Youssef B

Colle de la semaine 29

soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, f est l'application canoniquement associée à A

1) Montrer que f est linéaire
2) Donner une base et la dimension de $\ker(f)$
3) ——————————— $\mathrm{Im}(f)$

Solution :

1) soit $(B, C) \in M_2(\mathbb{R})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$f(\lambda B + \mu C) = A(\lambda B + \mu C)$$
$$= \lambda AB + \mu AC$$
$$= \lambda f(B) + \mu f(C)$$

Donc f linéaire

2) $\ker(f) = \{ X \in M_{2,1}(\mathbb{R}) : AX = 0_{M_{2,1}(\mathbb{R})} \}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$$

$\ker(f) = \{(2y, y) : y \in \mathbb{R}\}$

Donc $(2,1)$ est une base de $\ker(f)$ de dimension 2

3) soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tq

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = z \\ 3x - 6y = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = \frac{1}{2}z & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ 3x - 6y = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = \frac{1}{2}z \\ 0 = t - \frac{3}{2}z & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases}$$

Léon Gibout

Enoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $tr(A) \neq 0$
On note $f : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$: $\forall M \in M_n(\mathbb{C})$ $f(M) = tr(A)M - tr(M)A$
1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{C}))$
2) Déterminer le noyau et l'image de f.

Solution

1) Soit $(B, C) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$

$f(\lambda B + \mu C) = tr(A)(\lambda B + \mu C) - tr(\lambda B + \mu C)A$
$= \lambda tr(A) B + \mu tr(A) C - \lambda tr(B) A - \mu tr(C) A$
$= \lambda f(B) + \mu f(C)$

donc $f \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{C}))$

2) ~~Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$~~
Montrons que $Ker(f) = Vect(A)$
$\boxed{\subset}$ Soit $M \in Ker(f)$
donc $tr(A)M - tr(M)A = 0$
donc $M = \frac{tr(M)}{tr(A)} A$ $\quad tr(A) \neq 0$
donc $M \in Vect(A)$ $\in \mathbb{C}$
$\boxed{\supset}$ Soit $M \in Vect(A)$. $\exists \lambda \in \mathbb{C}$: $M = \lambda A$
$f(\lambda A) = tr(A) \lambda A - tr(\lambda A) A$
$= 0$ (tr est linéaire)
donc $M \in Ker(f)$

Montrons que $Im(f) = Ker(Tr)$
Soit $M \in Im(f)$: $\exists Y \in M_n(\mathbb{C})$: $M = Tr(A)Y - tr(Y)A$
$tr(M) = Tr(Tr(A)Y - tr(Y)A)$
$= 0$ (linéarité de tr)
donc $Im(f) \subset Ker(Tr)$

Or, d'après le théorème du rang :
$rg(f) = \dim(M_n(\mathbb{C})) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$
$= n^2 - 1$

Tr est une forme non nulle de $M_n(\mathbb{C})$
D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n^2 - 1$
donc
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(Tr)$

Dino T. Colle de la semaine 29

EXERCICE 8 — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1 n'est pas nécessairement un projecteur.
2. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1 et de trace 1 est un projecteur.
3. Trouver une base de $\mathscr{L}(E)$ consituée de projecteur.

Solution:

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 2E_{11}$.

$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(2E_{11}) = 1$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^2 = 4E_{11} \neq \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$

donc $\mathrm{rg}(f) = 1$ et f n'est pas un projecteur.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{Tr}(f) = 1$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

$\mathrm{rg}(M) = 1 \Rightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})\ \forall i \in [\![1,n]\!]\ \exists y_i \in \mathbb{K}\quad M_{\cdot,i} = y_i X$

$\Rightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})\ \exists Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})\quad M = XY$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$$[M]_{i,j} = [XY]_{i,j} = \sum_{k=1}^{1} [X]_{i,k}[Y]_{k,j} = [X]_{i,1}[Y]_{1,j}$$

$$\mathrm{Tr}(M) = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} [XY]_{k,k} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} [X]_{k,1}[Y]_{1,k} = 1$$

$$[M^2]_{i,j} = [(XY)^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [XY]_{i,k}[XY]_{k,j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [X]_{i,1}[Y]_{1,k}[X]_{k,1}[Y]_{1,j}$$

$$= [X]_{i,1}[Y]_{1,j} \sum_{k=1}^{n} [X]_{k,1}[Y]_{1,k} = [X]_{i,1}[Y]_{1,j}$$

donc $M^2 = M$ donc $f^2 = f$ donc f est un projecteur.

3. Soit $B = (E_{ii} + (1-\delta_{ij})E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{[\![1,n]\!]^2}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad rg(E_{ii} + (1-\delta_{ij})E_{ij}) = 1$ et $Tr(E_{ii} + (1-\delta_{ij})E_{ij}) = 1$.

Soit $(\lambda_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{K}^{[\![1,n]\!]^2}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} (E_{ii} + (1-\delta_{ij})E_{ij}) = 0$.

$\Rightarrow (\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i \neq j \Rightarrow \lambda_{ij} = 0)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii} E_{ii} = 0$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \lambda_{ii} = 0$

donc B est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de cardinal $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$
donc B est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\mathcal{C}$ une base de E.
Soit $(f_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{L}(E)^{[\![1,n]\!]^2}$ telle que :

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad Mat_{\mathcal{C}}(f_{ij}) = E_{ii} + (1-\delta_{ij})E_{ij}$.

$(f_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est donc une base de $\mathcal{L}(E)$

et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad rg(f_{ij}) = 1$ et $Tr(f_{ij}) = 1$

$\Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad f_{ij}$ est un projecteur

donc $(f_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs.

MANGIALOMINI
Aurélien

Rapport de colle 23

Exercice 1. Soient α et β deux réels. On définit l'application linéaire

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+3y+\alpha z+\beta t, 2x-y+2z+t, -x+y+2z) \end{array}.$$

1. Donner A la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Pour quelles valeurs de α et β l'application φ est-elle surjective ?

1) $Mat_{\mathcal{E}_{\text{can}}\mathbb{R}_4, \mathcal{E}_{\text{can}}\mathbb{R}_3}(\varphi) =$

$$\begin{array}{cccc|c} \varphi(e_{4,1}) & \varphi(e_{4,2}) & \varphi(e_{4,3}) & \varphi(e_{4,4}) & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (e_{3,1} \\ (e_{3,2} \\ (e_{3,3} \end{array}$$

2) φ surjective $\Leftrightarrow$ $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^3$

$\left(\text{Im}(\varphi) \text{ s.e.v. de } \mathbb{R}^3\right) \Leftrightarrow \underbrace{\dim(\text{Im}(\varphi))}_{rg(\varphi)} = 3$

ie il faut que $rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3$

ie $rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 0 & -7 & 2-2\alpha & 1-2\beta \\ 0 & 4 & 2+\alpha & \beta \end{pmatrix} = 3$ $\quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $\quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

ie $rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 0 & -1 & \frac{2-2\alpha}{7} & \frac{1-2\beta}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2+\alpha}{4} & \frac{\beta}{4} \end{pmatrix} = 3$ $\quad L_2 \leftarrow \frac{1}{7}L_2$, $\quad L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_1$

ie $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 0 & -1 & \frac{2-2\alpha}{7} & \frac{1-2\beta}{7} \\ 0 & 0 & \frac{22-\alpha}{28} & \frac{4-\beta}{28} \end{pmatrix} = 3$ $\quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

ie $\frac{22-\alpha}{28} \neq 0$ ou $\frac{4-\beta}{28} \neq 0$

ie $(\alpha, \beta) \neq (22, 4)$ □.

Rapport de Colle, semaine 29

Wassim M.

Enoncé :
Determiner la matrice de l'application lineaire $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \longmapsto XP \end{array} \right.$

dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$

Solution :
Soit $B = (1, X, X^2)$ base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$
$\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$

$$\mathrm{Mat}_{B,\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array}$$

Raphaël Mouchonnet colle n°

Enoncé

· On considère l'endomorphisme f de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -10 & -5 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$

1) Mq f est un projecteur.

On a $M^2 = M$

Donc $Mat_B(f^2) = Mat_B(f)$

$\Rightarrow f^2 = f$

2) Determiner $Ker(f)$ et $Im(f)$

$Im(f) = Im(M) = Vect(M_{\cdot,1}, M_{\cdot,2}, M_{\cdot,3})$

On remarque que $M_{\cdot,2} = 2M_{\cdot,3} - 3M_{\cdot,1}$

Donc $Im(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} x + 15y + 9z = 0 \\ 6y + 3z = 0 \\ -10y - 5z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 15y + 9z = 0 \\ 2y + z = 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ 2y + z = 0 & L_3 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ z = -2y \end{cases}$$

Donc $\ker(p) = \{(3y, y, -2y) : y \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}(3, 1, -2)$

GUILLERAY
Stanislas

Semaine de colle n° 29

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, notée $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère noté dans $\underline{e}$:

$B_1 = ((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1))$ et $B_2 = ((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7))$

Déterminer la matrice de passage de B_1 à B_2

Solution : $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ $\quad B_2 = (v_1, v_2, v_3)$

$$P_{B_1 \to B_2} = \mathrm{Mat}_{B_2, B_1}(id_{\mathbb{R}^3})$$

$$= \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} id(v_1) & id(v_2) & id(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /u_1 \\ /u_2 \\ /u_3 \end{array} \end{array}$$

on résout : Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^9$

$$\begin{cases} 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 3 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 = 1 \\ 1\lambda_1 + 3\lambda_2 + 1\lambda_3 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 1\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 = 5 \\ 2\mu_1 + 3\mu_2 + 7\mu_3 = 3 \\ 1\mu_1 + 3\mu_2 + 1\mu_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 7\alpha_3 = -1 \\ 1\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1\alpha_3 = 7 \end{cases}$$

