & 4 & 4 & 28 \\ 4 & 4 & 28 & -20 \\ 4 & 28 & -20 & 4 \\ 28 & -20 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Et $M^{-1} = \dfrac{1}{96}\begin{pmatrix} -20 & 4 & 4 & 28 \\ 4 & 4 & 28 & -20 \\ 4 & 28 & -20 & 4 \\ 28 & -20 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Rémi . S

Semaine de colle n°30

Donner la formule général du déterminant d'une matrice (3, 3)

Solution :

Soit $(a_1, \dots, a_9) \in \mathbb{C}^9$

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,3}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{1+i} a_i \det(A_{1i})$$

$$= a_1 \det \begin{pmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{pmatrix} - a_2 \begin{pmatrix} a_4 & a_6 \\ a_7 & a_9 \end{pmatrix} + a_3 \det \begin{pmatrix} a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{pmatrix}$$

$$= a_1 (a_5 a_9 - a_6 a_8) - a_2 (a_4 a_9 - a_6 a_7) + a_3 (a_4 a_8 - a_5 a_7)$$

$$= a_1 a_5 a_9 - a_1 a_6 a_8 - a_2 a_4 a_9 + a_6 a_7 a_2 + a_3 a_4 a_8 - a_5 a_7 a_3$$

Rapport de Colle, semaine 30

WASSIN
M.

Soient $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$

Calculer le determinant suivant :

$$\begin{vmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{vmatrix} = \det(A)$$

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Montrons par recurrence que pour tous réels $s_1, \dots, s_n$

$$\det_n(A) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}) \quad (\mathcal{P}(n))$$

• Initialisation à $n = 2$

$$\det(A) = s_1 s_2 - s_1^2$$

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = s_1 s_2 - s_1^2 \quad \checkmark$$

• Heredité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie

$$\det(A) = \begin{vmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1 & s_2 - s_1 & \cdots & s_2 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 - s_1 & \cdots & s_m - s_1 \end{vmatrix} = s_1 \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & \cdots & \cdots & s_2 - s_1 \\ s_2 - s_1 & s_3 - s_1 & \cdots & s_3 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2 - s_1 & s_3 - s_1 & \cdots & s_m - s_1 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$\vdots$

$L_m \leftarrow L_m - L_{m-1}$

Par HR :

$$\det(A) = s_1 (s_2 - s_1)(s_3 - s_1 - s_2 + s_1) \dots (s_m - s_1 - s_{m-1} + s_1)$$

$$= s_1 (s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_m - s_{m-1})$$

Ahmed
Amine

Rapport de colle semaine 30

Énoncé

Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Solution :

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} j & j^2 \\ j^2 & j \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & j^2 \\ 1 & j \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & j \\ 1 & j^2 \end{vmatrix}$$

$$= j^2 - j^4 - (j - j^2) + j^2 - j$$

$$= 3j^2 - j^4 - 2j = 3j^2 - 3j = 3j(j-1)$$

A est inversible car $\det(A) \neq 0$

et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \, \mathrm{com}(A)^T$

or $\forall (i,j) \in [\![1;3]\!]^2 \; [\mathrm{com}(A)]_{i,j} = (-1)^{i+j} |A_{i,j}|$

donc $$A^{-1} = \frac{1}{3j(j-1)} \begin{pmatrix} j^2 - j^4 & -(j-j^2) & j^2 - j \\ -(j-j^2) & (j-1) & -(j^2-1) \\ j^2 - j & -(j^2-1) & j-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3j(j-1)} \begin{pmatrix} j(j-1) & j(j-1) & j(j-1) \\ j(1-j) & j-1 & -(1+j)(j-1) \\ j(j-1) & -(1+j)(j-1) & j-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{\cancel{1}\, j^3}{j} & -(1+j^2) \\ 1 & -(1+j^2) & \frac{j^3}{j} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & j^2 & -(1+j^2) \\ 1 & -(1+j^2) & j^2 \end{pmatrix}$$

or $j^2+j+1=0$

d'où $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & j^2 & -j \\ 1 & -j & j^2 \end{pmatrix}$

Mehdi B

Colle de la semaine 30

2.7

Calculer $\begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \cdots & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix} := \det(A_n)$

<u>Solution</u>

· On remarque : $A_n = \left(\binom{i}{j-1} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$

· $\forall i \in [\![2, n]\!]$, on réalise l'opération élémentaire : " $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ ", pour obtenir, si $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\binom{i}{j-1} \leftarrow \binom{i}{j-1} - \binom{i-1}{j-1} \underset{\uparrow}{=} \binom{i-1}{j-2}$$

relation de Pascal

Ainsi, en effectuant les opérations pour i de n à 2 :

