Hugo D. Semaine de colle n°28

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x_1, \dots, x_n > 0$. Démontrer :

$$m := \min_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \overset{①}{\leqslant} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \overset{②}{\leqslant} \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \overset{③}{\leqslant} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \overset{④}{\leqslant} \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \overset{⑤}{\leqslant} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i. =: M$$

2. Soient $a_1, \dots, a_n > 0$ tels que $a_1 \dots a_n = 1$. Démontrer que $\prod_{i=1}^{n} (2 + a_i) \geqslant 3^n$ et établir le cas d'égalité.

Solution 1) ① $\forall i \in [\![1, n]\!]\ 0 < m \leq x_i$

$\Rightarrow$ (inv ↘ sur $\mathbb{R}_{>0}$) $\frac{1}{m} \geq \frac{1}{x_i}$

$\Rightarrow \frac{n}{m} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} > 0$

$\Rightarrow$ (inv ↘ sur $\mathbb{R}_{>0}$) $m \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$

② Comme $-\ln$ est convexe (2 fois dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$ $(-\ln)''(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0}$)

Par Jensen :

$-\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{x_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(-\ln\left(\frac{1}{x_i}\right)\right)$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}\right) \leq \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}\right)$ On conclut en appliquant exp ↗ sur $\mathbb{R}$

③ Comme $\ln$ est concave par Jensen :

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(x_i) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right)$

$\ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}\right)$ On conclut en appliquant exp ↗ sur $\mathbb{R}$

④ Par Cauchy-Schwarz (Hölder avec $p=q=2$) avec $y_1 = \dots = y_n = \frac{1}{n}$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2}}_{\sqrt{\frac{1}{n}}}$

(5) $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad 0 < x_i \leq M$

$\overset{\nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+}{\Longrightarrow} \quad x_i^2 \leq M^2$

$\Longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq n M^2$

$\Longrightarrow \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i^2} \leq M$

2) Soit $i \in [\![1,n]\!]$ $0 < \left(\dfrac{2+a_i}{3}\right) = \dfrac{1+1+a_i}{3} \overset{(3)}{\geq} \sqrt[3]{1 \times 1 \times a_i} = \sqrt[3]{a_i}$

$\Longrightarrow \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (2+a_i) = \prod_{i=1}^{n} 3 \times \frac{2+a_i}{3} \geq 3^n \prod_{i=1}^{n} \sqrt[3]{a_i}$

$\underset{\sqrt[3]{\cdot} \text{ multiplicative}}{=} 3^n \sqrt[3]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i}$

$= 3^n$ car $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$

Cas d'égalité

Il y a égalité en (3) si et seulement $x_1 = \dots = x_n$

Donc pour que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (2+a_i) = 3^n$, il faut que $a_1 = \dots = a_n$

De plus, comme $a_1 \cdots a_n = 1$, on en déduit que $\boxed{a_1 = \dots = a_n = 1}$

(*)

$\left[\forall \lambda \in [0,1], \forall (x,y) \in \mathbb{R}_{>0}^2\right.$ Montrons que $\ln(\lambda x+(1-\lambda)y) = \lambda \ln(x)+(1-\lambda)\ln(y)$
et $x \neq y \implies \lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_{>0})^2$

Si $0 < x < y$ (l'autre cas est analogue)

On pose $f \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto \ln(\lambda x + (1-\lambda) y) - \lambda \ln(x) - (1-\lambda)\ln(y) \end{array} \right.$ qui est 2 fois dérivable

Soit $\lambda \in [0,1]$ $f'(\lambda) = \dfrac{x-y}{\lambda x+(1-\lambda)y} - \ln(x) + \ln(y)$

$f''(\lambda) = -\dfrac{(x-y)^2}{(\lambda x+(1-\lambda)y)^2} < 0$ car $x \neq y$

Donc par CDSM sur $[0,1]$ intervalle, f' strictement décroissante

Or $f'(0) = \dfrac{x}{y} - 1 - \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$ comme $\forall z \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}\ \ln(z) < z-1$
(Inégalité de concavité)

Comme $\dfrac{x}{y} \neq 1$, on en déduit que $f'(0) > 0$

De manière analogue, nous établissons que $f'(1) < 0$

Par le TVI avec f' continue sur $[0,1]$ intervalle : $\exists \mu \in]0,1[$ tel que $f'(\mu) = 0$

Par CDSM, comme f' ne s'annule qu'en μ, f strictement croissante sur $[0,\mu]$

Par CDSM, comme f' ne s'annule qu'en μ, f strictement décroissante sur $[\mu,1]$

Comme $f(0)=0$ et $f(1)=0$, par stricte monotonie :

$\forall y \in]0, p]$, $f(y) > f(0) = 0$ Donc f ne s'annule qu'en
$\forall y \in [p, 1[$ $f(y) > f(1) = 0$ 0 et en 1.

De manière analogue nous traitons le cas $0<y<x$ et nous en déduisons que ⊛ est vraie.

$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $\mathcal{P}(n)$: " $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in]0,1[^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$

$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(x_i) \Rightarrow x_1 = \dots = x_n$ "

(I) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0,1[^2$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_{>0})^2$

Supposons que $\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \ln(x_1) + \lambda_2 \ln(x_2)$

Comme $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Donc $\ln(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2) = \lambda_1 \ln(x_1) + (1-\lambda_1)\ln(x_2)$

Comme $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_1 \neq 1$, par ⊛ en contraposée :

$\underbrace{\ln(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2) \neq \lambda_1 \ln(x_1) + (1-\lambda_1) \ln(x_2)}_{\text{Faux}}$ ou $x_1 = x_2$

Donc $x_1 = x_2$

(H)

Soit $\lambda \in [0,1]$, $(x,y) \in \mathbb{R}_{>0}$. Montrons que $\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)$
et $x \neq y \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

Supposons que $\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)$ et $x \neq y$

<u>Si $x < y$</u> On pose $f \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto \end{array} \right.$

$\forall y \in]0,\mu]$ $\quad f(y) > f(0) = 0$ $\Big\}$ Donc f ne s'annule qu'en
$\forall y \in [\mu, 1[$ $\quad f(y) > f(1) = 0$ $\Big\}$ $\quad 0$ et en 1

De manière analogue, nous traitons le cas $0<y<x$ et nous en déduisons que $\circledast$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in]0,1[^2$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$
Quitte à les renuméroter, on peut supposer que $x_1 \leq \dots \leq x_n$
Montrons que $\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(x_i) \Rightarrow x_1 = \dots = x_n$
Supposons que $\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(x_i)$

$$\shortparallel$$

$$\ln\left(\lambda_n x_n + (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i\right) \qquad (\lambda_n \neq 1)$$

$$\underset{\substack{\text{Concavité} \\ \text{de } \ln}}{\overset{(1)}{\geq}} \lambda_n \ln(x_n) + (1-\lambda_n) \ln\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i\right)$$

$$\underset{\text{Jensen}}{\overset{(2)}{\geq}} \lambda_n \ln(x_n) + (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} \ln(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(x_i)$$

Comme les termes initiaux et finaux sont égaux, (1) et (2) sont des égalités.

On applique $\circledast$ contraposée sur (1) car $\lambda_n \neq 0$ et $\lambda_n \neq 1$, et on en déduit que $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i$

$$\overset{(**)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$$

Par l'absurde, supposons $\exists k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $x_k < x_n$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n-1} \lambda_i x_i + \underbrace{\lambda_k}_{>0} \underbrace{x_k}_{<x_n} < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n-1} \underbrace{\lambda_i}_{>0} \underbrace{x_i}_{\leq x_n} + \lambda_k x_n$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_n \quad \text{ce qui contredit } (**)$$

Donc $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$ $x_i = x_n$

Colle de la semaine 28

Exercice : Un joueur de skat connaît la position de toutes les cartes d'une couleur, sauf trois, réparties de manière indéterminée dans les mains (de 10 cartes) de ses deux adversaires. Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes les trois dans une même main ? Idem pour un joueur de bridge (13 cartes par main). Généraliser à $n \geq 3$ cartes par main. Déterminer la limite de cette probabilité pour $n \to \infty$ et commenter le résultat.

Adam M.

Solution :

1. $\Omega_1 = \mathcal{P}_{10}(⟦1, 20⟧)$ muni de la proba P_1 uniforme

On numérote 1, 2 et 3 les cartes dont on ne connait pas la position

$A_1 = \{P \in \Omega_1 : \{1,2,3\} \subset P\}$

Après avoir placé les trois cartes dans une même main, chacune des 17 autres cartes ~~peuvent~~ peuvent être soit dans la première mains soit la deuxième donc $|A_1| = \binom{17}{7} + \binom{17}{10} = 2\binom{17}{7}$

Donc $P_1(A_1) = \dfrac{2\binom{17}{7}}{\binom{20}{10}}$

2. De même $\Omega_2 = \mathcal{P}_{13}(⟦1, 26⟧)$ muni de la proba P_2 uniforme

$A_2 = \{P \in \Omega_2 : \{1,2,3\} \subset P\}$

$P_2(A_2) = \dfrac{2\binom{23}{10}}{\binom{26}{13}}$

3. $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, $\Omega = \mathcal{P}_n(⟦1, 2n⟧)$ muni de la proba P uniforme

$A = \{P \in \Omega : \{1,2,3\} \subset P\}$

$$P(A) = \frac{2\binom{2n-3}{n-3}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\cancel{2n}\binom{2n-3}{n-3}}{\cancel{2n}\binom{2n-1}{n-1}} \quad (\text{formule du capitaine}) \times 3$$

$$= \frac{(n-1)\binom{2n-3}{n-3}}{(2n-1)\binom{2n-2}{n-2}}$$

$$= \frac{\cancel{(n-1)}(n-2)}{2(2n-1)\cancel{(n-1)}}$$

$$P(A) = \frac{n-2}{4n-2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{4}$$

Si le nbre de cartes possible dans une main était illimité, la probabilité que ~~chacune~~ les cartes 1 et 2 se trouvent dans la m̂ main que la carte 1 est de $\frac{1}{2}$.