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad id(v_1) \qquad \mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \quad id(v_2) \qquad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad id(v_3)$

$$\begin{cases} \boxed{1}\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 3 \\ 0 + -1\lambda_2 + 1\lambda_3 = -5 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 + 1\lambda_2 - 2\lambda_3 = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{1}\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 = 5 \\ 0 - 1\mu_2 + 1\mu_3 = -7 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 + 1\mu_2 - 2\mu_3 = -3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{1}\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ 0 - 1\alpha_2 + 1\alpha_3 = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 + 1\alpha_2 - 2\alpha_3 = 6 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{1}\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 3 \\ 0 \ \boxed{-1}\lambda_2 + 1\lambda_3 = -5 \\ 0 + 0 \ -1\lambda_3 = -4 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{1}\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 = 5 \\ 0 \ \boxed{-1}\mu_2 + 1\mu_3 = -7 \\ 0 + 0 \ -1\mu_3 = -10 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{1}\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ 0 \ \boxed{-1}\alpha_2 + 1\alpha_3 = -3 \\ 0 + 0 \ -1\alpha_3 = 3 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{1}\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0 = -9 & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ 0 \ \boxed{-1}\lambda_2 + 0 = -9 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ 0 + 0 \ \boxed{-1}\lambda_3 = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{1}\mu_1 + 2\mu_2 + 0 = -25 & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ 0 \ \boxed{-1}\mu_2 + 0 = -17 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ 0 + 0 \ \boxed{-1}\mu_3 = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{1}\alpha_1 + 2\alpha_2 + 0 = 10 & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ 0 \ \boxed{-1}\alpha_2 + 0 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ 0 + 0 \ \boxed{-1}\alpha_3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{\lambda_1} + 0 + 0 = -27 & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ 0 + \boxed{-\lambda_2} + 0 = -9 \\ 0 + 0 + \boxed{-\lambda_3} = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{\mu_1} + 0 + 0 = -59 & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ 0 + \boxed{-\mu_2} + 0 = -17 \\ 0 + 0 + \boxed{-\mu_3} = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{\alpha_1} + 0 + 0 = 10 & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ 0 + \boxed{-\alpha_2} + 0 = 0 \\ 0 + 0 + \boxed{-\alpha_3} = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{donc} \quad P_{B_1 \to B_2} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} id(v_1) & id(v_2) & id(v_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -27 & -59 & 10 \\ 9 & 17 & 0 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /u_1 \\ /u_2 \\ /u_3 \end{array} \end{array}}$$

ENONCÉ

Soit $A = \begin{pmatrix} 72 & -60 \\ 100 & -78 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à A.
Determiner une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

SOLUTION :

On cherche deux vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^2$ tq $f(u_1) = 2u_1$ et $f(u_2) = -3u_2$
i.e. $u_1 \in \mathrm{Ker}(f - 2id)$ et $u_2 \in \mathrm{Ker}(f + 3id)$.

Pour u_1 :

$$u_1 \in \mathrm{Ker}(f-2id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 75 & -60 \\ 100 & -80 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{15} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{20} L_2 \end{array}$$

$u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ convient

Pour u_2 :

$$u_2 \in \mathrm{Ker}(f+3id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 80 & -60 \\ 100 & -75 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{20} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{25} L_2 \end{array}$$

$u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ convient.

Les vecteurs (u_1, u_2) sont non colinéaires donc forment une famille libre. Par cardinalité dimension (u_1, u_2) forment une base de $\mathbb{R}_2$.

Par construction, $\mathrm{Mat}_{u_1, u_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ □

Adam M.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f de matrice $M=\begin{pmatrix}2&-5&3\\2&-7&4\\3&-11&6\end{pmatrix}$
$B = \mathrm{Can}_{\mathbb{R}^3}$. Déterminer une base de $F = \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base de $G = \mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Montrer qu'ils sont supplémentaires.
Soient $u_1 = 2e_1+e_2+e_3$, $u_2 = e_1-e_3$, $u_3 = 2e_1+e_2$.
Montrer que (u_1,u_2,u_3) base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M' relativement à cette base.

Solution :

Soit $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, $f(x,y,z)=(x,y,z)$

$$\begin{pmatrix}1&-5&3\\2&-8&4\\3&-11&5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-5&3\\0&2&-2\\\cancel{0}&\cancel{4}&\cancel{-4}\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1\end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&-2\end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1+\frac{5}{2}L_2$$

$\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(2,1,1)$

Soit $(x,y,z)\in \mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, $f^2(x,y,z) = -(x,y,z)$

$$M^2=\begin{pmatrix}3&-8&4\\2&-5&2\\2&-4&1\end{pmatrix}$$

$$M^2+I_3=\begin{pmatrix}4&-8&4\\2&-4&2\\2&-4&2\end{pmatrix}$$ donc $\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(2,1,0))$

Soit $(x,y,z)\in F\cap G$

$\exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ $(x,y,z) = -\lambda_1 u_1 = \lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3$

$$\begin{pmatrix}2&2&1\\1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0&2&3\\0&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_1-2L_1\end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix} \quad L_1\leftarrow L_1-2L_2$$

Donc $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, la famille est libre et $(x,y,z)=(0,0,0)$

$$\mathrm{Mat}_B(f(u_1)) = \begin{pmatrix}2&-5&3\\2&-7&4\\3&-11&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_B(3u_2-2u_3)$$

$$\mathrm{Mat}_B(f(u_2)) = \begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_B(5u_2-3u_3)$$

$$\text{Donc } Mat_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

GAYES S

Semaine de colle numero

Exercice : En fonction de $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, combien faut-il de 0 au minimum dans une matrice (n, n) pour qu'on soit sûr qu'elle est de rang $\leq k$ quels que soient les coefficients ?

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

. Cas où $k \geq n$

Il faut aucun zéros dans A

Ainsi $rg(A)$ est toujours tel que $rg(A) \leq n \leq k$.

. Cas où $k \in [\![1, n-1]\!]$

Posons $m :=$ le nombre minimum de zéros dans A pour que $rg(A) \leq k$.

Montrons $m > n^2 - n$

Supposons par l'absurde $m \leq n^2 - n$

→ cas d'égalité $m = n^2 - n$

Prenons

$$A = \begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}$$ où $*$ est un coefficient non nul.

alors $rg(A)$ sera d'au plus n

(dans le cas ci-dessus $rg(A) = \underbrace{n \leq k \leq n-1}_{(\lightning)}$)

→ cas $m < n^2 - n$

on rajoute des $(*)$ en plus de ceux sur la diagonale.

Par exemple $A' = \begin{pmatrix} * & 0 & & 0 \\ & * & * & \\ & & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix}$

$rg(A') = n$ car échelonné ou peut être ramené à une matrice échelonnée à n pivots

$n \leq k \leq n-1$ $(\lightning)$

Donc $m \leq n^2 - 1$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ posons

$\mathcal{P}(k)$: « le nombre minimum m de 0 dans A pour que $rg(A) \leq k$ est tel que $m = n^2 - k$ »

Raisonnons par récurrence finie.

<u>Initialisation</u> : $k = 1$

Montrons $n^2 - 1$ est le minimum de 0 à mettre dans A pour $rg(A) \leq 1$

ie A a un seul pivot où A est échelonnée

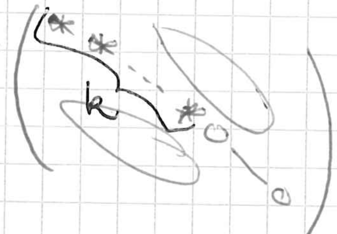
donc il suffit que tous les coefficients de A soient nuls sauf 1. donc on mettra $n^2 - 1$ zéros

<u>Hérédité</u> Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ fixé tel que $\mathcal{P}(k)$

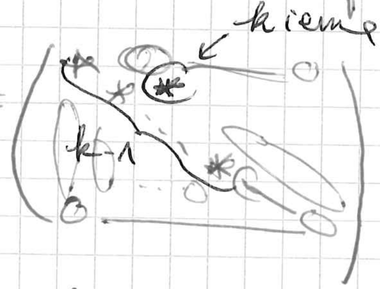
Montrons $\mathcal{P}(k+1)$

Étudions $\mathcal{P}(k)$

① Dans le « pire » des cas les k $(*)$ seront disposées comme ci-dessous de sorte que A soit composé de k lignes indépendantes.

$A' =$ 

② ~~Dans~~ Certaines lignes auront 2 ou plus $(*)$, les autres en auront soit 1 soit 0 [auquel cas on comptera moins de pivots dans une forme échelonnée de A]

$A' =$  $rg(A) < k$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$

Ⓐ On est dans ① dans $\mathcal{M}_k$ alors en remplaçant une valeur nulle de la diagonale de A' par $*$ pour former A

GAYES S

on a $(k+1)$ lignes indépendantes

ie $\operatorname{rg}(A) = k+1$

(B) Sinon on a $\operatorname{rg}(A') < k$

Ajouter une $*$ ailleurs que comme en (A) pour former $\underset{\in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})}{A}$

donnera $\operatorname{rg}(A) \leq k-1$

Donc par (A) et (B) $\mathcal{P}(n+1)$

<u>Conclusion</u>

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad m = n^2 - k}$$

NIBS
Mathéo
1/2

Rapport de colle semaine 29

Énoncé

EXERCICE 3 — Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Solution :

1) Montrons que $P \cap D = \{0\}$

Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $u \in P\cap D$.

alors : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ \text{et } x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=2x \\ z=3x\end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0\end{cases}$

Ainsi $P\cap D = \{0\}$

• Montrons que $\dim(P)+\dim(D)=\dim(\mathbb{R}^3)=3$.

On a : $P = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ x+y+z=0\}$

$= \{(-y-z;\ y, z) \mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\}$

$= \{y(-1,1,0)+z(-1,0,1) \mid (y,z)\in\mathbb{R}^2\}$

$= \mathrm{Vect}(\underbrace{(-1,1,0)}_{u_1}, \underbrace{(-1,0,1)}_{u_2})$

u_1 et u_2 sont non colinéaires, la famille (u_1,u_2) est base de P et $\dim(P)=2$.

• $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\}$

$= \{(x;\ 2x;\ 3x) \mid x\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,2,3)}_{u_3})$.

Ainsi, (u_3) est base de D, $\dim(D)=1$.