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & - - - & & 0 \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & - - - & 0 \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \binom{n-3}{0} & \binom{n-3}{1} & \binom{n-3}{2} & - - - & \binom{n-3}{n-2} \\ 0 & \binom{n-2}{0} & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{2} & - - - & \binom{n-2}{n-2} \\ 0 & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & - - - & \binom{n-1}{n-2} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2} \\ L_n \leftarrow L_n - L_{n-1} \end{array}$$

A_{n-1}

En développant par rapport à la 1ère colonne, il vient :

$$|A_n| = |A_{n-1}|.$$

Comme $|A_1| = |(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix})| = 1$, on conclut :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \det(A_n) = 1}$$

Jules R. Colle de la semaine 30

> Enoncé : Soit A une matrice (n,n) antisymétrique.
> Montrer que A est non inversible si n est impaire

Solution : Supposons n impair.
Comme A est antisymétrique, on sait que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \qquad [A]_{i,j} = -[A]_{j,i}$$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \underbrace{[A]_{k,\sigma(k)}}_{-[A]_{\sigma(k),k}}$$

$$= -\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} [A]_{\sigma(k),k}$$ (on peut sortir le moins dû à l'imparité de n)

$$= -\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{l=1}^{n} [A]_{l,\sigma^{-1}(l)}$$ (changement de variables : $l = \sigma(k)$) (bijection)

$$= -\sum_{\gamma \in S_n} \varepsilon(\gamma) \prod_{l=1}^{n} [A]_{l,\gamma(l)}$$ (changement de variables $\gamma = \sigma^{-1}$) (bijection)

Ainsi :
$\det(A) = -\det(A)$ donc $\det(A) = 0$ donc non inversible.

Celia A.   Rapport de la semaine n° 30.

énoncé :

Calculer $\det(A)$.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Solution :

1. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 \\ 0 & a-a^3 & 1-a^4 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & a-a^3 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - aL_2$$

$$= (1-a^2)^2.$$

Donc $\boxed{\det(A) = (1-a^2)^2}$

2. $\boxed{\det(A) = 3\times 6 - 4\times 5 = -2.}$

3. $$\boxed{\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^2 \times (1) \times |A_{11}| \\ &= -2 \end{aligned}}$$

(développement par rapport à la première ligne)

MANGIALOMINI
Amélien

Semaine de Colle S30

Exercice : Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E, la somme pour j de 1 à n des déterminants dans $\mathcal{B}$ des familles $(x_1, \dots, x_{j-1}, f(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n)$ vaut $\mathrm{Tr}(f)$ fois le déterminant dans $\mathcal{B}$ de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base alors ;

$$\sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{j-1}, f(x_j), x_{j+1}, \dots, x_n)$$

or $\forall j \in [\![1;n]\!] \mid f(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}$$

$$\begin{cases} = 0 \text{ si } i \neq j \\ = \lambda_j \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_j, x_n)$$

$$= \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$$

or $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Mat}_{(x_1, \dots, x_n)}(f(x_j))_j}^{\lambda_j}$

Donc $\sum_{j=1}^{n} \det_B(x_1,\dots,f(x_j),\dots,x_n)$

$= \det_B(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{Tr}(f)$.

Si $(x_1,\dots,x_n)$ n'est pas une base

alors par card-dim on sait que c'est une famille liée ie $x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$

$\exists(\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$

$$\sum_{j=1}^{n} \det_B(x_1,\dots,f(x_j),\dots,x_n)$$

$$= \det_B(f(x_1),\dots,x_n) + \sum_{j=2}^{n} \det_B(\underbrace{x_1}_{=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i x_i},\dots,f(x_j),\dots,x_n)$$

$$= \det_B(f(x_1),\dots,x_n) + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n} \underbrace{\det_B(\lambda_i x_i,\dots,f(x_j),\dots,x_n)}_{\begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq j \\ = \det_B(\lambda_j x_j,\dots,f(x_j),\dots,x_n) & \text{sinon}\end{cases}}$$

$$= \det_B(f(x_1),\dots,x_n) + \sum_{j=2}^{n} \det_B(\lambda_j x_j,\dots,f(x_j),\dots,x_n)$$

MANGIACOMINI
Amélien $= \det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, x_n)$

$$+ \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \left(- \det (\underset{1}{f(x_j)}, \dots, \underset{j}{x_1}, \dots, x_n) \right)$$

(On utilise la linéarité par rapport à la 1ère composante et on effectue une permutation).

$$= \det_{\mathcal{B}} (f(x_1), \dots, x_n) - \left(\det_{\mathcal{B}} \left(\sum_{j=2}^{n} \lambda_j f(x_j), \dots, x_n \right) \right)$$

$$= \det_{\mathcal{B}} (f(x_1), \dots, x_n) - \det_{\mathcal{B}} (\underbrace{f\left(\sum_{j=2}^{n} \lambda_j x_j \right)}_{f(x_1)}, \dots, x_n)$$

$$= 0 = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \operatorname{Tr}(f) \ \square.$$

NISS
MATHEO

Rapport de colle semaine 30.