Louis Guillaume S. | Colle de la semaine 28

Exercice 1. Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse. On souhaite estimer une valeur approchée de p.

Pour cela, on prélève n pièces. On suppose que la population des pièces est suffisamment grande pour que le prélèvement puisse être modélisé par une suite de n tirages successifs avec remise.

On note X_n le nombre de pièces défectueuses obtenues.

1. Quelle est la loi de X_n ? Donner son espérance et sa variance.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons X_n le nombre de pièces défectueuses obtenues.

Soit $\Omega = [\![0;n]\!]$ univers des possible, que l'on muni de la probabilité P

D'après le texte introductif, nous pouvons assimiler cette situation a celle qui suit :

On répète n fois de manière indépendante et avec remise une épreuve de Bernoulli qui a pour succès : "La pièce est deffectueuse" de probabilité $p \in]0;1[$

1. Nous pouvons alors affirmer que X_n suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0;1[$. Comme $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$, par le cours sur les lois usuelles nous obtenons :

$$\boxed{E(X_n) = np} \qquad \boxed{V(X_n) = np(1-p)}$$

2. Soit $\varepsilon > 0$.

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, nous obtenons

$$P(|X_n - E(X_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Or d'après la question 1. nous obtenons :

$$\Rightarrow \mathcal{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

Par effet d'une transformation affine sur la variance nous obtenons :

$$\Rightarrow \mathcal{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{n}{n^2}\,\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2}$$

Or, nous pouvons majorer $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$ puisque les racines du polynôme $-p^2+p=0$ sont $\{0;1\}$, ce qui nous donne que le maximum de la fonction $f : p \mapsto -p^2+p$ est atteint en $\frac{1}{2}$ car elle est polynomiale de degré 2. De plus $-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Donc $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$

$$\boxed{\Rightarrow \mathcal{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}}$$

3. On s'intéresse ici à trouver une condition sur n pour que

$$\mathcal{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq 0{,}01\right) \geq 0{,}95$$

Cela revient à trouver une condition sur n dans le cas où :

$$\mathcal{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq 0{,}01\right) \leq 0{,}05$$

Or d'après 2) :

$$\frac{1}{4n(0{,}01)^2} \leq 0{,}05$$

inv ↓ sur $\mathbb{R}_{>0}$ $\Rightarrow 4n(0{,}01)^2 \geq \frac{1}{0{,}05}$

$$\Rightarrow n \geq \frac{1}{4\cdot(0{,}01)^2\cdot 0{,}05}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{1}{4\cdot 10^{-4}\cdot 5{,}0\times 10^{-2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow n \geq 5{,}0\times 10^{4}}$$

Raphaël Mouchonnet colle semaine n° 28

Énoncé

Exercice : Soit $n \geq 2$. Montrer que pour tout $x \geq -1$, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$ par un raisonnement faisant intervenir la convexité de $f : x \mapsto (1+x)^n$ définie sur $[-1, +\infty[$.

Solution Soit $n \in \mathbb{R}_{\geq 2}$.

f est dérivable deux fois et

$$f'' \left| \begin{array}{l} [-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \underbrace{n(n-1)}_{\geq 0}\underbrace{(1+x)^{n-2}}_{\geq 0} \geq 0 \end{array} \right.$$

donc f est convexe.
On utilise l'inégalité de la tangente en 0 pour les fonctions convexes.

$$\forall x \in [-1,+\infty[\quad f(x) \geq f'(0)(x-0) + f(0)$$

Or $f' \left| \begin{array}{l} [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto n(1+x)^{n-1} \end{array} \right.$ Donc

$$\boxed{\forall x \in [-1,+\infty[\quad f(x) \geq xn + 1}$$

Stanislas G — Semaine de colle n° 28

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\, f\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$

Montrez que f convexe $\Longleftrightarrow$ g convexe

Solution :

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car composé de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$$g' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) f'\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

$$= f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car composé de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

$$g'' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} - \left(-\frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} - \frac{f''\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}\right) \end{array} \right.$$

$$= \frac{f''\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f convexe

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\left| \begin{array}{l} f''\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 0 \\ x^3 > 0 \end{array} \right.$

donc $g''(x) \geqslant 0$

donc par caractérisation différentiel g est convexe

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons g convexe

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $g''(x) = \frac{f''\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3} \geqslant 0$

or $x^3 > 0$ donc $f''\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 0$

de plus la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

et inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc par le théorème des valeurs intermédiaires

$\forall y \in \mathbb{R}_+^* \ \exists x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y = \frac{1}{x}$

donc $f''\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 0$

$\Rightarrow f''(y) \geqslant 0$

donc par caractérisation différentielle

<u>f est convexe</u>

donc $\boxed{f \text{ convexe} \Leftrightarrow g \text{ convexe}}$

NISS
MATHEO

Rapport de colle semaine 28.

Exercice 1. Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse. On souhaite estimer une valeur approchée de p.

Pour cela, on prélève n pièces. On suppose que la population des pièces est suffisamment grande pour que le prélèvement puisse être modélisé par une suite de n tirages successifs avec remise.

On note X_n le nombre de pièces défectueuses obtenues.

1. Quelle est la loi de X_n ? Donner son espérance et sa variance.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.

Solution:

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

1) On répète n fois une expérience de Bernoulli de succès « la pièce tirée est défectueuse » de probabilité p.

X_n est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, X_n suit alors la loi binomiale de paramètres (n, p).

X_n suivant la loi binomiale :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p)$$

2) Soit $\varepsilon > 0$, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur la variable aléatoire $\frac{X_n}{n}$ $(n > 0)$

nous avons : $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - E\left(\frac{X_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$

[Propriété de l'espérance et variance]

$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{E(X_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X_n)}{n^2\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Or : $p(1-p) = -p^2 + p$

C'est un polynôme du second degrés dont la courbe est orientée vers le bas (facteur de degrés 2 < 0)

Ainsi, $p(1-p)$ est inférieur au point sommet du polynôme. On a : $P = -X^2 + X$ et $P' = -2X+1$

On a : $-2X+1=0 \Rightarrow X = \frac{1}{2}$

Ainsi : $p(1-p) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Donc : $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

3. Nous allons calculer n tel que la probabilité que la valeur de $\frac{X_n}{n}$ soit au delà de 10^{-2} de son espérance soit inférieure à 0,05.

i.e : $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq 0{,}01\right) \leq 0{,}05$

Ainsi, nous cherchons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que (Q.2)

$$\frac{1}{4n(0{,}01)^2} \leq 0{,}05$$

$$\underset{\times n > 0}{\Rightarrow} \quad \frac{10\,000}{4} \leq \frac{1}{20} n$$

$$\underset{\times 20 > 0}{\Rightarrow} \quad 2500 \times 20 \leq n$$

$$\Rightarrow \quad n \geq 50\,000$$

Ainsi, il faut au moins 50 000 échantillons pour s'assurer d'un résultat proche de l'espérance réelle.

↳ une meilleure majoration de $p(1-p)$ (ie une meilleure connaissance de p) permettrait de diminuer la quantité d'échantillon nécessaire.

Jules R.

Colle de la semaine 28

Énoncé : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et pour tout $x \in [a, b]$,

$$g(x) = f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \text{ et}$$

$$h(x) = f(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

1. Justifier l'existence de M
2. Montrer que g est convexe et que h est convexe.
3. En déduire que, pour tout $x \in [a, b]$, on a :
$$|f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

Solution :

1. Le nombre M existe s'il existe au moins un majorant de $|f''|$ sur $[a, b]$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ alors f'' est de classe $\mathcal{C}^0$ et $|f''|$ aussi.
D'après le théorème des bornes atteintes appliqué à la fonction $|f''|$ sur $[a, b]$:
$\exists (x_m, x_M) \in [a, b]^2 \quad \forall x \in [a, b]$
$$|f''(x_m)| \leq |f''(x)| \leq |f''(x_M)|$$
Il existe donc un majorant de $|f''|$ sur $[a, b]$.
Le nombre M existe donc.

2. Comme $(h, g) \in (\mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}))^2$, on peut les dériver 2 fois :
$\forall x \in [a, b] \qquad g''(x) = f''(x) + M$
$\forall x \in [a, b] \qquad h''(x) = f''(x) - M$

Or, d'après l'énoncé, on a :

$\forall x \in [a,b] \quad |f''(x)| \leq M$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad -M \leq f''(x) \leq M$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad -M - f''(x) \leq 0 \leq M - f''(x)$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad M + f''(x) \geq 0 \geq f''(x) - M$

Ainsi :

$\forall x \in [a,b] \quad g''(x) \geq 0 \geq h''(x)$

donc g est convexe et h est concave sur $[a,b]$.

3. Montrons que :

$\forall x \in [a,b] \quad h(x) \geq 0 \geq g(x)$

Comme g convexe et $-h$ convexe sur $[a,b]$:

$\forall x \in [a,b] \quad g(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) = 0$

$\forall x \in [a,b]$

$-h(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) = 0$

donc $h(x) \geq 0$

Donc, on a :

$\forall x \in [a,b] \quad h(x) \geq 0 \geq g(x)$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad -f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \leq 0 \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2} - f(x)$

$\cdot 1 < 0$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad -M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \leq f(x) \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$

Célia A. Semaine de colle n° 28.