On a : $\dim(P)+\dim(D)=3$ donc P et D sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

4) On a, $p \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 = P \oplus D & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x = x_P + x_D & \longmapsto & x_P \end{array} \right.$

Comme $u \in \mathbb{R}^3$, il existe! $(x_P, x_D) \in P \times D$ tel que $x = x_P + x_D$
i.e. il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$x_P = \alpha_1(-1,1,0) + \alpha_2(-1,0,1) \quad \text{et} \quad x_D = \alpha_3(1,2,3)$$

Ainsi $u = (-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \,;\, \alpha_1 + 2\alpha_3 \,;\, \alpha_2 + 3\alpha_3)$

On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} x = -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ y = \alpha_1 + 2\alpha_3 \\ z = \alpha_2 + 3\alpha_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 3 & z \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & x+y \\ 1 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 3 & z \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 6 & x+y+z \\ 1 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 3 & z \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{x+y+z}{6} \\ 1 & 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & 3 & z \end{array}\right) L_1 \leftarrow \frac{1}{6} L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{x+y+z}{6} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-x+2y-z}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-x-y+z}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

Ainsi $\alpha_1 = \dfrac{-x+2y-z}{3}$ et $\alpha_2 = \dfrac{-x-y+z}{2}$

Nous avons alors : $B = (e_1, e_2, e_3)$ base de $\mathbb{R}^3$

$$p(e_1) = \alpha_1(-1,1,0) + \alpha_2(-1,0,1) \qquad (x_P)$$

$e_1 = (1,0,0)$ $= (-\alpha_1 - \alpha_2 \,,\, \alpha_1 \,,\, \alpha_2)$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \,;\, -\frac{1}{3} \,;\, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{6} \,;\, -\frac{1}{3} \,;\, -\frac{1}{2}\right)$$

$$p(e_2) = \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \,;\, \frac{2}{3} \,;\, -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{6} \,;\, \frac{2}{3} \,;\, -\frac{1}{2}\right)$$

$$p(e_3) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \,;\, -\frac{1}{3} \,;\, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{6} \,;\, -\frac{1}{3} \,;\, \frac{1}{2}\right)$$

NISS Mathéo 2/2

$$\text{D'où : } Mat_B(p) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} p(e_1) & p(e_2) & p(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Nous savons, p étant projecteur, que $Ker(p) + Im(p) = \mathbb{R}^3$
avec : $Ker(p) = D$ et $Im(p) = P$

Nous savons : $Im(p) = P = Vect(u_1, u_2)$

Or : u_1 et u_2 appartenant à P nous avons
$p(u_1) = u_1$ et $p(u_2) = u_2$. $(u_1 = u_1 + 0_D$ et $u_2 = u_2 + 0_D)$

De même nous avons : $D = Vect(\underbrace{(1,2,3)}_{u_3})$ et $p(u_3) = u_3$

Montrons que (u_1, u_2, u_3) forme une base $\in Ker(p)$ de $\mathbb{R}^3$:
en montrant leur liberté : Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftarrow \frac{1}{6} L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

Ainsi $\mathcal{B}_0 = (u_1, u_2, u_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p(u_1) & p(u_2) & p(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$$

$$= \mathrm{Diag}_3(1 ; 1 ; 0)$$

Ahmed
Amine

Rapport de colle semaine 29

Énoncé :

Exercice 1. On définit deux polynômes $A = X^3 - X^2 - X + 2$ et $B = X^3 - 3X^2 + 2X$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Trouver trois polynômes P_0, P_1 et P_2 de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que pour tous i et k dans $[\![0,2]\!]$, on ait $P_i(k) = \delta_{i,k}$.
4. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner, pour un polynôme P quelconque, les composantes de P dans la base (P_0, P_1, P_2).
5. Factoriser le polynôme B. En déduire la matrice de f dans la base (P_0, P_1, P_2).

Solution :

1) Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_2[X]^2$

alors $\exists (Q_1, Q_2, R_1, R_2) \in \mathbb{R}[X]^2 \times \mathbb{R}_2[X]^2$ tel que :

$AP_1 = BQ_1 + R_1$ et $AP_2 = BQ_2 + R_2$

où $\deg(R_1) < \deg(B)$ et $\deg(R_2) < \deg(B)$

donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$

De plus, $A(\lambda P_1 + \mu P_2) = B(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + \lambda R_1 + \mu R_2$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Par stabilité de $\mathbb{R}_2[X]$ on a $\lambda R_1 + \mu R_2 \in \mathbb{R}_2[X]$

et par unicité de la division euclidienne, pour la division euclidienne de $A(\lambda P_1 + \mu P_2)$ par B :

$Q = \lambda Q_1 + \mu Q_2$ et $R = \lambda R_1 + \mu R_2$

d'où $f(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$

or $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$ $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$

2) On a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{Can}\,\mathbb{R}_2[X]}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /1 \\ /X \\ /X^2 \end{array} \end{array}$$

or $f(1)$ = reste division euclidienne de A par B

$R = 2X^2 - X$

de même : $f(X) = 5X^2 - 4$

et $f(X^2) = 15X^2 - 4X - 10$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}an\, \mathbb{R}_2[X]}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 15 \end{pmatrix}$

3) $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$

$P_1 = -X(X-2)$

$P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$

4) Soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda P_0 + \mu P_1 + \gamma P_2 = 0$

Mq $\lambda = \mu = \gamma = 0$.

En évaluant en 0, on a : $\lambda P_0(0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

__________ 1, on a : $\mu P_1(0) = 0 \Rightarrow \mu = 0$

__________ 2, on a : $\gamma P_2(0) = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

Par cardinalité - dimension, (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tq $P = aX^2 + bX + c$ (où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$)

Soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $P = \lambda P_0 + \mu P_1 + \gamma P_2$

alors $P = \frac{\lambda}{2}(X-1)(X-2) - \mu X(X-2) + \frac{\gamma}{2}X(X-1)$

$= X^2\left(\frac{\lambda}{2} - \mu + \frac{\gamma}{2}\right) + X\left(-\lambda - \frac{\lambda}{2} + 2\mu - \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{\lambda}{2}$

on a : $\begin{cases} \frac{\lambda}{2} - \mu + \frac{\gamma}{2} = a \\ \frac{-3\lambda}{2} + 2\mu - \frac{\gamma}{2} = b \\ \frac{\lambda}{2} = c \end{cases}$

$\underset{\lambda P_0(0)}{\overset{\parallel}{P(0)}} = c$ d'où $c = \lambda$,

$P(1) = a + b + c$ or $P(1) = \mu$

$P(2) = 4a + 2b + c$ or $P(2) = \gamma$

donc $\begin{cases} a + b + c = \mu \\ 4a + 2b + c = \gamma \\ c = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = \mu \\ -2b - 3c = \gamma \\ c = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \mu - b - c \\ b = \frac{\gamma + 3\lambda}{-2} \\ c = \lambda \end{cases}$

d'où $a = \mu + \frac{\gamma + 3\lambda}{2} - \lambda = \mu + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\lambda$

donc $(a, b, c) = \left(\mu + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\lambda,\ -\frac{1}{2}\gamma - \frac{3}{2}\lambda,\ \lambda\right)$

5) $B = X^3 - 3X^2 + 2X$

2, 0 et 1 sont racines de B, alors

$B = (X-1)X(X-2) = X(X-1)(X-2)$

alors $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\theta) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \theta(P_0) & \theta(P_1) & \theta(P_2) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} /P_0 \\ /P_1 \\ /P_2 \end{array}$$

où $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ base de $\mathbb{R}_2[X]$

$AP_0 = (X^3 - X^2 - X + 2)\left(\frac{1}{2}(X-1)(X-2)\right)$

or $P_0(1) = P_0(2) = 0$

de même pour $P_1(0)$ et $P_1(2)$

——— $P_2(1)$ et $P_2(0)$

donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -3/2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Titouan D

Rapport de colle semaine 29

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_4[X])$ telle que $f(P(X)) = P(1-X)$ de matrice A dans la base canonique. Déterminer A^{-1}.

Soit $P(X) \in \mathbb{C}_4[X]$

$$f(f(P(X))) = f(P(1-X))$$
$$= P(1-(1-X))$$
$$= P(X)$$

On pose $B = \mathrm{Can}_{\mathbb{C}_4[X]}$

$f^2 = id_{\mathcal{L}(\mathbb{C}_4[X])}$

$$\Rightarrow \mathrm{Mat}_B(f^2) = \mathrm{Mat}_B(id)$$
$$= I_5$$
$$= \underbrace{\mathrm{Mat}_B(f)}_{A} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_B(f)}_{A}$$

Donc $A^{-1} = A$

On calcule donc l'image de chacun des vecteurs de

$$B = (1, X, X^2, X^3, X^4)$$

$f(1) = 1$

$f(X) = 1-X$

$f(X^2) = (1-X)^2$

$= X^2 - 2X + 1$

$f(X^3) = (1-X)^3$

$= 1 - 3X + 3X^2 - X^3$

$f(X^4) = (1-X)^4$

$= 1 - 4X + 6X^2 - 4X^3 + X^4$

Ainsi $A^{-1} = A = \mathrm{Mat}_B(f) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(1) & f(x) & f(x^2) & f(x^3) & f(x^4) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} /1 \\ /x \\ /x^2 \\ /x^3 \\ /x^4 \end{matrix} \end{array}$

Martin K.-L. Colle de la semaine 29.

Exercice : En fonction de $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, combien faut-il de 0 au minimum dans une matrice (n, n) pour qu'on soit sûr qu'elle est de rang $\leq k$ quels que soient les coefficients ?

Solution.

Soient $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On distingue deux cas.

(i) $k > n$.

Puisque $rg(A) \leq n < k$, il suffit que A n'ait aucun coefficient nul pour que $rg(A) \leq k$.

(ii). $k \leq n$.

Nous montrons qu'il faut que A ait au moins $n^2 - k$ coefficients nuls.

Par l'absurde, supposons que A possède $k+1$ coefficients non nuls. Alors, il est possible que $A = J_{n,p}(k+1)$, qui est de rang $k+1 > k$. Donc, A doit avoir au plus k coefficients non nuls, soit au moins $n^2 - k$ coefficients nuls.