Énoncé:

Soit f un morphisme de $(S_n ; \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$
a. Montrer que pour toute transposition τ, $f(\tau) = \pm 1$
b. Montrer que pour tout cycle d'ordre 3 c, $f(c) = 1$.
c. Montrer que toutes les transpositions ont même image par f
d. conclure.

Solution:

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

a) Soit $\tau \in S_n$ une transposition,
On sait que $\tau = \tau^{-1}$
On a : $f(\tau \circ \tau^{-1}) = f(id_{[\![1,n]\!]}) = 1$ [Propriétés des morphisme de groupe]
d'une part
et d'autre part :
$$f(\tau \circ \tau^{-1}) = f(\tau) \times f(\tau^{-1}) = f(\tau) \times f(\tau) = f(\tau)^2$$
Ainsi : $f(\tau)^2 = 1$ **donc** $f(\tau) = \pm 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, Soit $c \in S_n$ un 3-cycle, d'après les propriétés des cycle, on sait que $\text{ord}(c) = 3$.

Ainsi : $f(c^3) = f(id_{[\![1,n]\!]}) = 1$

Par propriété des morphisme de groupes :
$$f(c)^3 = 1$$
Donc $f(c) = 1$.

c) Supposons qu'il existe, par l'absurde, deux transpositions de S_n ($n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$) τ_1 et τ_2 telles que $f(\tau_1) \neq f(\tau_2)$
on suppose $f(\tau_1) = -1$ et $f(\tau_2) = 1$. avec $\tau_1 \neq \tau_2$.
il existe $(a, b, c, d) \in [\![1, n]\!]^4$ tels que

$$\tau_1 = (a\ b) \qquad \tau_2 = (c\ d)$$

avec $a \neq d$.

- Si $b = c$

on a : $\tau_1 \circ \tau_2 = (a\ b) \circ (b\ d) = (a\ b\ d)$

Or $f(\tau_1 \circ \tau_2) = f(\tau_1) \times f(\tau_2) = -1$

et $f((a\ b\ d)) = 1$ ↯ car $1 \neq -1$. [b)]

- Si $b \neq c$. on pose $\tau_3 = (b\ c)$

alors : $\tau_1 \circ \tau_3 \circ \tau_2 = (a b) \circ (b c) \circ (c d)$

On a alors. $f((ab) \circ (bc)) = 1$ (3-cycle b))

donc $f((ab)) = f((bc)) = -1$

Mais aussi : $f((bc) \circ (cd)) = 1$ ($(b\ c\ d)$ 3-cycle + b))
donc : $f((bc)) = f((cd)) = 1$. ↯ car $f((ab)) \neq f((cd))$

Ainsi, on a : $f(\tau_1) = f(\tau_2)$, toute transpositions ont même image par f.

d) Ainsi, si pour toute transposition τ $f(\tau) = -1$ alors par l'unicité du morphisme signature f est le morphisme signature

si au contraire $f(\tau) = 1$ alors par décomposition des permutations en produit de cycle f est $f \left| \begin{array}{ccc} (S_n, \circ) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \times) \\ \sigma & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$

Youssef.B

Colle de la semaine 30

Exercice 1. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice $(a_{i,j}+x)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.

1. Montrer que $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Pour $a, b, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels avec $a \neq b$, calculer

$$B = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Solution :

1) $$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}-a_{11} & \cdots & a_{1n}-a_{11} \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12}-a_{21}+a_{11} & \cdots & a_{2n}-a_{1n}-a_{21}+a_{11} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}-a_{11} & \cdots & & a_{nn}-a_{1n}-a_{n1}+a_{11} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ \vdots \\ C_n \leftarrow C_n - C_1 \end{matrix}$$

donc $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynomiale degré inférieur ou égal à 1 (en developpant par rapport à la première ligne ou colonne)

2) On pose $B(x)$ la matrice $(b_{i,j}+x)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$

$\det(B(x))$ s'écrit sous la forme $\lambda x+\mu$

si $x=-a$, alors

$$\det(B(-a)) = \begin{vmatrix} \alpha_1-a & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & \alpha_2-a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b-a & \cdots & b-a & \alpha_n-a \end{vmatrix} = -a\lambda+\mu = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i-a)$$