énoncé :

Exercice 1. Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. À l'instant 0, il est en l'origine. À chaque instant entier, son abscisse varie de $+1$ avec la probabilité p (on parle de «pas vers la droite ») et de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$ («pas vers la gauche »). On note X_n l'abscisse du point occupé par le mobile à l'instant n.

1. Donner $X_n(\Omega)$.
2. On note D_n le nombre de pas vers la droite effectués par le mobile jusqu'à l'instant n. Démontrer que $X_n = 2D_n - n$ et en déduire, grâce à la loi de D_n, celle de X_n.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
4. Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée ? Interpréter.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in]0,1[$.

1. $X_0(\Omega) = \{0\}$ $\quad X_3(\Omega) = \{-3; -1; 1; 3\}$
$X_1(\Omega) = \{-1; 1\}$ $\quad X_4(\Omega) = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$
$X_2(\Omega) = \{-2; 0; 2\}$

D'où $\boxed{X_n(\Omega) = \{k \in [\![-n; n]\!] : k \text{ a la même parité que } n\}.}$

2. À l'instant n, si le mobile a fait d pas vers la droite, alors il en fait $n-d$ vers la gauche, ce qui revient à faire $-(n-d)$ pas vers la droite.

Donc
$$\boxed{\begin{aligned} X_n &= D_n - (n - D_n) \\ &= 2D_n - n. \end{aligned}}$$

De plus, $D_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et
$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(D_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$

Ainsi, $\mathcal{D}_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Or, soit $k \in X_n(\Omega)$,

$$P(X_n = k) = P(2D_n - n = k)$$
$$= P\left(D_n = \frac{k+n}{2}\right)$$

→ bien défini selon la composition de $X_n(\Omega)$.

Donc,

$$\boxed{P(X_n = k) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}} p^{\frac{k+n}{2}} (1-p)^{\frac{n-k}{2}}}.$$

3. $E(X_n) = E(2\mathcal{D}_n - n)$
$= 2E(\mathcal{D}_n) - n$ (linéarité de l'espérance)
$= 2pn - n$ (espérance des lois usuelles)
$= n(2p - 1)$

$V(X_n) = V(2\mathcal{D}_n - n)$
$= 4V(\mathcal{D}_n)$
$= 4p(1-p)n$ (variance des lois usuelles)

Ainsi, $\boxed{E(X_n) = n(2p-1) \text{ et } V(X_n) = 4np(1-p)}$

4. Résolvons $E(X_n) = 0$
$\iff n(2p-1) = 0$
$\iff \boxed{\begin{cases} n = 0 \\ \text{ou} \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}}$.

Si le mobile a autant de chances d'aller à droite qu'à gauche, alors il est probable qu'il reste près de l'origine.
À l'instant $n = 0$, le mobile est à l'origine.

Robin G. Colle de la semaine 28

> Soit une fonction convexe strictement croissante. Après avoir justifié l'existence d'une fonction réciproque, discuter de la convexité de cette réciproque.

Solution :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ fonction convexe strictement croissante, où I intervalle de $\mathbb{R}$.

Supposons I intervalle ouvert. Montrons alors que f est $\mathcal{C}^0$ sur I.

• Soit $a \in I$. Montrons que f est dérivable à gauche et à droite de a.

a point intérieur de I, donc $\exists \delta > 0$, $[a-\delta, a+\delta] \subset I$

$$\left| \begin{array}{l} [a-\delta, a[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}\right.$$ est croissante et majorée

par $\dfrac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta} \in \mathbb{R}$

Par théorème de la limite monotone,

$\exists l \in \mathbb{R}$ $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a^-]{} l$, donc f dérivable à gauche de a.

• De même à droite de a.

• $\underline{f\ \mathcal{C}^0 \text{ en } a :}$

$\forall x \in]a, a+\delta]$, $f(x) = \underbrace{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\xrightarrow[x \to a^+]{} f'_d(a) \in \mathbb{R}} \underbrace{(x-a)}_{\xrightarrow[x \to a^+]{} 0} + f(a)$

Ainsi $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} f(a)$

- De même $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} f(a)$

Donc $\underline{f \ \mathcal{C}^0 \text{ en tout point de } I}$.

- f est continue sur I et strictement monotone, par le théorème de la bijection, $f_{|f(I)}$ est bijective et $f(I)$ est un intervalle.

On note f^{-1} sa bijection réciproque, de même stricte monotonie que $f_{|f(I)}$.

- Soit $(y_1, y_2) \in f(I)^2$. $\exists (x_1, x_2) \in I^2$ tq $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$.

f est convexe :
$\exists \lambda \in [0,1]$ $\quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

En appliquant f^{-1} croissante :

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \leq f^{-1}\left(\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\right)$$

ie. $\lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda) f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)$

Donc $\boxed{f^{-1} \text{ est concave}}$.

2/2

Colle de la semaine 28

Nicolas M

Énoncé

Déterminer les intervalles où la fonction suivante est convexe ou concave par étude du signe de sa dérivée seconde :

$f : x \mapsto (x-1)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

Solution

f est $\underbrace{\mathcal{C}^2}_{\text{sur } \mathbb{R}}$ comme produit et somme de fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = xe^x$ et $f''(x) = (x+1)e^x$

$\forall x \in]-\infty ; -1[\quad x+1 \leq 0$ et $e^x \geq 0$

donc $f''(x) \leq 0$

donc f est concave sur $]-\infty ; -1[$

$\forall x \in [-1 ; +\infty[\quad f''(x) \geq 0$ donc f est convexe sur $[-1 ; +\infty[$

Ainsi, f est concave sur $]-\infty ; -1[$ et convexe sur $[-1 ; +\infty[$

Martin K.-L. Colle de la semaine 28

On dispose d'une urne contenant $b \in \mathbb{N}$ boules blanches, $n \in \mathbb{N}$ boules noires, et $r \in \mathbb{N}$ boules rouges, telles que $b+n \geq 1$.
On effectue des tirages successifs dans l'urne.
Si l'on obtient une boule blanche, on gagne ; une noire, on perd ; une rouge, on la laisse de côté et on effectue un nouveau tirage.
On note

G_r : on gagne, l'urne contenant r boules rouges,

qui dépend donc du nombre de boules rouges dans l'urne.

(a). Calculer $P(G_0)$ et $P(G_1)$.

(b). Si $r \in \mathbb{N}$, exprimer $P(G_{r+1})$ en fonction de $P(G_r)$

(c). En déduire que $(P(G_r))_{r \in \mathbb{N}}$ est constante.

Solution.

(a). On introduit les évènements

Hérédité.

Soit $r \in \mathbb{N}$ vérifiant $H(r)$, i.e.

$$P(G_r) = \frac{b}{b+n}.$$

Alors, par (b) et hypothèse de récurrence,

$$P(G_{r+1}) = \frac{b}{b+n+r+1} + P(G_r) \cdot \frac{r+1}{b+n+r+1}$$

$$= \frac{b}{b+n+r+1} + \frac{b}{b+n} \cdot \frac{r+1}{b+n+r+1}$$

$$= \frac{b}{b+n+r+1} \cdot \left(1 + \frac{r+1}{b+n}\right)$$

$$= \frac{b}{b+n}.$$

Ainsi, $H(r+1)$ est vraie.

On conclut que $(P(G_r))_{r \in \mathbb{N}}$ est constante.

Exercice 7 :

1. Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$
2. Mq $f \left| \begin{array}{l}]1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\ln(x)) \end{array} \right.$ est concave

Puis $\forall x, y \in]1, +\infty[$

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}$,

On pose $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{n+1} \end{array} \right.$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = (n+1)x^n$

$f''(x) = (n+1)n\,x^{n-1} \geq 0$

Donc f est convexe

Et f est au dessus de ses tangentes. $(1 \in \mathbb{R}_+)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq f'(1)(x-1) + f(1)$

$= (n+1)(x-1) + 1$

$= (n+1)x - n$

$\Rightarrow x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$

2. • f est deux fois dérivables sur $]1, +\infty[$ car composée de deux fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$

$\forall x \in]1, +\infty[$ $f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$

$$f''(x) = -\frac{\overset{\geq 0}{\ln(x)+1}}{\underset{\geq 0}{(x\ln(x))^2}} \leq 0$$

Donc f est concave.

• Soit $(x,y) \in]1, +\infty[^2$

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \underset{f \text{ concave}}{\geq} \frac{1}{2}\ln(\ln(x)) + \frac{1}{2}\ln(\ln(y))$$

$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq e^{\ln\left(\ln(x)^{\frac{1}{2}} \ln(y)^{\frac{1}{2}}\right)}$

$e \nearrow$ sur

$]1, +\infty[$

$= \sqrt{\ln(x) \ \ln(y)}$

Louis. D   Semaine de colle n°28

Énoncé :

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire n boule en remettant la boule rouge après tirage si elle est rouge et en ne la remettant pas si elle est blanche.

Quelle est la probabilité p d'obtenir exactement 1 boule blanche en n tirages ?