Louis D. Semaine de colle n° 29

Énoncé :

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$. Et, notées dans $\underline{e}$,

$$\mathcal{B}_1 = (\underbrace{(1,2,1)}_{u_1}, \underbrace{(2,3,3)}_{u_2}, \underbrace{(3,7,1)}_{u_3})$$

$$\mathcal{B}_2 = (\underbrace{(3,1,4)}_{v_1}, \underbrace{(5,3,2)}_{v_2}, \underbrace{(1,-1,7)}_{v_3})$$

Déterminer $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$

Solution :

$$P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1}(\mathrm{id})$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & ? & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /u_1 \\ /u_2 \\ /u_3 \end{array} \end{array}$$

On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tq

$v_1 = (3, 1, 4) = a u_1 + b u_2 + c u_3$

On résout :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 7L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -27 \\ b = 9 \\ c = 4 \end{cases}$$

Donc $v_1 = -27u_1 + 9u_2 + 4u_3$

De même $v_2 = -59u_1 + 17u_2 + 10u_3$

et $v_3 = 10u_1 + 0u_2 - 3u_3$

Finalement on a :

$$\boxed{P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -27 & -59 & 10 \\ 9 & 17 & 0 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix}}$$

David Tisiuin   Colle de la semaine 28

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base (e_1, e_2, e_3) et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2, e_3)

Soit $u = 2e_1 + e_2$, $v = -e_1 - e_2$, $w = e_3 - e_1$.

a) Montrer que (u, v, w) est une base de E

b) Déterminer la matrice f dans la base (u, v, w)

a) (u,v,w) est composé de trois vecteurs, montrons alors que la famille est libre, on pose la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}$$

elle possède trois pivots de Gauß, elle est donc inversible

ce qui montre la liberté de (u, v, w) d'où (u,v,w) base de E

b) On pose $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ et $B = (u, v, w) =$

déterminons $\mathrm{Mat}_B(f)$ or $\mathrm{Mat}_B(f) = (P_{\underline{e} \to B})^{-1} \mathrm{Mat}_{\underline{e}}(f)\, P_{\underline{e} \to B}$

$= \mathrm{Mat}_{B}(id)\, \mathrm{Mat}_e(f)\, \mathrm{Mat}_{B,e}(id)$

or $\mathrm{Mat}_{B,e}(id) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculons son inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{L_2 \leftrightarrow L_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

Ainsi $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times A \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Enfin $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Jules R. Colle de la semaine 29

Énoncé : On considère l'application linéaire définie par :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X] \\ P \longmapsto P'(X-1) - P \end{array} \right.$$

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$
2. Déterminer le noyau et l'image de f (ainsi que leurs dimensions).
3. Justifier que $((X-1)^k)_{k \in [\![0,4]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ et écrire la matrice de f dans cette base.
4. Quel est le lien entre les deux matrices écrites ? On fera intervenir une matrice de changement de base notée P.

Solution :

1.

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{Can}_{\mathbb{R}_4[X]}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) & f(X^4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ /1 \\ /X \\ /X^2 \\ /X^3 \\ /X^4 \end{array}$$

car :

$f(1) = 0(X-1) - 1 = -1$

$f(X) = 1(X-1) - X = -1$

$f(X^2) = 2X(X-1) - X^2 = 2X^2 - 2X - X^2 = X^2 - 2X$

$f(X^3) = 3X^2(X-1) - X^3 = 3X^3 - 3X^2 - X^3 = 2X^3 - 3X^2$

$f(X^4) = 4X^3(X-1) - X^4 = 4X^4 - 4X^3 - X^4 = 3X^4 - 4X^3$

2.

On a que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(-1, X^2-2X, 2X^3-3X^2, 3X^4-4X^3)$$

donc $\mathrm{Im}(f)$ est dimension 4.

Par théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{4} = \underbrace{\dim(\mathbb{R}_4[X])}_{5}$$

d'où $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$

3. D'après le théorème des degrés échelonnées, on a que $((X-1)^k)_{k\in[\![0,4]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

Notons $\mathcal{B} = ((X-1)^k)_{k\in[\![0,4]\!]}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(1) & f(X-1) & f((X-1)^2) & f((X-1)^3) & f((X-1)^4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /1 \\ /(X-1) \\ /(X-1)^2 \\ /(X-1)^3 \\ /(X-1)^4 \end{array}$$

4. Théorème changement de base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (P_{\mathrm{Can}_{\mathbb{R}_4[X]}\to\mathcal{B}})^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathrm{Can}_{\mathbb{R}_4[X]}}(f)$$

Écrivons $P_{\mathrm{Can}_{\mathbb{R}_4[X]}\to\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathrm{Can}_{\mathbb{R}_4[X]}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_4[X]})$

$$P_{\mathrm{Can}_{\mathbb{R}_4[X]}\to\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & X-1 & (X-1)^2 & (X-1)^3 & (X-1)^4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} /1 \\ /X \\ /X^2 \\ /X^3 \\ /X^4 \end{array}$$

Celia A. Semaine n° 29.

énoncé :

Exercice 5 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On lui associe l'application f définie par :

$$\left| \begin{array}{cccc} f & : & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ & & M & \longmapsto & AM\,. \end{array} \right.$$

1. Démontrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
2. Démontrer que f est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et calculer f^{-1}.
3. Calculer la matrice de f (resp. f^{-1}) dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
4. Que peut-on dire des deux matrices calculées à la question précédente?

Solution :

1. Calculons le déterminant de A.

$\det(A) = 4 - 6 = -2$.

Ainsi, $\det(A) \neq 0$. A est donc inversible.

Selon la formule de Cramer,

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

2. Soit B la base canonique de $M_2(\mathbb{K})$.

Si $\mathrm{Mat}_B(f)$ est inversible, alors f est un automorphisme.

Déterminons $\mathrm{Mat}_B(f)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{22}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = f(E_{11}) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = f(E_{22})$$

Nous réalisons les deux autres calculs de manière analogue.

d'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} / E_{11} \\ / E_{12} \\ / E_{21} \\ / E_{44} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(E_{11}) & & & f(E_{44}) \end{array} & \end{array}$$

Calculons son rang pour déterminer si elle est inversible.

$$\text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$$

$$= 4.$$

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible et f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Posons $g \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & A^{-1}M \end{array} \right.$ une application linéaire bien définie.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$f \circ g(M) = f(A^{-1}M) = AA^{-1}M = M$.

$g \circ f(M) = g(AM) = A^{-1}AM = M$.

Ainsi, $\boxed{f^{-1} = g.}$

3. Selon la question précédente,

$$\boxed{Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

Nous calculons $Mat_B(f^{-1})$ de manière analogue et obtenons

$$\boxed{Mat_B(f^{-1}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

4. Selon le cours,

$$\boxed{Mat_B(f)^{-1} = Mat_B(f^{-1})}$$

Mehdi B   Colle de la semaine 29

Exercice : Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même défini par $\varphi(P(X)) = P(X+1)$. Montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme, en écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que φ est inversible et donner son inverse.

Solution :

- Montrons que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\deg(P(X+1)) = \deg(P(X)) \leq n$

Donc $\underline{P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]}$

- Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1)$$
$$= \lambda \underbrace{P(X+1)}_{\varphi(P)} + \mu \underbrace{Q(X+1)}_{\varphi(Q)}$$

Donc $\underline{\varphi \text{ est linéaire}}$

- On pose $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. Nous calculons :

$\varphi(1) = 1$
$\varphi(X) = X+1$
$\varphi(X^2) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$
Puis, d'après la formule du binôme de Newton
(X et 1 commutent)

$$\varphi(X^n) = (X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k = \binom{n}{0}\times 1 + \binom{n}{1}X + \binom{n}{2}X^2 + \dots + \binom{n}{n}X^n$$

Ainsi :

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \dots & \varphi(X^n) \end{array} & \\
\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & 2 & & n \\
\vdots & 0 & 1 & \ddots & \frac{n(n-1)}{2} \\
\vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{array}
\end{array}$$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est triangulaire avec des coefficients diagonaux tous non nuls. elle est donc inversible.

φ est donc un automorphisme, qui est donc inversible.

• L'application $\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X-1) \end{array} \right.$

est réciproque de φ : si $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\varphi \circ \psi(P) = \varphi(P(X-1)) = P(X)$$
$$\psi \circ \varphi(P) = \psi(P(X+1)) = P(X)$$

Donc $\underline{\varphi^{-1} = \psi}$

Lina. A

Colle de la semaine 3

Énoncé

Soit E un $\mathbb{R}$-ev

$\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ base de E et $f\in\mathcal{L}(E)$ de matrice.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ dans la base $\mathcal{B}$.

a. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une de $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires ?

b. Soit $u=e_1+e_2-e_3$, justifier que $(u,f(e_1),f(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice f relativement à cette base.

Solution

a. Base de $\operatorname{Ker} f$.

Soit $X\in\operatorname{Ker} f$. $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

Résolvons :

$$f(X)=0$$

$$\iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f(X))=0$$

$$\iff \begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

En appliquant le pivot de Gauss :

$\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(1,1,-1)$

Donc $(1,1,-1)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

et $\dim(\operatorname{Ker} f)=1$.

Par le théorème du rang : $\operatorname{rg}(f)=2$.

• Base de $\operatorname{Im} f$:

$\operatorname{Im}(f)\overset{\text{déf}}{=}\operatorname{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))$.

Or $\dim(\operatorname{Im} f)=2$ et $f(e_1)=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\not\parallel f(e_2)=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

Donc $(f(e_1),f(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

On sait que $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(E)$

Il reste à montrer que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \emptyset$.

Par l'absurde supposons que $(-1, 1, -1) \in \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2))$

Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(1, 1, -1) = (\lambda_1, 2\lambda_1, 0) + (-2\lambda_2, 0, \lambda_2).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 \cancel{2} = 1 \\ \lambda_2 = -1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \quad ↯$$

Donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \emptyset$ et par conséquent $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

b. En a on a montré que u est une base de $\operatorname{Ker} f$, $(f(e_1), f(e_2))$ base de $\operatorname{Im} f$ et que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.

Nous pouvons en déduire que : $(u, f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}_3$.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(u) & f(f(e_1)) & f(f(e_2)) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} u \\ f(e_1) \\ f(e_2) \end{array} \end{array}$$

f linéaire

$f(u) = 0 \quad u \in \operatorname{Ker}(f)$

$$f(f(e_1)) = f(e_1) + 2f(e_2)$$
$$f(f(e_2)) = -2f(e_1) + f(e_3)$$
$$= -2f(e_1) + f(e_2) + f(e_1)$$
$$= -f(e_1) + f(e_2)$$

Pierre V. Colle de la semaine 29

Exercice 1 : On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, notée $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère, noté dans $\underline{e}$: $B_1 = ((1;2;1);(2;3;3);(3;7;1))$ et $B_2 = ((3;1;4);(5;3;2);(1;-1;7))$.