De même, si $x=-b$,

$$\det(B(-b)) = -b\lambda+\mu = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i-b)$$

$$\begin{cases} -a\lambda+\mu = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i-a) \\ -b\lambda+\mu = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i-b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i-b)-\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i-a)}{a-b} \\ \mu = \dfrac{a\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i-a)}{a-b} \end{cases}$$

$$\det(B) = \det(B(0))$$

$$= \lambda\times 0+\mu = \mu$$

$$= \frac{a\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i-b)-b\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i-a)}{a-b}$$

Maximilien T. Colle de la Semaine 30

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 7 & 10 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Décomposer σ en produit de cycles, puis sa signature et sa décomposition en produit de transpositions

Solution :

$$\sigma = (1\ 9\ 5\ 7) \circ (2\ 4\ 8) \circ (6\ 10)$$

Ainsi $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(1\ 9\ 5\ 7) \times \varepsilon(2\ 4\ 8) \times \varepsilon(6\ 10)$

$= -1 \times 1 \times -1 = 1$

De plus $\sigma = (1\ 9) \circ (9\ 5) \circ (5\ 7) \circ (2\ 4) \circ (4\ 8) \circ (6\ 10)$

Nauer
Léon

Colle de la semaine n°30

Énoncé :

Montrer que $\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$$

Solution :

1) Par récurrence, on montre $\mathcal{P}(n) =$ " $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B) \text{ "}$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$

Initialisation : rang $n=1$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

On a $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \times \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}_{11}\right)}_{\det(B)}$ (lemme du cours)

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vrai. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}}_{:= M} = \sum_{k=1}^{m+n+1} [M]_{1k} (-1)^{1+k} \det(M_{1k})$$

(développement par rapport à la première colonne)

On a $\forall k \geq \cancel{m}^{n}+2 \quad [M]_{1k} = 0$

et $\forall k \leq \cancel{m}\, n+1 \quad [M]_{1k} = [A]_{1k}$

et $M_{1k} = \begin{pmatrix} A_{1k} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

Ce qui nous permet de réécrire la somme :

$$\det(M) = \sum_{k=1}^{n+1} [A]_{1k} (-1)^{1+k} \det\begin{pmatrix} A_{1k} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Or $A_{1k} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, par $\mathcal{P}(n)$,

$$\det\begin{pmatrix} A_{1k} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A_{1k}) \det(B)$$

Cela nous permet d'identifier, avec la linéarité de la somme, le développement par rapport à la première colonne de $\det(A)$

$$\det(M) = \det(B) \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} [A]_{1k} (-1)^{1+k} \det(A_{1k})}_{\det(A)}$$

Nous en déduisons, à l'aide de l'axiome de récurrence

$$\boxed{\begin{gathered} \forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2},\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{K}) \\ \det\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B) \end{gathered}}$$

Pierre V. Colle de la semaine 30

Soient un entier $n \geq 2$ et $a_1, \dots a_n$ des réels non tous nuls. Calculer le determinant de $M := \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$?

Solution

Notons $C_1, \dots C_n$ les colonnes de M et $\mathcal{B} = \text{Can}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$

$$C_j = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_j} + \frac{a_j}{a_1} \\ \frac{a_2}{a_j} + \frac{a_j}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{a_j} + \frac{a_j}{a_n} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_j} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{:= X} + a_j \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}}_{:= Y} \in \text{Vect}(X, Y) \text{ sous-espace vectoriel}$$

Par minimalité, $\text{Vect}(C_1, \dots C_n) \subset \text{Vect}(X, Y)$

1^e cas : $n = 2$

Alors $M := \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_1} + \frac{a_1}{a_1} & \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \\ \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} & \frac{a_2}{a_2} + \frac{a_2}{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \\ \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} & 2 \end{pmatrix}$

Ainsi $\det(M) = 2^2 - \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right)^2 = 2 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2$

2^e cas : $n \geq 3$

Supposons par l'absurde que $(C_1, \dots C_n)$ est une famille libre,

alors $\dim(\text{Vect}(C_1, \dots C_n)) = n$

or $\dim(\text{Vect}(X, Y)) \leq 2$ et $\text{Vect}(C_1, \dots C_n) \subset \text{Vect}(X, Y)$

donc $3 \leq n \leq 2$ ↯ Il y a contradiction

Ainsi $(C_1, \dots C_n)$ est liée, on en déduit que $\det(M) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots C_n) = 0$

Louis B Khôlle de la semaine 30

Quel est l'effet sur le déterminant de la multiplication par (-1) "en damier" des cellules d'une matrice

---

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $p \in \mathbb{N}$ le nombre de lignes et colonnes d'id pair

On défini $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, i impair $A'_{\bullet i} = A_{\bullet i}$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ i pair $A'_{\bullet i} = -A_{\bullet i}$