Solution : $N := r + b$

Soit l'événement :

B_i = "Obtenir une boule blanche au i-ème tirage"

$$p = P\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} \right) \cap B_k \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n} \overline{B_i} \right) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{P(\overline{B_1})}_{\frac{r}{N}} \underbrace{\prod_{i=2}^{k-1} P\left(\overline{B_i} \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{B_j}\right)}_{\left(\frac{r}{N}\right)^{k-2}} \underbrace{P\left(B_k \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{k-1} \overline{B_j}\right)}_{\frac{b}{N}}$$

$$\times \underbrace{\prod_{i=k+1}^{n} P\left(\overline{B_i} \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{k-1} \overline{B_j} \cap B_k \bigcap_{l=k+1}^{i-1} \overline{B_l}\right)}_{\left(\frac{r}{(N-1)}\right)^{n-k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{N}\right)^{k} r^{n-1}\, b \left(\frac{1}{N-1}\right)^{n-k}$$

$$= r^{n-1} \times \left(\frac{1}{N-1}\right)^n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{N-1}{N}\right)^k$$

$$= r^{n-1} \left(\frac{1}{N-1}\right)^n \left(\frac{N-1}{N}\right) \frac{1-\left(N-1/N\right)^n}{1-\left(N-1/N\right)}$$

$$\left(\frac{N-1}{N} \neq 1\right)$$

$$= r^{n-1} \left(\frac{1}{N-1}\right)^{n-1} \left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

$$\left(1 - \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}\right)$$

$$= r^{n-1} \left(\left(\frac{1}{N-1}\right)^{n-1} - \frac{N-1}{N^n}\right)$$

Louis B. Khôlle de la semaine 28

Soit N un entier ≥ 2. Une urne contient N boules dont $N-2$ blanches et 2 noires. On tire au hasard successivement et sans remise, les N boules de l'urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la v.a. égale au numéro du tirage qui a fourni pour la 1e fois une boule noire, et X_2 pour la deuxième.

1) Expliciter X_1 et X_2 pour $N=2$

Sont-elles indépendantes pour P ?

Soit $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, $P((X_1=i)\cap(X_2=j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq i \\ \frac{2}{N(N-1)} & \text{si } i<j \end{cases}$

2) Déterminer les lois de X_1 et X_2

3) Sont-elles indépendantes pour P ?

1) $N=2$ Alors les deux boules sont noires

et $P(X_1=1)=1$ et $P(X_2=2)=1$

Et $P((X_1=1)\cap(X_2=2))=1$ Donc X_1 et X_2 indépendantes

2) D'après l'énoncé, on connaît la loi conjointe de X_1 et X_2 et : $X_1(\Omega)=[\![1,N-1]\!]$

$X_2(\Omega)=[\![2,N]\!]$

$(X_1=i)_{i\in[\![1,N-1]\!]}$ est un système complet d'événements. (sce)

Par la formule des probas totales on a

$$\forall j \in [\![2,N]\!] \quad P(X_2=j) = \sum_{k=1}^{N-1} P((X_1=k)\cap(X_2=j))$$

$$= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{2}{N(N-1)} = \frac{(j-1)2}{N(N-1)}$$

De même, $(X_2=j)_{j\in[\![2,N]\!]}$ s.c.e.

Donc $\forall i\in[\![1,N-1]\!]$ $\displaystyle P(X_1=i)=\sum_{\ell=\ell}^{N}\frac{2}{N(N-1)}$

$$=\sum_{\ell=i+1}^{N}\frac{2}{N(N-1)}=\frac{(N-i)2}{N(N-1)}$$

3) Pour $(i,j)\in[\![1,N]\!]$: $i=j$

on a $P((X_1=i)\cap(X_2=j))=0$

et $\displaystyle P(X_1=i)P(X_2=j)=\frac{(N-i)2}{N(N-1)}\times\frac{(j-1)2}{N(N-1)}\neq 0$

Donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Alexandre M.

Colle semaine

Enoncé :

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$, $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$.

2) En déduire que pour tout $x > 1$:

$$\sqrt{x^{2n} - 1} \geq \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \, \frac{x^n - 1}{\sqrt{n}}$$

Solution :

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ x \longmapsto \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \quad f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4} < 0.$

Ainsi, d'après le critère de concavité des fonctions deux fois dérivables, f est concave sur $\mathbb{R}_{>0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$

comme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$, l'inégalité de Jensen livre

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} a_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(a_k)$$

donc $\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} a_k}}_{\sqrt{\frac{1}{n}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{a_k}$

[monotonie de $\sqrt{\cdot}$]

[linéarité de Σ]

[$\sqrt{n} > 0$]

donc $\boxed{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \geqslant \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n}}_{\frac{1}{\sqrt{n}}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}}$ q.e.d.

2) Soit $x > 1$

On a $x^{2n} - 1 = (x^2)^n - 1$

De plus $\underbrace{\frac{(x^2)^n - 1}{x^2 - 1}}_{\sum_{k=0}^{n-1} (x^2)^k} = \frac{(x^2)^n - 1}{(x-1)(x+1)}$ [$x^2 \neq 1$] (*)

Donc d'après q1 on a :

$\sqrt{\frac{x^{2n} - 1}{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (x^2)^k} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\sqrt{(x^2)^k}}_{\sqrt{(x^k)^2} = x^k}$

(d'après (*))

car $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

donc $\frac{\sqrt{x^{2n} - 1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}$ [$x \neq 1$]

donc $\sqrt{x^{2n} - 1} \geqslant \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} (x^n - 1)$ [$x \sqrt{x-1}\sqrt{x+1} \geq 0$]

donc $\boxed{\sqrt{x^{2n} - 1} \geqslant \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{(x^n - 1)}{\sqrt{n}}}$ □

Anaé D.

Rapport de colle S28

Exercice 1. Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules sont indiscernables au toucher.

On tire une boule au hasard dans l'urne, on note sa couleur et la remet dans l'urne avec c autres boules de la même couleur, c étant un entier strictement positif.

On répète n fois ce tirage suivant le même principe, n étant un entier supérieur ou égal à 2.

On considère les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies par : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

- ▷ $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au i-ième tirage;
- ▷ $X_i = 0$ sinon.

On définit également pour tout $p \in [\![1, n]\!]$ la variable aléatoire Z_p par

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Que représente Z_p ? Déterminer $Z_p(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X_1 et son espérance.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 et son espérance.
4. Déterminer la loi de Z_2.
5. Soit $p \leq n - 1$.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 \mid Z_p = k)$ pour tout $k \in Z_p(\Omega)$.
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrez que
   $$\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + c\mathbb{E}(Z_p)}{2 + pc}.$$

Solution :

1) Soit $p \in [\![1, n]\!]$

Z_p compte le nombre de boules blanches tirées aux p premiers tirages.

Ainsi $Z_p(\Omega) = [\![0; p]\!]$

2) $X_1 = 1$ si on obtient une boule blanche au 1er tirage

$X_1 = 0$ sinon

Avant le premier tirage l'urne est composé d'une boule blanche et d'une boule noire. D'où

$P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$

D'où $E(X_1) = 0 . P(X_1 = 0) + 1 . P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$

3) On considère la loi (X_1, X_2). À l'aide des probabilités conditionnelles on calcule

$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P_{(X_1=0)}(X_2 = 0) \times P(X_1 = 0)$

Si on a tiré une boule noire au 1^{er} tirage alors on rajoute c boules noires dans l'urne. L'urne est donc composé de c+2 boules dont c+1 boules noires. Ainsi

$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{c+1}{c+2} \times \frac{1}{2}$

De la même manière, on calcule,

$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{c+2} \times \frac{1}{2}$

$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{c+2} \times \frac{1}{2}$

$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{c+1}{c+2} \times \frac{1}{2}$

On construit le tableau suivant pour déterminer la loi de X_2

$X_1 \backslash X_2$	0	1	
0	$\frac{c+1}{c+2} \times \frac{1}{2}$	$\frac{1}{c+2} \times \frac{1}{2}$	1/2
1	$\frac{1}{c+2} \times \frac{1}{2}$	$\frac{c+1}{c+2} \times \frac{1}{2}$	1/2
	1/2	1/2	1

Donc $P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}$ et

$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$

Ainsi $E(X_2) = 0 . P(X_2 = 0) + 1 . P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$

4) Soit $Z_2 = X_1 + X_2$

$Z_2(\Omega) = [\![0 ; 2]\!]$ d'après 1) d'où

$P(Z_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{c+1}{c+2} \times \frac{1}{2}$

$P(Z_2 = 1) = P((X_1 = 0, X_2 = 1) \cup (X_1 = 1, X_2 = 0)) = \left(\frac{1}{c+2} \times \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{c+2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{c+2}$

$P(Z_2 = 2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{c+1}{c+2} \times \frac{1}{2}$

Amaé D.

Rapport de colle S28

(partie 2)

5) Soit $p \leq n-1$

a) $\forall k \in Z_p(\Omega)$

$P(X_{p+1} = 1 \mid Z_p = k) = \ ?$

Si il y a eu k succès alors l'urne est composé de $kc+1$ boules blanches. Comme il y a eu $p-k$ échecs, il y a $c(p-k)+1$ boules noires dans l'urne. Au total, l'urne est composée de $pc+2$ boules. Ainsi

$$P(X_{p+1} = 1 \mid Z_p = k) = \frac{kc+1}{pc+2}$$

b) D'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'évènements $((Z_p = k))_{k \in [\![0;p]\!]}$

$$P(X_{p+1} = 1) = \sum_{k=0}^{p} P(X_{p+1} = 1 \mid Z_p = k) \times P(Z_p = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{kc+1}{pc+2} \times P(Z_p = k) \qquad (5)\,a))$$

$$= \frac{1}{pc+2}\Big(\underbrace{c\sum_{k=0}^{p} k\,P(Z_p = k)}_{E(Z_p)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k)}_{=1 \text{ car } ((Z_p=k))_{k\in[\![0;p]\!]} \text{ système complet d'évènement}}\Big)$$

$$\boxed{= \frac{cE(Z_p)+1}{pc+2}}$$

Ahmed
Amine

Colle semaine 28.