Déterminer la matrice de passage de B_1 à B_2 .

Solution

$B_1 = (u_1=(1,2,1), u_2=(2,3,3), u_3=(3,7,1))$

$B_2 = (v_1=(3,1,4), v_2=(5,3,2), v_3=(1,-1,7))$

On a $P_{\underline{e}\to B_1} = \mathrm{Mat}_{B_1,\underline{e}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$

$P_{\underline{e}\to B_2} = \mathrm{Mat}_{B_2,\underline{e}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$

$P_{e\to B_1}$ est inversible et $(P_{e\to B_1})^{-1} =$ (car matrice de passage)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -18 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -18 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\underline{e},B_1}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Or $P_{B_1\to B_2} = \mathrm{Mat}_{B_2,B_1}(id_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Mat}_{\underline{e},B_1}(id_{\mathbb{R}^3}) \times \mathrm{Mat}_{B_2,\underline{e}}(id_{\mathbb{R}^3})$

$= (P_{\underline{e}\to B_1})^{-1} \times (P_{e\to B_2})$

$$P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -59 & 10 \\ 9 & 17 & 0 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix}$$

Rémi . S

Semaine de colle n°29

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} a_{i,j}$$

Montrer que A est inversible

Solution :

Supposons par l'absurde que A est non-inversible

Alors $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})}$ et

$$A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\max(|\lambda_i|, i \in [\![1,n]\!], \lambda_i \neq 0) = |\lambda_i|$

On a : $\lambda_1 a_{i1} + \dots + \lambda_n a_{in} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_i a_{ii} = -\lambda_1 a_{i1} - \dots - \lambda_n a_{in}$$

inégalité triangulaire $\rightarrow$ $\Rightarrow |\lambda_i||a_{ii}| \leq \underset{\leq 1}{|\lambda_1|}|a_{i1}| + \dots + |\lambda_n||a_{in}|$

$|\lambda_i| \neq 0$ $\rightarrow$ $\Rightarrow |a_{ii}| \leq \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right||a_{i1}| + \dots + \underset{\leq 1}{\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_i}\right|}|a_{in}|$

$$\leq \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} a_{ij}$$

Contredit l'hypothèse.

Léon. N

Rapport de colle de la semaine n°

Enoncé : $(f,g) \in \left(\mathbb{R}^{3\,\mathbb{R}^2}\right) \times \left(\mathbb{R}^{2\,\mathbb{R}^3}\right)$, $h = f \circ g$.

On pose $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}can}(h) = A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1 Montrer que $h^2 = h$ et que $rg(h) = 2$

2 En déduire que $rg(f) = rg(g) = 2$.

3 Montrer que $g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$

Solution :

1 $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}can}(h)^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}can}(h)$

$\Rightarrow$ injectivité de $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}can}(h)$

$$\boxed{h^2 = h}$$

$rg(h) = \dim\big(Vect\big(\underbrace{(-1,-1,0),(1,-1,0)}_{\text{colinéaires}},(1,1,2)\big)\big)$

$= \dim\big(Vect\big(\underbrace{(1,-1,0),(1,1,2)}_{\text{non-colinéaires donc famille libre}}\big)\big)$

$$\boxed{rg(h) = 2}$$

2. Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ $\quad rg(f) \leqslant \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dimension du but}}}{2}$

De même $rg(g) = \dim(\underset{\subset \mathbb{R}^2}{Im(g)}) \leqslant \dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Or $rg(f \circ g) \leqslant \min\{rg(f), rg(g)\}$

Ce qui livre $\boxed{rg(f) = rg(g) = 2}$ (antisymétrie de $\leqslant$)

3. Comme $rg(g) = \dim(\mathbb{R}^2)$, g est surjective.

Ainsi $\exists g_d \in {\mathbb{R}^3}^{\mathbb{R}^2}$, $\quad g \circ g_d = id_{\mathbb{R}^2}$

Par le théorème du rang

$\dim(Ker f) + \underbrace{rg(f)}_{2} = 2 \implies \dim(Ker(f)) = 0$

$\implies Ker(f) = \{0\}$

$\implies f$ injective.

Ainsi $\exists f_g \in {\mathbb{R}^2}^{\mathbb{R}^3}$ $\quad f_g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$

D'après 1, $\quad (f \circ g) \circ (f \circ g) = f \circ g$

$\underset{f_g \circ}{\implies} \quad (g \circ f) \circ g = g$ $\qquad$ (associativité de $\circ$)

$\underset{\circ g_d}{\implies} \quad \boxed{g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}}$

Paul C.

1/5

Semaine de colle 29

Enoncé: Partie 1:

On note $B = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, Θ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^3$. On considère dans cette partie $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que:

$$J := Mat_B(u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) montrer que $u \circ u = \Theta$

2) a) déterminer le rang de u, en déduire ~~une~~ la dimension et une base de $Im(u)$

b) calculer $u((-1,-2,1))$. déterminer sans calcul une base de $Ker(u)$

c) $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

3) a) Montrer que $B' = ((-1,-2,1), (0,1,-1), (1,0,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$

b) sans utiliser de matrice de passage, calculer J' la matrice de u dans la base B'

c) déterminer la matrice de passage P de la base B à la base B'

d) donner le lien entre J, J' et P

Partie 2

Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \neq \Theta$, $v \circ v = \Theta$, où $\Theta = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On note: $\begin{cases} r = rg(v) \\ p = dim(Ker(v)) \end{cases}$

1) montrer que $Im(v) \subset Ker(v)$, en déduire $r \leq \frac{n}{2}$ et $p \geq \frac{n}{2}$

2) on suppose que $n=2$

a) montrer que $Im(v) = ~~Im~~\ Ker(v)$

b) Soit $e_1 \in Im(v) \setminus \{0_E\}$, Soit e_2 un antécédent de e_1 par v. montrer que (e_1, e_2) est une base de E et donner la matrice de v dans cette base

3) On suppose $n=3$.

a) montrer que $r=1$, en déduire la valeur de p.

Paul C.
2/5

b) en s'inspirant de la question précédente et de la partie 1, déterminer une base de E dans laquelle la matrice de v est $E_{1,3}$

Solution:

Partie 1

1/ montrons $Mat_B(u \circ u) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

$$Mat_B(u \circ u) = Mat_B(u) \times Mat_B(u) = J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) a) $rg(u) = rg(J)$

or $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{matrix}$

d'où $rg(J) = 1$. on en déduit $Im(J) = Vect((-1,-2,1)^T)$

d'où $rg(u) = 1$ et $Im(u) = Vect((-1,-2,1))$, d'où $(-1,-2,1) =: e_1$ base de $Im(u)$

b) $u(e_1) = 0$ on pose $e_2 := (0,1,-1)$

on remarque que $u(e_2) = 0$

de plus $e_1 \not\parallel e_2$ donc (e_1, e_2) libre.

Le théorème du rang livre: $\dim(\mathbb{R}^3) = rg(u) + \dim(Ker(u))$

i.e. $3 = 1 + \dim(Ker(u))$

i.e. $\dim(Ker(u)) = 2$

comme $\begin{cases} (e_1, e_2) \in Ker(u)^2 \\ (e_1, e_2) \text{ libre} \end{cases}$ et $|(e_1, e_2)| = \dim(Ker(u))$, ~~on~~

on en déduit (e_1, e_2) base de $Ker(u)$

c) $\begin{cases} e_1 \in Im(u) & (u(i) = e_1) \\ e_1 \in Ker(u) \end{cases}$ d'où $e_1 \in Im(u) \cap Ker(u)$

comme $Im(u) \cap Ker(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $Im(u)$ et $Ker(u)$ ne sont pas supplémentaires

Paul C.
3/8

3) a) montrons B' base de $\mathbb{R}^3$. On pose $e_3 = (1,0,0)$
comme $|B'| = \dim(\mathbb{R}^3)$, il suffit de montrer B' libre.
On résout le système homogène linéaire

$$(S) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

on en déduit que (S) a une unique solution, i.e. B' est libre.
donc B' base de $\mathbb{R}^3$

b) $u(e_1) = 0$
$u(e_2) = 0$ $\Big\}$ $(e_1, e_2) \in \mathrm{Ker}(u)^2$ donc $\mathrm{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J'$
$u(e_3) = (-1,-2,1) = 1\, e_1$

c) $P := P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) le théorème de changement de base livre:

$$\cancel{\mathrm{Mat}_{B'}(u) = \mathrm{Mat}\left(P_{B^* \to B'}\right)^{-1} \times \mathrm{Mat}_{B}(u) \times \mathrm{Mat}_{B^* \to B'}}$$

$$\mathrm{Mat}_{B'}(u) = \left(P_{B \to B'}\right)^{-1} \times \mathrm{Mat}_{B}(u) \times P_{B \to B'}$$

i.e. $J' = P^{-1} \times J \times P$

Partie 2

1) Soit $y \in \mathrm{Im}(v)$, $\exists x \in E : v(x) = y$.

$$\Rightarrow \underbrace{v \circ v(x)}_{0 \text{ car } v \circ v = 0} = v(y)$$

donc $y \in \mathrm{Ker}(v)$
i.e. $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

Paul C.

4/5

Le théorème du rang livre :

$\dim(E) = rg(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$

i.e. $n = r + p$.

de $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ on déduit $r \leq p$.

d'où $\begin{cases} n \leq 2p \\ n \geq 2r \end{cases} \iff \begin{cases} p \geq \frac{n}{2} \\ r \leq \frac{n}{2} \end{cases}$

2) a) $u \neq \theta$ donc $\exists x \in E \setminus \{0_E\} : x \in \mathrm{Im}(u)$ i.e. $r \geq 1$.

de plus, $1 \leq r \leq \underbrace{\frac{n}{2}}_{1}$

donc $r = 1$.