Ainsi $\operatorname{Det}(A') = (-1)^p \det(A)$

On définit A'' tq

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ i impair $A''_{i \bullet} = A'_{i \bullet}$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ i pair $A''_{i \bullet} = -A'_{i \bullet}$

Ainsi $\det(A'') = (-1)^p \det(A')$

$= (-1)^{2p} \det(A)$

$= \det(A)$

Donc $\det(A'') = \det(A)$

Uta. B Rapport de colle - semaine 30

Exercice : Soit A une matrice (n,n) antisymétrique, Montrer que A est non inversible si n est impair. Et sinon ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ antisymétrique

Par caractère antisymétrique de A

$$A = -A^T$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(-A^T)$$

$$= (-1)^n \det(A^T) \quad \text{(linéarité par rapport au colonne)}$$

$$= (-1)^n \det(A) \quad (C\ 26.79)$$

Si n impair, l'inégalité nous donne :

$$\det(A) = -\det(A)$$

$$\Rightarrow \det(A) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A \notin Gl_n(\mathbb{K})}$$

Si n pair, A peut être inversible ou non.

exemple pour $n = 2$, on trouve deux matrices antisymétriques :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin Gl_2(\mathbb{K})$$

Louis Guillaume S. Colle de la semaine 30

Énoncé :

Soit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-ia} & e^{ib} \\ e^{ia} & 1 & e^{-ic} \\ e^{-ib} & e^{ic} & 1 \end{vmatrix}$$

Solution :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-ia} & e^{ib} \\ 0 & 0 & e^{-ic}-e^{i(b+a)} \\ 0 & e^{ic}-e^{-i(b+a)} & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - e^{ia}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - e^{-ib}L_1 \end{matrix}$$

Nous pouvons alors effectuer un développement suivant la première colonne.

$$\Delta = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & e^{-ic}-e^{i(b+a)} \\ e^{ic}-e^{-i(b+a)} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(e^{ic}-\left(e^{-i(b+a)}\right)\right)\left(e^{-ic}-e^{i(b+a)}\right)$$

$$= -\left(1-e^{i(a+b+c)}-e^{-i(a+b+c)}+1\right)$$

$$= -\left(2-\left(e^{i(a+b+c)}+e^{-i(a+b+c)}\right)\right)$$

$$= -2+2\cos(a+b+c)$$

Ainsi :
$$\boxed{\Delta = 2(\cos(a+b+c)-1)}$$

Skandrani K.

Colle de la semaine 30

Soit $n \geq 2$. $\forall i \in [\![2, n]\!]$ on note σ_i le cycle $(1\ 2 \ldots i)$. Démontrer que toute permutation de S_n s'écrit comme $S = \sigma_n^{\alpha_n} \circ \ldots \circ \sigma_3^{\alpha_3} \circ \sigma_2^{\alpha_2}$ où $\alpha_j \in [\![0, j-1]\!]$ avec $j \in [\![2, n]\!]$.

on Procède avec un raisonnement par Récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*_{\geq 2}$.

<u>Initialisation où $n = 2$:</u>

. Si $n = 2$ $S_2 = \{id, (1\ 2)\}$

or $id = (1\ 2)^0$ et $(1\ 2) = (1\ 2)^1$

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*_{\geq 2}$ tq la propriété soit Vrai au Rang n

Soit $\sigma \in S_{n+1}$.

on distingue deux :

→ Si $\sigma(n+1) = n+1$ alors σ revient à une permutation de S_n et par l'hypothèse de Récurrence on a $\exists (\alpha_2, \ldots \alpha_n)$ tq $\forall i \in [\![2, n]\!]$ $\alpha_i \in [\![0, i-1]\!]$ et

$\sigma = \sigma_n^{\alpha_n} \circ \ldots \circ \sigma_2^{\alpha_2}$.

→ Si $\sigma(n+1) \neq n+1$

ainsi on Remarque que

$\sigma_{n+1}^{-\sigma(n+1)} \circ \sigma \quad (n+1) = n+1$ ainsi

par hypothèse de Récurrence on sait qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ~~comme~~ comme avant tq

$\sigma_{n+1}^{-\sigma(n+1)} \circ \sigma = \sigma_n^{\alpha_n} \circ \ldots \circ \sigma_2^{\alpha_2}$

ainsi

$$\sigma = \sigma_{n+1}^{\sigma(n+1)} \circ \sigma_n^{\alpha_n} \circ \cdots \circ \sigma_2^{\alpha_2}$$

on note que $\sigma(n+1) \in [\![0, n]\!]$ car
$\sigma(n+1) \in [\![0, n+1]\!]$ et $\sigma(n+1) \neq n+1$.

et on a le résultat.