Énoncé :

On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Solution :

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'apparitions de "1" lors des 3600 lancers.

Ainsi, on répète 3600 fois une expérience de Bernoulli (de manière indépendante et X compte le nombre de succès obtenus, alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3600$ et $p = \frac{1}{6}$ (probabilité de succès lors d'une réalisation d'une expérience de Bernoulli).

Or, $E(X) = np = \dfrac{3600}{6} = 600$

et $V(X) = np(1-p) = \dfrac{600 \times 5}{6} = 500$

De plus : $480 < X < 720$

d'où $-120 < X - 600 < 120$

donc $|X - 600| < 120$

Par l'inégalité de Tchebychev, on sait que :

$$P(|S-600| \geqslant 120) \leqslant \frac{500}{120^2} = \frac{5}{144} \leqslant 0,035$$

Donc :

$$P(|X-600| < 120) \geqslant 1-0,035 = 0,965$$

Finalement, la probabilité que le numéro "1" apparaisse entre 480 et 720 fois lors des 3600 lancers est supérieure à 0,965

Léa N. Colle de la semaine n° 28

Énoncé :

Exercice 1. Un mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué. À l'instant 0, il est en l'origine. À chaque instant entier, son abscisse varie de $+1$ avec la probabilité p (on parle de «pas vers la droite ») et de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$ («pas vers la gauche »). On note X_n l'abscisse du point occupé par le mobile à l'instant n.

1. Donner $X_n(\Omega)$.
2. On note D_n le nombre de pas vers la droite effectués par le mobile jusqu'à l'instant n. Démontrer que $X_n = 2D_n - n$ et en déduire, grâce à la loi de D_n, celle de X_n.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.
4. Pour quelle valeur de p la variable X_n est-elle centrée ? Interpréter.

Solution

1/ $X_n(\Omega) = \{ 2k - n : k \in [\![0, n]\!] \}$

2/ $D_n :=$ le nombre de pas vers la droite à l'instant n.

On pose $G_n :=$ le nombre de pas vers la gauche à l'instant n.

On sait que $D_n - G_n = X_n$

et $D_n + G_n = n$

Donc $G_n = n - D_n$

Alors $X_n = 2D_n - n$

On répète n fois la même épreuve de Bernoulli à deux issues d'une façon indépendante, de paramètre p.

Donc $D_n \sim \mathcal{B}(n, p)$

Alors $P(X_n = x)$

$= P(2D_n - n = x)$

$= P(D_n = \frac{x+n}{2})$

$= \binom{n}{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} (1-p)^{\frac{n-x}{2}}$

3) $E(X_n) = E(2D_n - n)$

$= 2E(D_n) - n$ (par linéarité de l'espérance)

$= 2np - n$

$= n(2p-1)$

$V(X_n) = V(2D_n - n)$

$= 4V(D_n)$ (propriété de la variance)

$= 4np(1-p)$

4) X_n est centré si $E(X_n) = 0$

i.e $2np - n = 0$

$\Rightarrow 2p = 1$

$\Rightarrow p = \frac{1}{2}$

Donc si $p = \frac{1}{2}$ X_n est centré.

Cela est cohérent avec le type de l'expérience car on aura des probabilités égales d'aller à gauche ou à droite.

Rémi-S

EXERCICE 5 — Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. On pose également $q = 1-p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n+1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X.
2. En dérivant la formule donnant $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$ pour $x \neq 1$.
3. En déduire l'espérance de X.
4. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Solution

1) Notons r_i l'évenement " le n-ème candidat réussis le test ".

$$\forall i \in [\![1,n]\!], P(r_i) = p(P(\overline{r_{i-1}} \cap \dots \cap \overline{r_1}))$$

probabilité composé $\rightarrow$
$$= p \underbrace{P(\overline{r_1})}_{q} \times \prod_{j=2}^{n-1} \underbrace{\left(P(\overline{r_j} \mid \bigcap_{k=1}^{j-1} \overline{r_k})\right)}_{q}$$

$$= pq^{n-1}$$

Donc $\forall k \in [\![1,n]\!] \quad P(X=k) = pq^{k-1}$

si $k = n+1$, $p(X=n+1) = q^n$.

2) Notons $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$

Soit $x \neq 1 \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

donc
$$f'(x) = \frac{-x^n(n+1)(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$$

d'où
$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{x^{n+1}n - x^n(n+1) + 1}{(1-x)^2}$$

3)
$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X=x)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k p q^{n-1}\right) + q^n(n+1)$$

2) $\rightarrow$
$$= p\, \frac{q^{n+1}n - q^n(n+1) + 1}{(1-q)^2} + q^n(n+1)$$

$$= \frac{q^{n+1} n - q^n (n+1) + 1 + q^n (n+1)(1-q)}{1-q}$$

$$= \frac{\cancel{q^{n+1} n} - \cancel{q^n n} - q^n + 1 + \cancel{q^n n} + \cancel{q^n} - \cancel{q^{n+1} n} - q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

4) $P(X \neq n+1) = P(X \leq n) = 1 - P(X = n+1) = 1 - q^n$

$$P(X \leq n) \geq \frac{1}{2} \iff q^n \leq \frac{1}{2}$$

$$\ln \nearrow \iff n \ln(q) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\iff q \leq e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{n}} = \frac{1}{2^{1/n}}$$

Ainsi on doit avoir $p \geq 1 - \frac{1}{2^{1/n}}$.

Léon. N

Rapport de colle de la semaine n° 25

Énoncé

montrer que la fonction valeur absolue est convexe

$$\left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|\end{array}\right.$$

Solution :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in [0,1]$

$$|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq \underbrace{|\lambda x| + |(1-\lambda)y|}_{|\lambda|\cdot|x| + |1-\lambda|\cdot|y|}$$ inégalité triangulaire

par multiplicativité de la valeur absolue.

Or $\lambda \geq 0$ et $1-\lambda \geq 0$ (car $\lambda \leq 1$)

ainsi on obtient $|\lambda| = \lambda$ et $|1-\lambda| = 1-\lambda$.

Ainsi $\boxed{|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq \lambda|x| + (1-\lambda)|y|}$

La fonction valeur absolue est convexe

Maximilien .T.

Colle de Ja
Semaine 28

Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe
f est soit décroissant ~~soit~~ ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe

Supposons que f n'est pas décroissante

Ainsi $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f(a) < f(b)$

l'inégalité large est empêchée par l'autre inégalité stricte

Comme f est convexe

$$\forall x \in [b, +\infty[\quad f(x) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$$

On $\underbrace{\frac{\overbrace{f(b)-f(a)}^{>0}}{\underbrace{b-a}_{>0}}(x-a) + f(a)}_{} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Donc par lemme de minoration $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Antoine B. colle de la semaine 28.

> Une urne contient n boules noires, b boules blanches et r boules rouges où $(n,b,r) \in \mathbb{N}^3$.
> On pioche une boule au hasard
> Si on pioche une boule blanche, on gagne
> Si on pioche une boule noire, on perd
> Si on pioche une boule rouge, on tire une autre boule.
> Soit $(p(r))_{r\in\mathbb{N}}$ la probabilité de gagner avec une urne contenant r boules rouges.
> 1. determiner $p(0)$, $p(1)$
> 2. $p(r+1)$ en fonction de $p(r)$ où $r \in \mathbb{N}^*$
> 3. montrer que $(p(r))_{r\in\mathbb{N}}$ est constante.

Une solution:

1. • $p(0) = \frac{b}{b+n}$,

Soit les évenements ; R_k : on tire une rouge au k-ième tirage, B_k : — blanche au k-ième tirage.

• $p(1) = P_{R_1}(B_2) \cdot P(R_1) + P_{\overline{R_1}}(B_1) \cdot P(\overline{R_1})$ (thm des probabilités totales : $(R_1, \overline{R_1})$ forment un sce)

$= \frac{b}{b+n} \times \frac{1}{b+n+1} + \frac{b}{b+n+1}$

$= \frac{1}{b+n+1}\left(\frac{b}{b+n} + \frac{b(b+n)}{b+n}\right) = \frac{1}{b+n+1}\left(\frac{b(b+n+1)}{b+n}\right)$

$= \frac{b}{b+n} = p(0)$.

2. Les évenements $(R_1, \overline{R_1})$ forment un sce.

$\Rightarrow \quad p(r+1) = P_{\overline{R_1}}(B_1) \cdot P(\overline{R_1}) + \underbrace{p(r)}_{} \times P(R_1)$

en effet, ici on se ramène au même cas, mais avec une boule rouge en moins.