Le théorème du rang livre $2 = p + 1$ d'où $p = 1$.

ainsi :

$\begin{cases} r = p \\ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u) \\ \mathrm{Im}(u) \text{ sev de } \mathrm{Ker}(u) \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$

b) Par l'absurde, supposons (e_1, e_2) liée, i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : e_1 = \lambda e_2$.

comme $e_1 \neq 0$ ~~et~~ i.e. $u(e_2) \neq 0$, on sait $e_2 \notin \mathrm{Ker}(u)$

on a alors $\underbrace{u(e_1)}_{0 \text{ car } e_1 \in \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)} = \underbrace{\lambda u(e_2)}_{\neq 0}$ ↯

d'où $\begin{cases} (e_1, e_2) \text{ libre.} \\ (e_1, e_2) \in \mathrm{Ker} E^2 \\ |(e_1, e_2)| = \dim(E) \end{cases}$ donc (e_1, e_2) ~~libre et~~ génératrice de E

donc (e_1, e_2) base de E

3) a) comme en Q2.a, on sait $\begin{cases} 1 \leq r \leq \frac{3}{2} \\ r \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow r = 1$

Le théorème du rang livre $p + r = 3$ donc $p = 2$.

Paul C.
5/5

b) Soit : $\begin{cases} e_3 \in E \setminus \mathrm{Ker}(u), & e_3 \neq 0_E \text{ et } u(e_3) \neq 0 \\ e_1 := u(e_3) \neq 0, & e_1 \in \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u), \quad u(e_1) = 0 \\ e_2 \in \mathrm{Ker}(u) \setminus \mathrm{Im}(u) & \text{donc } e_2 \neq 0_E, \quad u(e_2) = 0 \end{cases}$

Q2.b livre (e_1, e_3) libre ~~et base de Ker~~

montrons $(e_1\, e_2\, e_3)$ libre. ~~par l'absurde, supposons~~

~~Soit $(\lambda_1, \lambda_3) \in \mathbb{K}^2$: $e_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3$~~

par l'absurde, supposons $\exists (\lambda_1, \lambda_3) \in (\mathbb{K}^*)^2$: $e_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3$.

alors $u(e_2) = \lambda_1 u(e_1) + \lambda_3 u(e_3)$

i.e. $0 = \lambda_1 \times 0 + \underbrace{\lambda_3}_{\neq 0} \underbrace{e_1}_{\neq 0}$ ↯

supposons $\exists\, \lambda_1 \in \mathbb{K}^*$: $e_2 = \lambda_1 e_1$. alors $e_2 \in \mathrm{Ker}(u) \setminus \mathrm{Im}(u)$
et $e_2 \in \mathrm{Im}(u)$ ↯
($\mathrm{Im}(u)$ sous espace vectoriel stable par multiplication par un scalaire)

donc (e_1, e_2, e_3) libre.
de plus $|(e_1, e_2, e_3)| = \dim(E)$
donc (e_1, e_2, e_3) génératrice de E
i.e. (e_1, e_2, e_3) base de E.

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} /e_1 \\ /e_2 \\ /e_3 \end{array} \end{array}$$

$= E_{1,3}$.

Alexandre M.

Colle semaine 29

Enoncé : Soit p un projecteur d'un espace E et soit M sa matrice dans une base quelconque de E. Donner la trace de M.

Soit p un projecteur sur E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Comme p est un projecteur on a $E = \mathrm{Ker}(p - id) \oplus \mathrm{Ker}(p)$

Soit $r \in \mathbb{N}$ $\dim(\mathrm{Ker}(p - id)) = r$

On a donc $\dim(\mathrm{Ker}(p)) = n - r$

$\exists (e_1, \dots, e_r) \in E^r$ base de $\mathrm{Ker}(p - id)$

$\exists (e_{r+1}, \dots, e_n) \in E^{n-r}$ base de $\mathrm{Ker}(p)$

On a $e = (e_1, \dots e_r, e_{r+1}, \dots e_n)$ base de E. [base d'une somme directe est la concaténé des bases]

De plus $\forall i \in [\![1, r]\!]$ $p(e_i) = e_i$ [$e_i \in \mathrm{Ker}(p-id)$]

$\forall j \in [\![r+1, n]\!]$ $p(e_i) = 0$ [$e_i \in \mathrm{Ker}(p)$]

donc
$$\mathrm{Mat}_e(p) = \begin{array}{cccccc|l} p(e_1) & \cdots & p(e_r) & p(e_{r+1}) & \cdots & p(e_n) & \\ \hline 1 & & & & & & e_1 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & e_r \\ & & & & & & e_{r+1} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & e_n \end{array}$$

donc $Tr(Mat_{\underline{e}}(p)) = r$

$= \dim(\ker(p - id))$

d'après la formule du rang

$\dim(E) = \dim(\ker(p)) + \dim(Im(p))$

donc $rg(p) = n - (n-r)$

$= r$

d'où $\boxed{Tr(Mat_{\underline{e}}(p)) = rg(p)}$

Anaé D.

Rapport de colle S29

Exercice 6 — Soit A la matrice définie par $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A, i.e. :

$$\left| \begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}) \\ & & X & \longmapsto & AX. \end{array} \right.$$

1. Quelle est la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$?
2. Déterminer une base (e_1, e_2) du noyau de f.
3. Déterminer une base (e_3) du noyau $f - 3\,\mathrm{id}$.
4. Démontrer que $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.
5. Calculer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$.
6. Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
7. Donner la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
8. Calculer les puissances de D.
9. En déduire les puissances de la matrice A.

Solution:

1. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})\,\mathcal{B}_0}(f) = ?$

On sait que $(E_{11}, E_{21}, E_{31}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$

D'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}),\mathcal{B}_0} = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0} f(E_{11}) \middle| \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0} f(E_{21}) \middle| \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0} f(E_{31}) \right)$

$f(E_{11}) = AE_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{21} + E_{31}$

De même, $f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{21} + E_{31}$

et $f(E_{31}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = E_{11} + E_{21} + E_{31}$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}),\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$

2. Déterminons une base (e_1, e_2) de $\mathrm{Ker}(f)$

On cherche $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ tels que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$X \in \mathrm{Ker}(f)$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad x + y + z = 0$

$\Leftrightarrow \quad z = -x - y$

D'où $\quad Ker(f) = Vect\left((1,0,-1)^T, (0,1,-1)^T\right)$

Comme ils sont non colinéaires on a que $\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ base de $Ker(f)$

3. Determinons une base (e_3) de $Ker(f - 3Id)$

On cherche $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ tel que $(f - 3Id)(X) = 0$

$\Rightarrow \quad f(X) - 3X = 0$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$f(X) - 3X = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z - 3x = 0 \\ x + y + z - 3y = 0 \\ x + y + z - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y - 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Rapport de colle S29
(partie 2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$Ker(f) = Vect((1,1,1)^T)$

Par cardinal-dimension $\left(e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ base de $Ker(f - 3Id)$

4 Montrons que $B = (e_1, e_2, e_3)$ base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$

Comme $Card(B) = 3 = Card(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K}))$, il suffit de montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc (e_1, e_2, e_3) est libre et par cardinalité, dimension, $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$

5. $P = P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}\mathcal{B}_0}(id)$

$$= \left(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(id(e_1)) \;\middle|\; \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(id(e_2)) \;\middle|\; \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(id(e_3)) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Montrons que P est inversible.

$$rg(P) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$= 3$$

Donc $P \in Gl_3(\mathbb{K})$

Calculons $P^{-1} = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3/3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

Donc $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. On sait que A s'écrit PDP^{-1} d'où

$D = P^{-1} A P$

Rapport de colle S23

(partie 3)

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$A^k = P D^k P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3^k \\ 0 & 0 & 3^k \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \end{pmatrix}$$

$$= 3^{k-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3^{k-1} A$$

Louis Guillaume S. Colle de la semaine 29

EXERCICE 1 — Soit u l'application linéaire de $\mathbb{K}^4$ dans $\mathbb{K}^3$ définie par :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^4 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+z+t,\, x-y+z-t,\, 3x+y+3z+t). \end{array} \right.$$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{K}^4$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

1. Sans effectuer aucun calcul, justifer que l'application u n'est pas injective.
2. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ de l'application linéaire u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
3. Calculer le rang de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.
4. Justifier que l'application u n'est pas surjective.
5. Donner une base de $\mathrm{Im}(u)$.
6. Préciser la dimension du noyau de u.
7. Donner une base du noyau de u.
8. Soient $e_5 := (1,0,-1,0)$ et $e_6 := (0,1,0,-1)$. Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_5, e_6)$ est une base de $\mathbb{K}^4$ et déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}}(u)$ de l'application linéaire u dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}$.

Solution :

1) Supposons u injective

Comme $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{K}^3 \Rightarrow rg(u) \leq 3$.

Or par la formule du rang nous obtenons $4 = \underbrace{\dim(\ker(u))}_{=0 \text{ puisque } u \text{ injective}} + rg(u) \leq 3$ (ℰ)

Donc u n'est pas injective.

2) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ /e_1 \\ /e_2 \\ /e_3 \\ /e_4 \end{array}$$

3) Calculons le rang de cette matrice.

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Ainsi $\boxed{rg(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)) = 2}$

4) Si u était surjective alors $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{K}^3$.
Or d'après la question 3 :

$$rg(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))\ 2 \neq \dim(\mathbb{K}^3) = 3$$

Donc u n'est pas surjective

5) Par le cours nous savons que

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\,(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4))$$

$u(e_1) = (1;1;3)$ $\qquad$ $\cancel{u(e_3) = (1;1;3)}$

$u(e_2) = (1;-1;1)$ $\qquad$ $\cancel{u(e_4) = (1;-1;1)}$

Ainsi comme $(u(e_1), u(e_2))$ est une famille libre, elle forme une base de $\mathrm{Im}(u)$ ($rg(u) = 2$).

$$\boxed{(u(e_1), u(e_2)) \text{ base de } \mathrm{Im}(u)}$$

6) Par le théorème du rang, nous obtenons que $rg(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 4$

$$\boxed{\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2}$$

7) Cherchons une base de $\mathrm{Ker}(u)$. Cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \end{cases}$$

Mettons le sous forme matricielle, que l'on échelonne à l'aide du pivot de Gauss.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -t \end{cases}$$

Ainsi nous en déduisons que la famille

$$\boxed{\left((1;0;-1;0);(0;1;0;-1)\right) \text{ forme une base de } Ker(u)}$$

8) Soit $B' = (e_1, e_2, e_5, e_6)$. Montrons que B' est une base de $\mathbb{K}^4$.