Léa N. Colle de la semaine 30

Énoncé :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \forall i \in [\![1, n]\!] \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \leq 1 \right\}$

1/ Montrer que E est stable par $\times$

2/ Montrer que $\{ \det(M), M \in E \}$ est borné

3/ Montrer que $\forall M \in E, |\det(M)| \leq 1$

Solution :

1) Soit $(M_1, M_2) \in E^2$. Montrons que $M_1 \times M_2 \in E$

$M_1 \times M_2$ est bien défini (matrices de même format)

Soit $i \in [\![1, n]\!]$

$$\sum_{j=1}^{n} |[M_1 \times M_2]_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} [M_1]_{ik} [M_2]_{kj} \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |[M_1]_{ik}| \times |[M_2]_{kj}| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |[M_1]_{ik}| \times |[M_2]_{kj}| \right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |[M_2]_{kj}| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |[M_1]_{ik}|}_{\leq 1 \text{ car } M_1 \in E}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |[M_2]_{kj}|$$

$$\leq 1 \qquad (\text{car } M_2 \in E)$$

Donc $M_1 \times M_2 \in E$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ " $\{ \det(M), M \in E \}$ est borné

i.e. $\exists A \in \mathbb{R} \ \forall M \in E \ |\det(M)| \leq A$ "

(n est le format de M)

Initialisation : à $n = 1$. Soit $M \in E$, soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $M = (a)$

$|\det(M)| = |a| \leq 1$ car $M \in E$

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ tel que $M \in E$

Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$, par développement par rapport à la ligne i :

$$|\det(M)| = \left| \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} [M]_{ij} \det(M_{ij}) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n+1} |[M]_{ij}| \, |\det(\underbrace{M_{ij}}_{\substack{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ \text{et } \in E}})| \qquad \text{(inégalité triangulaire)}$$

Par hypothèse de récurrence,

$\exists A \in \mathbb{R} \quad |\det(M_{ij})| \leq A$

$$\leq \sum_{j=1}^{n+1} |[M]_{ij}| \times A$$

$$\leq A \underbrace{\sum_{j=1}^{n+1} |\underset{\downarrow \in E}{[M]}_{ij}|}_{\leq 1}$$

$$\leq A$$

Donc $\{\det(M) : M \in E\}$ est borné

3/ En spécifiant $A = 1$ dans la partie 2/, on retrouve le résultat avec la récurrence.

Alexandre M. Colle semaine 30

Enoncé :

Exercice 4 : Montrer, sans le calculer, que le déterminant suivant est multiple de 9 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que
$$3+5+1 = 9$$
$$2+2+5 = 9$$
$$7+1+1 = 9$$

Ainsi

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

[propriété sur det et les transvections]

Par linéarité par rapport à la première ligne, on a

$$\det(A) = 9 \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{Z}}$$

car tous les coefficients sont entiers

$\square$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \det(A) \text{ est un multiple de } 9.}$$

Anaé D.

Rapport de colle S30

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\det(A)$ sachant que, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$

$$a_{ij} = \min(i,j)$$

Solution

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ \vdots \\ C_n \leftarrow C_n - C_{n-1} \end{array}$$

On reconnait une matrice triangulaire inférieure. Or on sait que le determinant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients de sa diagonale.
Donc $\det(A) = 1$

Titouan D

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$

Calculer $\det(A)$.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} [A]_{i,1} \det(A_{i,1})$$ (developpement par rapport à la 1ère colone)

$$= 1 \times 1 \times \det\begin{pmatrix} j & j^2 \\ j^2 & j \end{pmatrix} + (-1) \times 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j^2 & j \end{pmatrix} + 1 \times 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & j^2 \end{pmatrix}$$

$$= j^2 - j^4 - (j - j^2) + j^2 - j$$

$$= 3(j^2 - j)$$ $(j^4 = j)$

$$\boxed{\begin{aligned} \det(A) &= 3(j^2 - j) \\ &= 6i\,\mathrm{Im}(j^2) \\ &= -3i\sqrt{3} \end{aligned}}$$

Ana. A

Colle de la semaine 31.