$= \frac{b}{b+n+r+1} + \frac{r+1}{b+n+r+1} \cdot p(r)$

3. Raisonnons par récurrence sur $r \in \mathbb{N}$: $\forall r \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(r) :$ " $p(r) = \frac{b}{b+m}$ "

Initialisation : $p(0) = \frac{b}{b+m}$ ✓

Hérédité : Soit $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(r)$ vrai, montrons que $\mathcal{P}(r+1)$ vrai.

$$p(r+1) \underset{Q2}{=} \frac{b}{b+m+r+1} + \frac{r+1}{b+m+r+1} p(r)$$

$$\underset{HR}{=} \frac{b}{b+m+r+1} + \frac{r+1}{b+m+r+1} \cdot \frac{b}{b+m}$$

$$= \frac{1}{b+m+r+1} \left(\frac{b(b+m)}{b+m} + \frac{b(r+1)}{b+m} \right)$$

$$= \frac{1}{b+m+r+1} \left(\frac{b}{b+m} (b+m+r+1) \right)$$

$$= \frac{b}{b+m} \checkmark$$

ELLIOTT S.V. SEMAINE 28

ENONCÉ :

2.12 Trois hotels

On a n personnes à répartir dans trois hotels H_1,H_2 et H_3. Pour chaque personne, les probabilités d'être dans chaque hotel sont égales. Chaque personne fait son choix indépendamment des autres.
On note X_i le nombre de personnes ayant choisi l'hotel H_i.
1) Donner la loi de X_i.
2) Donner la loi puis la variance de $X_1 + X_2$. En déduire $Cov(X_1, X_2)$.
3) En déduire $Cov(X_1, X_3)$ et $Cov(X_2, X_3)$

SOLUTION :

1) Une personne a une probabilité de $\frac{1}{3}$ de choisir l'hotel H_i.
On itère cette même experience independante n fois.
X_i compte le nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i.
Il vient : $X_i \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$.

2) De même, $X_1 + X_2 = \mathcal{B}(n, \frac{2}{3})$
Ainsi, $V(X_1+X_2) = n\frac{2}{3}(1-\frac{2}{3}) = \frac{2}{9}n$.
De la formule de la variance de la somme de 2 v.a, il vient :

$$V(X_1+X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$$

Donc

$$Cov(X_1,X_2) = \frac{-V(X_1) - V(X_2) + V(X_1+X_2)}{2}$$

$$= \frac{-n\frac{1}{3}\frac{2}{3} - n\frac{1}{3}\frac{2}{3} + n\frac{2}{3}\frac{1}{3}}{2}$$

$$= \frac{-n}{9}$$

3) De même, $Cov(X_1, X_3) = Cov(X_2, X_3) = \frac{-n}{9}$

Pierre V. Colle de la semaine 28

$$\boxed{\text{Soit } n\in\mathbb{N}^*. \text{ Montrer que } \forall x\in[0,+\infty[\quad x^{n+1}-(n+1)x+n\geq 0}$$

<u>Solution</u>

• Posons $f \left| \begin{array}{l} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^{n+1} \end{array} \right.$ qui est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$

$\forall x\in[0,+\infty[\qquad f''(x)=(n+1)n\underbrace{x}_{\geq 0}^{n-1}\geq 0$

donc f est convexe sur $[0,+\infty[$

• Soit $a\in[0,+\infty[$, par convexité de f on a donc

$\forall x\in[0,+\infty[\qquad f(x)\geq f'(a)(x-a)+f(a)$

donc $\forall x\in[0,+\infty[\qquad x^{n+1}\geq (n+1)a^n(x-a)+a^{n+1}$

Pour $a=1$

$\forall x\in[0,+\infty[\qquad x^{n+1}\geq (n+1)(x-1)+1$

$$\boxed{\forall x\in[0,+\infty[\qquad x^{n+1}-(n+1)x+n\geq 0}$$

Léon Sibout

Enoncé

En étudiant la convexité de $f \mid]1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(\ln(x))$
montrer que : $\forall (a,b) \in]1,+\infty[^2$

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

Solution

f est deux fois dérivable sur $]1,+\infty[$

$\forall x \in]1,+\infty[\quad f''(x) = -\dfrac{\overbrace{\ln(x)}^{>0} + 1}{x^2 \ln^2(x)} < 0$

Donc f est concave.

Par inégalité de concavité, $\forall (a,b) \in]1,+\infty[^2$

$$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2}\ln(\ln(a)) + \frac{1}{2}\ln(\ln(b))$$

$$\Rightarrow \ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq \ln\left(\sqrt{\ln(a)\ln(b)}\right)$$

$$\underset{\substack{\exp \nearrow \text{sur} \\ \mathbb{R}}}{\Rightarrow} \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

Mehdi B

Colle de la semaine 28

Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y prélève deux boules sans remise. On définit les variables aléatoires X et Y égales respectivement au plus petit et au plus grand des deux numéros obtenus.

a) Déterminer la loi du couple (X, Y).

b) En déduire les lois marginales de X et Y. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$.

c) X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $Cov(X, Y)$

d) On pose $Z := X - Y$. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$. Déterminer ensuite la loi de Z.

Solution 1)

X \ Y	1	2	3	4
1	0	1/6	1/6	1/6
2	0	0	1/6	1/6
3	0	0	0	1/6
4	0	0	0	0

Soit $(i, j) \in [\![1, 4]\!]^2$ tel que $i < j$.

$P(X = i \cap Y = j) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

nombre de couples avec comme minimum i et maximum j.

nombre de couples possibles

2) Loi de X

k	1	2	3	4
$P(X=k)$	$3/6$	$2/6$	$1/6$	0

Loi de Y

k	1	2	3	4
$P(Y=k)$	0	$1/6$	$2/6$	$3/6$

On en déduit :

- $E(X) = 1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot 0$

$$\Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{5}{3}}$$

- $E(Y) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{3}{6}$

$$\Rightarrow \boxed{E(Y) = \frac{10}{3}}$$

- D'après la formule de Koenig - Huygens

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Grâce à la formule de transfert :

$E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{3}{6} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot 0 = \frac{10}{3}$

Mehdi B.

Donc :

$V(X) = \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \boxed{V(X) = \frac{5}{9}}$

• $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$.

$E(Y^2) = 1^2 \cdot 0 + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{2}{6} + 4^2 \cdot \frac{3}{6} = \frac{35}{3}$

$V(Y) = \frac{35}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 \Rightarrow \boxed{V(Y) = \frac{5}{9}}$

3) • On remarque que :

$P(X = 3 \cap Y = 2) = 0$

et $P(X=3)P(Y=2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \neq 0$

Donc <u>X et Y ne sont pas indépendantes</u>

• On calcule à l'aide de la loi de (X,Y) établie en 1)

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) = & \left. \begin{aligned} & 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} \\ & + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} \\ & + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} \end{aligned} \right\} E(XY) = \frac{35}{6} \\ & - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{Cov(X,Y) = \frac{5}{18}}$$

4) • Par linéarité de l'espérance :

$$E(Z) = E(X) - E(Y) = \frac{5}{3} - \frac{10}{3} \Rightarrow \boxed{E(Z) = -\frac{5}{3}}$$

• Puis par la formule de Koenig-Huygens

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$$

Or $E(Z^2) = E((X-Y)^2) = E(X^2 - 2XY + Y^2)$

$$= \underbrace{E(X^2)}_{\frac{10}{3}} - 2\underbrace{E(XY)}_{\frac{35}{6}} + \underbrace{E(Y^2)}_{\frac{35}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(Z) = \frac{5}{9}}$$

• <u>Loi de Z</u>

• $Z(\Omega) = [\![-3 ; -1]\!]$.

• D'après la loi de (X,Y) :

k	-3	-2	-1
$P(Z=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$3/6$

On remarque que la loi de Z est cohérente avec la valeur $E(Z)$ trouvée précédemment.

Rapport de colle, semaine n°28

Wassim

M.

Exercice :

Une information est transmise à l'interieur d'une population. A chaque transmission entre deux personnes, il y a une probabilité p que l'information transmise soit correcte, et une probabilité $1-p$ que ce soit l'information contraire qui soit transmise.
On note p_n la probabilité qu'après n transmission l'information transmise soit correcte.

a) Donner une relation de recurrence entre p_n et p_{n+1}
b) En deduire une expression explicite de p_n en fonction de p et n
c) Trouver la limite de p_n

Solution :

a) D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = p\,p_n + (1-p)(1-p_n)$$

$$= (2p-1)p_n + (1-p)$$

b) On a une suite arithmetico-geometrique

On calcule le point fixe de l'application $x \mapsto (2p-1)x + (1-p)$ où $x \in \mathbb{R}$

$(2p-1)x + (1-p) = x$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

On pose $U_n = p_n - \frac{1}{2}$

$$U_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + (1-p) - \frac{1}{2}$$

$$= (2p-1)\underbrace{\left(p_n - \frac{1}{2}\right)}_{U_n}$$

donc U_n est une suite géométrique de raison $2p-1$ et de 1er terme $U_0 = \frac{1}{2}$

$$U_n = \frac{1}{2}(2p-1)^n$$

Ainsi, $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$

3) • Si $p = 1$: $p_n = 1$

l'information est donc transmise correctement

• Si $p \in]0,1[$ $|2p-1| < 1$ donc (p_n) converge vers $1/2$

• Si $p = 0$: $p_{2n} = 1$ $p_{2n+1} = 0$

Titouan

D

Soit $n \geqslant 2$. En vous appuyant sur la convexité de $f : x \mapsto (1+x)^n$, montrer que pour tout $x \in [-1 ; +\infty[$ $\quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

$f : x \mapsto (1+x)^n$ est 2 fois dérivable sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$.
et $\quad f'' : x \mapsto n(n-1)(1+x)^{n-2}$

Comme $x \in [-1 ; +\infty[$ et $n \geqslant 2$,
$\forall x \in [-1 ; +\infty[\; f''(x) \geqslant 0$

Donc $\boxed{f : x \mapsto (1+x)^n \text{ est convexe sur } [-1 ; +\infty[}$

La courbe représentative de f, $\mathcal{C}_f$, est donc au dessus de la tangente à f en 0.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0 : y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= n(1+0)^{(n-1)>0}(x) + (1+0)^{(n)>0} \\ &= 1 + nx \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in [-1 ; +\infty[\quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx}$

Tipüin, David

Colle de la semaine 28

19. Montrer que $f : x \to x\ln(x)$ est convexe sur $]0,1[$
En deduire que $\forall x \in]0,1[$, $x^x (1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$

- $x\ln(x)$ est deux fois dérivable par produit de fonctions dérivables ainsi $\forall x \in]0,1[$ $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$
par caractérisation de fonctions convexes f est convexe

- Soit $x \in]0,1[$ alors $1-x \in]0,1[$ et soit $\lambda = \frac{1}{2} \in [0,1]$
comme f est convexe

$$\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}(1-x)\right)\ln\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}(1-x)\right) \leqslant \tfrac{1}{2}(x\ln(x)) + \tfrac{1}{2}(1-x)\ln(1-x)$$

Par propriétés de ln et simplification

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\ln(x^x) + \ln\left((1-x)^{1-x}\right)\right)$$

$$\overset{\times 2 > 0}{\iff} \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \ln\left(x^x(1-x)^{1-x}\right)$$

comme exp est croissante sur $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{2} \leqslant x^x(1-x)^{1-x}$$

Lina.A

Colle de la semaine 28.