<u>· Liberté :</u> Soit $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4) \in \mathbb{K}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi nous en déduisons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

La famille (e_1, e_2, e_5, e_4) étant libre, par cardinalité - dimension comme $\dim(\mathbb{K}^4) = 4$,

$$\boxed{B' \text{ forme une base de } \mathbb{K}^4}$$

Nous pouvons alors poser :

$$\mathrm{Mat}_{B', e}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /e_1 \\ /e_2 \\ /e_5 \\ /e_6 \end{array} \end{array}$$

Léa N.

Colle de la semaine 23

Énoncé :

EXERCICE 3 — Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Solution :

$P = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$

D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

1) Montrons que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$

- $P \cap D = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x=\frac{y}{2} \\ x=\frac{z}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x=\frac{y}{2} \\ z=3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{2}+y+\frac{3}{2}y=0$$

$$\Rightarrow y=0$$

Donc $x=0$ et $z=0$

Alors $P\cap D=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

- $P+D=\mathbb{R}^3$

$D = \mathrm{Vect}(1,2,3)$

et $P = \mathrm{Vect}\left((1,0,-1),\ (0,1,-1)\right)$

Par formule de Grassmann :

$$\dim(P+D) = \underbrace{\dim(P)}_{2} + \underbrace{\dim(D)}_{1}$$

Alors $\dim(P+D) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

Donc $P + D = \mathbb{R}^3$

2/ $p \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 = P \oplus D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u = u_P + u_D \longmapsto u_P \end{array} \right.$ une projection

<u>Analyse</u> : Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Supposons qu'il existe $\left((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\right) \in P \times D$

tel que

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = y_1 + y_2 \\ z = z_1 + z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = y_1 + 2x_2 \\ z = z_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} x_1 = x - x_2 \\ y_1 = y - 2x_2 \\ z_1 = z - 3x_2 \end{cases}$$

Or $x_1 + y_1 + z_1 = 0$

$$\Rightarrow x - x_2 + y - 2x_2 + z - 3x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{x+y+z}{6} \\ y_2 = \dfrac{x+y+z}{3} \\ z_2 = \dfrac{x+y+z}{2} \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5x - y - z}{6} \\ y_1 = \dfrac{-2x + 4y - 2z}{6} \\ z_1 = \dfrac{-3x - 3y + 3z}{6} \end{cases}$$

Synthèse

• $\dfrac{5x - y - z}{6} + \dfrac{x + y + z}{6} = x$

De même $y_1 + y_2 = y$

$z_1 + z_2 = z$

• $x_1 + y_1 + z_1 = \dfrac{5x - y - z}{6} + \dfrac{-2x + 4y - 2z}{6} + \dfrac{-3x - 3y + 3z}{2}$

$= 0$

• $\dfrac{y_2}{2} = x_2$

$\dfrac{z_2}{3} = x_2$

Donc $p(u) = \left(\dfrac{5x - y - z}{6}, \dfrac{-2x + 4y - z}{6}, \dfrac{-3x - 3y + 3z}{6} \right)$

$$\mathrm{Mat}_{\underbrace{\mathrm{Can}_{\mathbb{R}^3}}_{=(e_1, e_2, e_3)}}(p) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

3) On cherche une base $B = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

$\mathrm{Mat}_B(p) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

ie $p(u_1) = a u_1$
$p(u_2) = b u_2$
$p(u_3) = c u_3$

Si on pose $u_1 := (1, 0, -1)$, $u_2 := (0, 1, -1)$ dans P
et $u_3 := (1, 2, 3)$ dans D

$B = (u_1, u_2, u_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$p(u_1) = (1, 0, -1) = u_1$

$p(u_2) = (0, 1, -1) = u_2$

$p(u_3) = 0 = 0 \times u_3$

Donc $\mathrm{Mat}_B(p) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p(u_1) & p(u_2) & p(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}$ (diagonale)

La base $B = (u_1, u_2, u_3)$ convient.

Maximilien T. Colle de la Semaine 29

Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(A,B) \in M_{m,n}(\mathbb{R})^2$

1) Montrer $rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)$

2) En déduire $|rg(A) - rg(B)| \leq rg(A+B)$

Solution : 1) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n

Soit F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie m

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F

Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)$ tq $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A$ et $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) = B$.

Il suffit alors de montrer que $rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$

Montrons donc $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g)$

Soit $y \in Im(f+g)$ alors $\exists x \in E$ tq $y = \underbrace{f(x)}_{\in Im(f)} + \underbrace{g(x)}_{\in Im(g)}$

$\Rightarrow y \in Im(f) + Im(g)$

donc $rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g) \underbrace{- \dim(Im(f) \cap Im(g))}_{\geq 0} \leq rg(f) + rg(g)$

Ainsi $rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g) \Rightarrow \boxed{rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)}$

2) $rg(A) = rg(A+B-B) \underset{1}{\leq} rg(A+B) + \underbrace{rg(-B)}_{rg(B)}$

$\Rightarrow rg(A+B) \geq rg(A) - rg(B)$

$rg(B) = rg(B + A - \cancel{B}_{A}) \underset{1}{\leq} rg(A+B) + rg(A)$

$\Rightarrow rg(A+B) \geq rg(B) - rg(A)$

Donc $rg(A+B) \geq \max(rg(B) - rg(A), rg(A) - rg(B))$

$\geq |rg(B) - rg(A)|$

Antoine B. colle de la semaine 23:

2.3

On considère la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $B = A - I$.
Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire l'expression de A^n.

Une solution :

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - I_3$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc : $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $B^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

donc $B^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n = 2 \\ 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} & \text{si } n \geq 3 \\ I_3 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

- $A = B + I_3$

$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $A^n = (B + I_3)^n \underset{\substack{\text{Formule} \\ \text{du Binôme} \\ \text{de Newton}}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k$ (car B et I_3 commutent)

$= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} B^k}_{= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}}$

Ainsi $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n+\frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice : Soient les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ suivants : $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ et $D = \mathrm{Vect}((-1, 0, 1))$. Montrer que P et D sont supplémentaires, donner la matrice de la projection sur P parallèlement à D dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et en déduire les matrices de la projection sur D parallèlement à P et de la symétrie par rapport à P et parallèlement à D, toujours dans la base canonique.

Solution : $d := (-1,0,1)$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

(A) Supposons $\exists (a,b,c) \in P$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = (a,b,c) + \lambda d$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a - \lambda \\ \boxed{y = b} \\ z = c + \lambda \end{cases}$$

En sommant $(L_1) + 2(L_2) - (L_3)$, on a
$$x + 2y - z = \underbrace{a + 2b - c}_{0} - 2\lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = x + \lambda = \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z} \quad \text{et} \quad \boxed{c = z - \lambda = \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z}$$

(S) Soient a, b, c, λ définis comme en fin d'analyse.

$$(a,b,c) + \lambda d = \left(\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2}z,\ y,\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z\right)$$
$$= (x,y,z)$$

Comme les candidats | vérifient la synthèse
| sont uniques, on en déduit que
$$\mathbb{R}^3 = P \oplus D$$

On pose :

$$p_P \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 = P \oplus D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto (a,b,c) \end{array} \right. \qquad p_D \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 = D \oplus P \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto \lambda d \end{array} \right.$$

$p_P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ où $(x,y,z) = \underset{\in P}{(a,b,c)} + \underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} d$

$p_D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ où $(x,y,z) = \underset{\in P}{(a,b,c)} + \underset{\in \mathbb{R}}{\lambda} d$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}an_{\mathbb{R}^3}}(p_P) = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}} =: A$$

- $p_P((1,0,0)) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$
- $p_P((0,1,0)) = (-1,1,1)$
- $p_P((0,0,1)) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

~~On~~ On remarque que $p_D + p_P = id_{\mathbb{R}^3}$

Or $\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}an_{\mathbb{R}^3}}(u) \end{array} \right.$ est linéaire

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}an_{\mathbb{R}^3}}(p_D) = I_3 - A = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}} =: B$

De même, on pose $S \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 = P \oplus D & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (a,b,c) - \lambda d \end{array} \right.$

où $(x,y,z) = \underset{\underset{P}{\wedge}}{(a,b,c)} + \underset{\underset{\mathbb{R}}{\wedge}}{\lambda} d$

$S = p_P - p_D$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}an_{\mathbb{R}^3}}(S) = A - B = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$

Louis B. Khôlle de la semaine 29

On considère l'application linéaire définie par

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_4[X] \longmapsto \mathbb{R}_4[X] \\ P \longrightarrow (X-1)P' + P \end{array} \right.$$

1) Ecrire la matrice de f dans $\mathcal{C}an_{\mathbb{R}_4[X]}$
2) Déterminer le noyau et l'image de f
3) Justifier que $((X-1)^k)_{k \in [\![0,4]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$

et écrire la matrice de f dans cette base
4) Quel est le lien entre les deux matrices ?
5) Interpréter la matrice P de chgT de base comme la matrise d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ dont on donnera une expression simple
6) en déduire P^{-1}.