Énoncé :

Exercice 1. Calculer le déterminant de taille $n \in \mathbb{N}^*$ suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & x \\ 0 & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Solution.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- Formule de récurrence :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{développement} \\ \text{\% à la} \\ \text{colonne 1}}}{=} (-1)^{1+1}(1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{1+2} x \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{développement} \\ \text{\% à la ligne 1}}}{=} (1+x^2)\Delta_{n-1} - x^2 (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{n-2}$$

Donc

$$\Delta_n = (1+x^2)\Delta_{n-1} - x^2 \Delta_{n-2}.$$

On obtient une suite récurrente (Δ_n) d'ordre 2.
et d'équation caractéristique : $E_{car} : z^2 - (1+x^2)z + x^2 = 0$.
$z \in \mathbb{C}$.

$$\Delta = (1+x^2)^2 - 4x^2$$
$$= (1+x^2-2x)(1+x^2+2x)$$
$$\Delta = (1+x)^2(1-x)^2 \geq 0.$$

$$z_1 = \frac{1+x^2 - |(1+x)(1-x)|}{2} = \frac{1+x^2 - |(1-x^2)|}{2}$$

$$z_2 = \frac{1+x^2 + |(1+x)(1-x)|}{2} = \frac{1+x^2 + |(1-x^2)|}{2}$$

Si $|x| \leq 1$ alors $|(1-x^2)| = 1-x^2$

Donc

$$z_1 = x^2 \; ; \; z_2 = 1$$

Si $|x| > 1$ alors $|1-x^2| = x^2-1$

$$z_1 = 1 \; ; \; z_2 = x^2$$

Il nous suffit alors d'étudier un cas et d'en déduire le second par symétrie des rôles de z_1 et z_2.

Cas où $|x| > 1$ alors on a $z_1 = 1$ et $z_2 = x^2$

et donc $\Delta_n = \lambda_1 z_1^n + \lambda_2 z_2^n \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\Delta_1 = 1+x^2 = \lambda_1 + \lambda_2 x^2$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^2 - x^2 = \lambda_1 + \lambda_2 x^4$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 x^2 = 1+x^2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 x^4 = (1+x^2)^2 - x^2 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 x^2 = 1+x^2 \\ \lambda_2 (x^2 - x^4) = x^4 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{x^2-x^4} L_2 \\ (|x|>1)}}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 x^2 = 1+x^2 \\ \lambda_2 = \dfrac{x^2}{1-x^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1-x^4}{1-x^2} \\ \lambda_2 = \dfrac{x^2}{1-x^2} \end{cases} \qquad \text{Donc } \Delta_n = \frac{1-x^4}{1-x^2} + \frac{x^4}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

Riguin David — Colle de la semaine

Soient $s_1, s_2 \dots s_n \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} s_1 & \cdots & & s_1 \\ \vdots & s_2 & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_1 & s_2 & & s_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} s_1 & \cdots & s_1 \\ \vdots & & \\ s_1 & & s_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 & \cdots & & s_1 \\ 0 & s_2-s_1 & \cdots & s_2-s_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & s_2-s_1 & & s_n-s_1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times s_1 \times \begin{vmatrix} s_2-s_1 & \cdots & & s_2-s_1 \\ \vdots & s_3-s_1 & \cdots & s_3-s_1 \\ \vdots & \vdots & & \\ s_2-s_1 & s_3-s_1 & & s_n-s_1 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$\vdots$

$L_n \leftarrow L_n - L_1$

En effectuant ce procédé on conjecture que

$$\det(A) = s_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} (s_{k+1} - s_k) \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \\ s_1 & & s_n \end{pmatrix}$$

Montrons ce résultat par récurrence sur la taille $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ de la matrice :

Initialisation :

$n=2$ alors $A' = \begin{pmatrix} s_1 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$ et $\det(A') = s_1 \times s_2 - s_1^2 = s_1 \prod_{k=1}^{2} (s_{k+1} - s_k)$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ fixé tel que le résultat conjecturé soit vrai, soit $A'' = \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & & s_1 \\ \vdots & & s_n & s_n \\ s_1 & \cdots & s_n & s_{n+1} \end{pmatrix}$. En effectuant $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - L_n$

on obtient $\begin{pmatrix} s_1 & & s_1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & s_{n+1} - s_n \end{pmatrix}$ ainsi $\det(A'') = (-1)^{2n} \times (s_{n+1} - s_n) \times \det(A)$

or $\det(A) = s_1 \times \prod_{k=0}^{n-1} (s_{k+1} - s_k)$ ainsi par hypothèse de récurrence, $\det(A'') = (s_{n+1} - s_n) s_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} (s_{k+1} - s_k) = s_1 \prod_{k=1}^{n} (s_{k+1} - s_k)$

qui est le résultat voulu.

Piero T. Colle de la semaine 30

Exercice : Une double transposition est de la forme $(a\ b)\circ(c\ d)$ avec a, b, c et d deux à deux distincts.

a. Montrer que les doubles transpositions n'engendrent pas A_4.

b. Montrer que les doubles transpositions engendrent A_n pour $n \geq 5$.