Enoncé :

Soit
$$f \left| \begin{array}{l}]1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\ln(\ln(x)) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est convexe
2. En déduire que $\forall (a,b) \in]1,+\infty[\times]1,+\infty[$
$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Solution :

1. Soit $x \in]1;+\infty[$.

La fonction $\ln$ est dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$. Ainsi

f convexe $\Leftrightarrow$ f' est croissante sur $]1,+\infty[$
sur $]1,+\infty[$

$$f(x) = -\ln(\ln(x))$$
$$f'(x) = \frac{-1}{x\ln(x)}$$

Montrons que f' est croissante.
Soit $(y,z) \in]1,+\infty[^2$ tel que $y \geq z$. Montrons $f'(y) \geq f'(z)$.

$$y \geq z \underset{\substack{\ln \nearrow \\ \text{sur }]1;+\infty[\\ \text{et inv } \searrow}}{\Rightarrow} \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad \ln(y) \geq \ln(z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y\ln(y)} \leq \frac{1}{z\ln(z)}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y\ln(y)} \geq -\frac{1}{z\ln(z)}$$

$$\Rightarrow f'(y) \geq f'(z)$$ Donc f convexe.

2. Soit $(a,b) \in \left]1;+\infty\right[^2$

comme f est convexe, nous pouvons appliquer l'inégalité de Jensen aux poids a et b et aux poids $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

Ainsi il vient que

$$-\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \leq -\frac{1}{2}\ln(\ln(a)) - \frac{1}{2}\ln(\ln(b))$$

$$\overset{\text{propriété algébrique de ln}}{=} -\ln\left(\ln(a)^{\frac{1}{2}}\ln(b)^{\frac{1}{2}}\right)$$

en multipliant par -1 et en appliquant la fonction exp qui est strictement croissante sur l'intervalle donnée, nous obtenons

$$\underline{\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.}$$

Youssef B — Colle de la semaine

Exercice 2 : Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On en tire 2 au hasard. On note X le plus petit numéro obtenu, et Y le plus grand numéro obtenu.

a) Déterminer la loi de (X,Y), puis la loi de X et celle de Y, dans le cas d'un tirage sans remise, puis dans le cas d'un tirage avec remise.

b) Dans chacun des 2 cas, déterminés si X et Y sont ou ne sont pas indépendantes.

Solution :

1) on pose $Z = (X, Y)$

si le tirage et avec remise :

$j \backslash i$	1	2	3	4	5
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(1,2)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(4,5)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	4,5)	(5,5)

$Z(\Omega) = [\![1,5]\!]^2$

si $i > j$, $P(Z=(i,j)) = 0$, si $i=j$, $P(Z\ (i,j)) = \frac{1}{5}$

si $i < j$, $P(Z=(i,j)) = \frac{1}{10}$

$P(X=1) = P(Y=5) = \frac{9}{25}$

$P(X=2) = P(Y=4) = \frac{7}{25}$

$P(X=3) = P(Y=3) = \frac{1}{5}$

$P(X=4) = P(Y=2) = \frac{3}{25}$

$P(X=5) = P(Y=1) = \frac{1}{25}$

si le tirage est sans remise :

on construit de manière analogue le même tableau mais sans les éléments de la diagonale.

$Z(\Omega) = [\![1,5]\!]^2$

si $i \geq j$, $P(Z=(i,j)) = 0$

si $i < j$, $P(Z=(i,j)) = \frac{1}{10}$

$P(X=1) = P(Y=5) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

$P(X=2) = P(Y=4) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P(X=3) = P(Y=3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

$P(X=4) = P(Y=2) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

$P(X=5) = P(Y=1) = 0$

si $i=3$ et $j=2$, dans le cas sans remise :

$P(X=3)\,P(Y=2) = \frac{1}{50}$ mais $P(X=3, Y=2) = 0$

Donc X et Y ne sont pas indépendants

De manière analogue pour le cas avec remise, on trouve que X et Y ne sont pas indépendants

Sophie G.

Semaine 28 de colle

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire deux boules simultanément. On appelle X le plus grand des 2 numéros obtenus.

Déterminer la loi de X, $E(X)$, $V(X)$

Solution

$X(\Omega) = [\![1, 10]\!]$

Soit $k \in [\![1, 10]\!]$

$$P(X=k) = \frac{\binom{1}{1}\binom{k-1}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{k-1}{45}$$

$$\boxed{P(X=k) = \frac{k-1}{45}}$$

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X=x)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k \frac{k-1}{45} = \frac{1}{45}\left(\sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k\right)$$

$$= \frac{1}{45}\left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2}\right) = \frac{1}{45}(11 \times 7 - 5 \times 11)$$

$$= \frac{7 \times 11}{9} - \frac{11}{9} = \frac{22}{3}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{22}{3} \qquad V(X) = \frac{176}{3}}$$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (formule transfert)

$$= \frac{1}{45}\left(\sum_{k=1}^{10} k^2(k-1)\right) - \left(\frac{22}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{45}\left(\sum_{k=1}^{10} k^3 - \sum_{k=1}^{10} k^2\right) - \left(\frac{22}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{45}\left(\frac{10^2 \times 11^2 \times 21^2}{4} - \frac{10 \times 11}{2}\right) - \left(\frac{22}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{45}\left(\quad \right) - \left(\frac{22}{3}\right)^2$$

$$= \frac{-44 - 22^2}{9} = \frac{-3 \times 176}{9} = \frac{176}{3}$$

Piero T. Colle de la semaine 28

Page : 1/3

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

1. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$, on a
$$\{X - \mathbb{E}(X) \geqslant a\} \subset \{(X - \mathbb{E}(X) + t)^2 \geqslant (a+t)^2\}.$$
2. En considérant la variable $X - \mathbb{E}(X) + t$, montrer que pour tout $t \geqslant 0$,
$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geqslant a) \leqslant \frac{t^2 + \mathbb{V}(X)}{(a+t)^2}.$$
3. En déduire l'inégalité de Cantelli :
$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2 + \mathbb{V}(X)}.$$
4. Comparer l'information donnée par cette inégalité à celle donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
5. Déduire de 4. l'inégalité suivante :
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{2\mathbb{V}(X)}{a^2 + \mathbb{V}(X)}.$$
6. A nouveau, étudier l'intérêt de cette inégalité, en particulier par rapport à celle de Bienaymé-Tchebychev et conclure.

Solution :

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Soit $x \in \{X - E(X) \geqslant a\}$.

$$x - E(X) \geqslant a \geqslant 0 \Rightarrow x - E(X) + t \geqslant a + t \geqslant t \geqslant 0$$
$$\Rightarrow (x - E(X) + t)^2 \geqslant (a+t)^2$$
$$\Rightarrow x \in \{(X - E(X) + t)^2 \geqslant (a+t)^2\}$$

donc $\{X - E(X) \geqslant a\} \subset \{(X - E(X) + t)^2 \geqslant (a+t)^2\}$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$P(X - E(X) \geqslant a) \underset{①}{\leqslant} P(\underbrace{(X - E(X) + t)^2}_{\geqslant 0} \geqslant \underbrace{(a+t)^2}_{> 0})$$
$$\leqslant \frac{E((X - E(X) + t)^2)}{(a+t)^2} \quad \text{(inégalité de Markov)}$$
$$= \frac{E((X - E(X))^2) + E(2t(X - E(X))) + E(t^2)}{(a+t)^2} \quad \text{(linéarité de } E)$$

$$= \frac{V(X) + 2t(E(X)-E(X)) + t^2}{(\alpha+t)^2} = \frac{t^2+V(X)}{(\alpha+t)^2}$$

3. Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \dfrac{t^2+V(X)}{(\alpha+t)^2} \end{array} \right.$.