---

1) $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}an_{\mathbb{R}_4[X]}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) & f(X^4) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \backslash 1 \\ \backslash X \\ \backslash X^2 \\ \backslash X^3 \\ \backslash X^4 \end{array} \end{array}$$

2) On observe que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 5$
Donc par le théorème du rang on en déduit que $\dim(\ker(f)) = 0$
$\Rightarrow \ker(f) = \{0\}$

3) $\forall\, i \in [\![0,4]\!] \quad \deg\left((X-1)^i\right) = i$

Ainsi par théorème des dégrés echelonnés on en déduit que $F = \left((X-1)^k\right)_{k\in[\![0,4]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$

$$\mathrm{Mat}_F(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(1) & f(X-1) & f((X-1)^2) & f((X-1)^3) & f((X-1)^4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ (X-1) \\ (X-1)^2 \\ (X-1)^3 \\ (X-1)^4 \end{array}$$

4) Par théorème de changement de base :

$$\mathrm{Mat}_F(f) = P_{F \to \mathcal{C}an} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}an}(f) \times P_{\mathcal{C}an \to F}$$

$$P = P_{F\to \mathcal{C}an} = \mathrm{Mat}_{F,\mathcal{C}an}(id) = \begin{array}{c} \left((X-1)^k\right)_{k\in[\![0,4]\!]} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{array}$$

5) Ainsi P est la matrice de

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_4[X] \longmapsto \mathbb{R}_4[X] \\ P \to P(X-1) \end{array}\right.$$

6) On en deduit que

$$\varphi^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_4[X] \longmapsto \mathbb{R}_4[X] \\ P \to P(X+1) \end{array}\right.$$

et
$$P^{-1} = P_{\mathcal{C}an \to F}(id) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & X & X^2 & X^3 & X^4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ (X-1) \\ (X-1)^2 \\ (X-1)^3 \\ (X-1)^4 \end{array}$$

Royan 6

Colle de la semaine n° 29

Enoncé : Soit $(A,B) \in M_7(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$.
En supposant que A est inversible. Montrer que $BA^{-1} = A^{-1}B$.
Soit $(A,B) \in M_7(\mathbb{R})$ tel que A et B sont des matrices ayant des nombres premiers comme coefficients. En supposant que $AB - BA = I_7$, montrer que $(A^2B^3)^T = A^8B$

Solution :

Soit $(A,B) \in M_7(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$ et A inversible

$$AB = BA$$
$$\Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}BA$$
$$\Rightarrow A^{-1}ABA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1}$$
$$\Rightarrow BA^{-1} = A^{-1}B$$

Soit $(A,B) \in M_7(\mathbb{R})^2$ à coefficients des nombres premiers.

Montrons que
$$AB - BA = I_7 \Rightarrow (A^2B^3)^T = A^8B$$

Pour cela, montrons que $AB - BA \neq I_7$

Supposons par l'absurde

$$AB - BA = I_7$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(I_7)$$

$$\underset{\mathrm{Tr}\ \mathrm{lin}}{\Rightarrow} \quad \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 7$$

$$\underset{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}{\Rightarrow} \quad 0 = 7 \quad ↯$$

<u>Remarque personnelle</u> : L'exercice est conçu avec des hypothèses ne servant pas à la résolution. Il n'est pas à hypothèse minimal, ce qui forme une sorte de piège.

Rapport de colle - semaine 29

Uta Baycan de Neyer

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée uniquement de projection.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base de E.

- On pose $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $p_i \in \mathcal{L}(E)$ une projection de E tq

$\mathrm{Im}(p_i) = \mathrm{Vect}(e_i)$ et $\mathrm{Ker}(p_i) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots \hat{e_i}, \dots e_n)$

alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_i) = E_{ii}$

- On pose $\forall i,j \in [\![1, n]\!]^2$ tq $i \neq j$ $p_{ij} \in \mathcal{L}(E)$ une projection de E tq $\mathrm{Im}(p_{ij}) = \mathrm{Vect}(e_i + e_j)$

alors $p_{ij}(e_i) = p_{ij}(e_i + e_j - e_j)$

$= p_{ij}(e_i + e_j) - p_{ij}(e_j)$

$= e_i + e_j - p_{ij}(e_j)$

et $p_{ij}(e_j) =$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_{ij}) = E_{ii} + \underline{E_{ij} E_{ii} E_{ij}}$

$= \delta_{ii} E_{ji} E_{ij}$

$= \delta_{ii} \delta_{jj} E_{ii}$

- On pose $\forall i,j \in [\![1, n]\!]^2$ tq $i \neq j$ $p_{ij} \in \mathcal{L}(E)$ une projection de E tq $\mathrm{Im}(p_{ij}) = \mathrm{Vect}(e_i + e_j)$

et $\mathrm{Ker}(p_{ij}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots \hat{e_i}, \dots e_n)$

Comme $(e_1, \dots \hat{e_i}, \dots e_n) \# (e_i + e_j)$ est libre ⊛

Par card-dim $(e_1, \dots e_i + e_j, \dots e_n)$ est une base de E. Donc $\mathrm{Im}(p_{ij}) \oplus \mathrm{Ker}(p_{ij}) = E$ et p_{ij} est bien une projection.

Puis $Mat_B(p_{ij}) = E_{ii} + E_{ji}$

- la famille $\left((Mat_B(p_i))_{i\in[\![1,n]\!]} , (Mat_B(p_{ij}))_{\substack{ij\in[\![1,n]\!]^2 \\ tq\ i\neq j}} \right)$

$$= \left((E_{ii})_{i\in[\![1,n]\!]} , (E_{ii}+E_{ji})_{\substack{ij\in[\![1,n]\!]^2 \\ tq\ i\neq j}} \right)$$

est libre ⊛⊛

Par Card - dim, cette famille est une base de $M_n(\mathbb{R})$

- $\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & Mat_B(f) \end{array} \right.$ est bij

Comme φ bij et la famille $\left((\varphi(p_i))_{i\in[\![1,n]\!]} , (\varphi(p_{ij}))_{\substack{ij\in[\![1,n]\!]^2 \\ tq\ i\neq j}} \right)$

est une base sur $M_n(\mathbb{R})$.

la famille $\left((p_i)_{i\in[\![1,n]\!]} , (p_{ij})_{\substack{ij\in[\![1,n]\!]^2 \\ tq\ i\neq j}} \right)$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

⊛ : Soit $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_i(e_i+e_j) + \dots \lambda_n e_n = 0$

$\underset{\substack{(e_1,\dots e_n) \\ \text{base donc libre}}}{\Rightarrow}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_i = \dots = 2\lambda_j = \dots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

Donc la famille $(e_1, \dots, e_i+e_j, \dots e_n)$ est libre

⊛⊛ : Soit $(\lambda_{ij})_{ij\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathbb{R}^{n^2}$ tq $\sum_{i=1}^{n} E_{ii}\lambda_{ii} + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} \lambda_{ij}(E_{ij}+E_{ii}) = 0$

$\underset{\substack{(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \\ \text{base donc libre}}}{\Rightarrow}$ $\forall\ ij \in [\![1,n]\!]^2$ tq $i\neq j$ $\lambda_{ij} = 0$ et $\lambda_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_{ij} = 0$

$\Rightarrow \forall\ ij \in [\![1,n]\!]^2 \quad \lambda_{ij} = 0$

Donc la famille $\left((E_{ii})_{i\in[\![1,n]\!]} , (E_{ii}+E_{ij})_{ij\in[\![1,n]\!]^2\ tq\ i\neq j} \right)$ est libre

Ibrahim. K — Colle de la semaine 29.

Soit $E = \mathbb{R}^n$ $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est.

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \beta & \cdots & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

on pose $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ tq $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $e'_j = \sum_{k=1}^{j} e_k$

Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$

Par Théorème de changement de base

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\, P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

$$= P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\, M\, P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

$\cancel{P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id) = (A}$

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e'_1 & e'_2 & & \cdots & e'_n & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

$P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id)$:

on remarque que $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$

$$e_{j+1} = e'_{j+1} - e'_j$$

ainsi

$$P_{B' \to B} = \mathrm{Mat}_{B B'}(id) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \\ \vdots \\ e'_n \end{array}$$

ainsi

$$\mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & 1 & \vdots \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha-\beta \end{pmatrix}$$

Robin G.   Colle de la semaine 28

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme f de matrice relativement à la base canonique $B=(e_1,e_2,e_3)$

$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 4 & -5 & -4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une symétrie

et calculer ses éléments caractéristiques.

Solution

- $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ donc $\mathrm{Mat}_B(f \circ f) = \mathrm{Mat}_B(id_{\mathbb{R}^3})$

Donc f est une symétrie.

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f - id)$. Alors $(M - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & -6 & -4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\iff \begin{cases} y = -z \\ x = -\frac{1}{2} z \end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\left(\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)\right)$.

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X \in \mathrm{Ker}(f + id_{\mathbb{R}^3})$. Alors $(M + I_3)X = 0$, i.e. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X \quad \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \{ x - y + z = 0$

Donc $\underline{\mathrm{Ker}(f + id_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\big((1, 0, -1), (0, 1, -1)\big)}$.

2/2

Nicolas.H — Colle de la semaine 29

Enoncé

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_4[X])$ tel que $f(P(X)) = P(1-X)$ de matrice A dans la base canonique. Déterminer A^{-1}

Solution

f est bien défini, car $\forall P \in \mathbb{C}_4[X]$
$P(1-X) \in \mathbb{C}_4[X]$

Soit $P \in \mathbb{C}_4[X]$

$$f(P(X)) = P(1-X)$$
$$f(f(P(X))) = P(1-(1-X)) = P(X)$$

Ainsi, $f^2 = id_{\mathbb{C}_4[X]}$

Soit B la base canonique de $\mathbb{C}_4[X]$

$$Mat_B(id_{\mathbb{C}_4[X]}) = I_5 = Mat_B(f \circ f)$$

$$= Mat_B(f) \times Mat_B(f) = A \times A = I_5$$

Donc $A^{-1} = A \in GL_5(\mathbb{R})$

Déterminons $A = A^{-1}$

$$Mat_B(f) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) & f(X^4) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /1 \\ /X \\ /X^2 \\ /X^3 \\ /X^4 \end{array} \end{array}$$

car $f(1) = 1$ $f(X) = X$ $f(X^2) = 1 - 2X - X^2$

$f(X^3) = 1 - 3X + 3X^2 - X^3$

$f(X^4) = 1 - 4X + 6X^2 - 4X^3 + X^4$

Ainsi, $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Ibrahim. K

Colle de la semaine 28

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

Mq
$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}$$

Par concavité de la fonction ln et en appliquant l'inégalité de Jensen aux points $(a_1 \dots a_n)$ avec poid $\left(\lambda_i = \frac{1}{n}\right)_{i \in [\![1, n]\!]}$ on a.

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(a_i)$$

donc

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \ln\left(a_i^{\frac{1}{n}}\right) \quad \begin{pmatrix}\text{Propriétés} \\ \text{algébrique} \\ \text{de ln}\end{pmatrix}$$

donc $\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \geq \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{a_i}\right)$

donc $\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \geq \ln\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right)$

par croissance de $x \mapsto \exp(x)$ on a.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$