Solution:

a. Les 3 doubles transpositions de S_4 sont : $\{\tau_{12}\circ\tau_{34}, \tau_{13}\circ\tau_{24}, \tau_{14}\circ\tau_{23}\}$.

$$(\tau_{12}\circ\tau_{34})\circ(\tau_{13}\circ\tau_{24}) = \tau_{14}\circ\tau_{23} = (\tau_{13}\circ\tau_{24})\circ(\tau_{12}\circ\tau_{34})$$
$$(\tau_{12}\circ\tau_{34})\circ(\tau_{14}\circ\tau_{23}) = \tau_{13}\circ\tau_{24} = (\tau_{14}\circ\tau_{23})\circ(\tau_{12}\circ\tau_{34})$$
$$(\tau_{13}\circ\tau_{24})\circ(\tau_{14}\circ\tau_{23}) = \tau_{12}\circ\tau_{34} = (\tau_{14}\circ\tau_{23})\circ(\tau_{13}\circ\tau_{24})$$

et toutes les doubles transpositions sont d'ordre 2 donc :

$\{id_{[\![1,4]\!]}, \tau_{12}\circ\tau_{34}, \tau_{13}\circ\tau_{24}, \tau_{14}\circ\tau_{23}\}$ est un sous-groupe de S_4.

Par conséquent $(1\ 2\ 3) \in A_4$ ne peut pas s'écrire comme un produit de doubles transpositions. Les doubles transpositions n'engendrent donc pas A_4.

b. Soit $n \geq 5$. Soit $\sigma \in A_n$.

$\exists r \in \mathbb{N}\ \exists \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2r-1}, \tau_{2r}$ transpositions $\sigma = \tau_1\circ\tau_2\circ\dots\circ\tau_{2r-1}\circ\tau_{2r}$

Soit $i \in [\![1, r]\!]$.

$\exists (j, h, l, p) \in [\![1, n]\!]^4\quad j \neq h$ et $l \neq p$ et $\tau_{2i-1}\circ\tau_{2i} = (j\ h)\circ(l\ p)$

Si j, h, l, p sont deux à deux différents alors $\tau_{2i-1}\circ\tau_{2i}$ est une double transposition.

Sinon : $\exists (j, h, l) \in [\![1, n]\!]^3$ 2 à 2 distincts $\tau_{2i-1}\circ\tau_{2i} = (j\ h)\circ(h\ l)$.

Soit $(m,p) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que j,k,l,m,p sont 2 à 2 différents, existe car $n \geq 5$.

$$(j\,k) \circ (k\,l) = ((j\,k) \circ (m\,p)) \circ ((m\,p) \circ (k\,l))$$

donc $\tau_{2i-1} \circ \tau_{2i}$ peut s'écrire comme un produit de double transpositions.

donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\tau_{2i-1} \circ \tau_{2i}$ peut s'écrire comme un produit de doubles transpositions
donc $\forall \sigma \in A_n$ σ peut s'écrire comme un produit de doubles transpositions.
Les doubles transpositions engendrent donc A_n.

Raphaël Mouchonnet — colle semaine n° 30

Enoncé :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad [A]_{i,j} = \max(i,j)$

Calculer $\det(A)$.

Solution :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & * & \ddots & 0 & \vdots \\ n-1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_1 \end{matrix}$$

(développement $n^{\text{ième}}$ colonne)
$$= n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ n-1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= n(-1)^{n+1}$$

Stanislas G. Semaine de colle n°30

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique
Démontrer qu'il existe $\in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$ telque que $X \neq 0$ et $AX = 0$

Solution

Comme A est antisymétrique $A^T = -A$

or $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A)$

donc $\det(A) = (-1)^{2n+1} \det(A)$ (det linéaire par rapport aux lignes)

donc $\det(A) = -\det(A)$

donc $\det(A) = 0$

donc A non inversible

donc $\text{Ker}(A) = \{0\}$

donc $\boxed{\exists X \in \mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R}) \text{ telque } AX = 0}$

Enoncé : Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

Donner le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{pmatrix}$$

Solution :

On utilise la formule de duplication qui donne que

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$$

Alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(a) & 2\cos^2(a) - 1 \\ 1 & \cos(b) & 2\cos^2(b) - 1 \\ 1 & \cos(c) & 2\cos^2(c) - 1 \end{pmatrix}$$

$C_3 \leftarrow C_3 + C_1$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & 2\cos^2(a) \\ 1 & \cos(b) & 2\cos^2(b) \\ 1 & \cos(c) & 2\cos^2(c) \end{vmatrix}$$

$$= 2 \det(A)$$ (linéarité colonne)

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos^2(a) \\ 1 & \cos(b) & \cos^2(b) \\ 1 & \cos(c) & \cos^2(c) \end{vmatrix}$$

On reconnait le déterminant d'une matrice de Vandermonde

$\det(A) = 2(\cos(b) - \cos(a))(\cos(c) - \cos(a))(\cos(c) - \cos(b))$