D'après la question précédente : $\forall t \in \mathbb{R}_+ \; P(X-E(X) \geq \alpha) \leq f(t)$

On cherche donc un éventuel minimum de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

$$f'(t) = \frac{2t(\alpha+t)^2 - (t^2+V(X))2(\alpha+t)}{(\alpha+t)^4}$$

$$= \frac{2\alpha t + 2t^2 - 2t^2 - 2V(X)}{(\alpha+t)^3}$$

$$= \frac{\alpha t - V(X)}{(\alpha+t)^3}$$

donc $f'(t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{V(X)}{\alpha} \in \mathbb{R}_+$

(il n'est pas nécessaire de vérifier qu'il s'agit bien d'un minimum, on aurait même directement pu poser $t = \dfrac{V(X)}{\alpha}$, il s'agissait juste d'expliquer d'où vient cette valeur)

En spécialisant l'inégalité à $t = \dfrac{V(X)}{\alpha}$, on obtient donc :

$$P(X-E(X) \geq \alpha) \leq \frac{\left(\frac{V(X)}{\alpha}\right)^2 + V(X)}{\left(\alpha + \frac{V(X)}{\alpha}\right)^2} = \frac{V(X)^2 + \alpha^2 V(X)}{(\alpha^2+V(X))^2} = \frac{V(X)(\alpha^2+V(X))}{(\alpha^2+V(X))^2} = \frac{V(X)}{\alpha^2+V(X)}$$

4. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne :

$$P(X-E(X) \geq \alpha) \leq P(|X-E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

(inverse décroissant sur $\mathbb{R}_{>0}$ et $V(X) \geq 0$) $\Rightarrow \dfrac{V(X)}{\alpha^2} \geq \dfrac{V(X)}{\alpha^2+V(X)}$

L'inégalité de Cantelli est donc plus fine que celle donnée par Bienaymé-Tchebychev si on ne regarde que d'un seul côté de l'espérance.

5. $$P(|X-E(X)| \geq \alpha) = P(X-E(X) \geq \alpha) + P(E(X)-X \geq \alpha)$$
$$= P(X-E(X) \geq \alpha) + P((-X)-E(-X) \geq \alpha)$$
$$\underset{③}{\leq} \frac{V(X)}{\alpha^2+V(X)} + \frac{V(-X)}{\alpha^2+V(-X)}$$
$$= \frac{2V(X)}{\alpha^2+V(X)}$$

6. 1er cas : $V(X) \geq \alpha^2$.

$$\frac{2V(X)}{\alpha^2+V(X)} \geq \frac{2V(X)}{V(X)+V(X)} = 1$$

Une probabilité étant comprise entre 0 et 1, l'inégalité ne nous apprend rien.

2ème cas : $V(X) \leq \alpha^2$.

$$\frac{2V(X)}{\alpha^2+V(X)} \geq \frac{2V(X)}{\alpha^2+\alpha^2} = \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

L'inégalité est alors moins fine que celle de Bienaymé-Tchebychev.

Conclusion : Cette inégalité n'a donc pas d'intérêt, on en conclut que l'inégalité de Cantelli n'est utile que quand on s'intéresse à un seul côté de l'espérance.

Rayan. G

Colle de la semaine n° 28

Énoncé : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $f(a) = f(b) = 0$.
On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$ et pour tout $x \in [a,b]$,

$$g(x) = f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

$$h(x) = f(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

1. Justifier l'existence de M

2. Montrer que g est convexe et h est concave

3. En déduire que, pour tout $x \in [a,b]$ $|f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$

Solution :

1. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ segment

Donc f'' est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$ segment

Le théorème des bornes atteintes nous assure donc que

$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b] \quad |f''(x)| \leq M$

Ainsi $\{|f''(x)| : x \in [a,b]\}$ est non vide et majoré

Cela nous livre l'existence de M

2. g et h sont des combinaisons linéaire de f $\mathcal{C}^2$ et d'une fonction polynomiale associé à un polynome de degré 2 (le degré n'importe pas réellement pour la conclusion suivante mais servira pour l'interprétation graphique).

Ainsi g et h sont $\mathcal{C}^2$

Soit $x \in [a,b]$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{M(b-x)}{2} + M\frac{(x-a)}{2}$$

Donc

$$g''(x) = f''(x) + \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = f''(x) + M$$

Or $|f''(x)| \leq M \Rightarrow -M \leq f''(x) \leq M$
$\Rightarrow 0 \leq f''(x) + M \leq 2M$

Donc $g'' \geq 0$ ce qui nous livre que g est convexe

De manière analogue

$$h''(x) = f''(x) - M \leq 0$$

Donc h est concave

7. Soit $x \in [a, b]$

Montrons que $|f(x)| \leq M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$

i.e. $-M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2} \leq f(x) \leq M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$

Montrons que $f(x) + M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2} \geq 0$ et

$f(x) - M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2} \leq 0$

i.e. $g(x) \leq 0$ et $h(x) \geq 0$

Or g convexe et $x \in [a, b]$ donc

$$\exists \lambda \in [0, 1] \quad x = \lambda a + (1-\lambda) b$$

$$g(x) = g(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda g(a) + (1-\lambda) g(b)$$

Or $g(a) = f(a) + M\dfrac{(a-a)(b-a)}{2} = 0$ $(f(a) = 0)$

De même $g(b) = 0$ $(f(b) = 0)$

Donc $g(x) \leq 0$

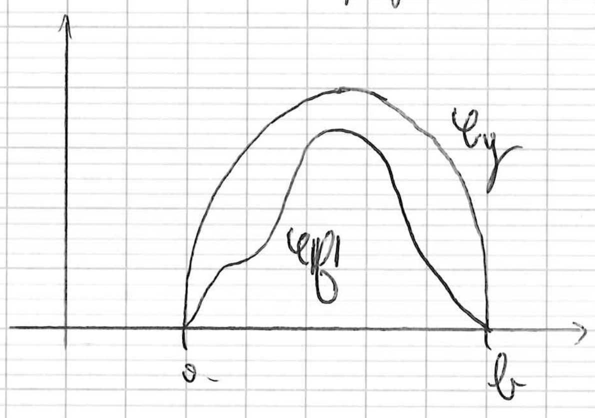
De plus

en utilisant la concavité de h et $f(a)=f(b)=0$,
$h(x) \geq 0$

Le résultat ayant été prouvé, nous allons interpréter ça géométriquement.

On pose $g \left| \begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2} \end{array} \right.$

Cette fonction polynomiale est associée à un polynôme de degré 2 s'annulant en a et b.



(où $f \in \mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f(b)=0$)

MANGIACOMINI
Amélien

Rapport de colle S28

Exercice 2. *Une animalerie possède N animaux de k espèces différentes ($3 \leq k \leq N$). Pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, on note n_i le nombre d'animaux de l'espèce numéro i, et on pose $p_i = \frac{n_i}{N}$.*
Un samedi, n clients achètent un animal au hasard et indépendamment les uns des autres.
Pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, on note N_i le nombre d'animaux achetés de l'espèce i. On note aussi X le nombre d'espèces qui n'ont connu aucun achat.

1. *Pour $i \in [\![1;k]\!]$, déterminer la loi de N_i, son espérance et sa variance.*
   Pour tout $(i,j) \in [\![1;k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, déterminer la loi de $N_i + Nj$, son espérance et sa variance, puis en déduire leur covariance.
2. *Exprimer X comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli.*
   En déduire $E(X)$ puis calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.
3. *Comparer $\mathbb{P}(X \geq 1)$ et $E(X)$. En déduire $\lim_{n\to\to+\infty} \mathbb{P}(X=0)$. Interpréter ce résultat.*

Soit $i \in [\![1;k]\!]$

1) $N_i \sim \mathcal{B}(n, p_i)$

donc $E(N_i) = n p_i$
$V(N_i) = n p_i (1-p_i)$

Soit $(i,j) \in [\![1;k]\!]^2$ tq $i \neq j$
$N_i + N_j \sim \mathcal{B}(n, p_i + p_j)$

$E(N_i + N_j) = n(p_i + p_j)$
$V(N_i + N_j) = n(p_i + p_j)(1-(p_i+p_j))$

On sait que $V(N_i + N_j) = V(N_i) + V(N_j) + 2\,\mathrm{Cov}(N_i, N_j)$

donc $\dfrac{V(N_i + N_j) - V(N_i) - V(N_j)}{2} = \mathrm{Cov}(N_i, N_j)$

donc $n\left[(p_i + p_j)(1-(p_i+p_j)) - p_i(1-p_i) - p_j(1-p_j)\right] = \mathrm{Cov}(N_i, N_j)$

donc $Cov(N_i, N_j) = -n p_i p_j$ □.

2) $X = A_1 + \dots + A_k$

où $\forall i \in [\![1 ; k]\!]$ $(A_i = 1) =$ " l'espèce i n'a eu aucuns achats malgrès les n achats des clients "

avec $P(A_i = 1) = \left((1-p_i)^n \right)$

donc $A_i \sim \mathcal{B}\left((1-p_i)^n\right)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} E(A_i) = \sum_{i=1}^{k} (1-p_i)^n$$

(linéarité de E) (E d'une loi de Bernoulli)

On suppose que pour chacune des k espèces d'animaux il y a au moins un spécimen

ie $\forall i \in [\![1 ; k]\!]$ $p_i = \frac{n_i}{N} > 0$

ie $|(1-p_i)| < 1$

donc $(1-p_i)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ie $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_i \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq N_i$ $|(1-p_i)|^n \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$; on pose $M = \max(N_1, \dots, N_k)$

on a $\forall n \geq M$;

$$\left| \sum_{i=1}^{k} (1-p_i)^n \right| \leq \sum_{i=1}^{k} |1-p_i|^n \leq \underset{\text{constante}}{k} \varepsilon$$

Donc $E(X) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Plus il y a d'achats moins une espece est susceptible de ne pas être achetée du tout.

3) D'après l'inégalité de Markov on a;

$$P(X \geq 1) = 1 . P(X \geq 1) \leq E(X)$$

Comme $0 \leq P(X \geq 1) \leq \underbrace{E(X)}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$

alors d'après le théorème d'encadrement;

$$P(X \geq 1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par opération; $\underbrace{1 - P(X \geq 1)}_{P(X=0)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

La probabilité que toutes les especes d'animaux soient achetés au moins une fois lorsque le nombre d'achats tend vers l'infini est presque certain.