ELIOTT S.V. SEMAINE 26

ENONCÉ

**Exercice** : Un étudiant décide de ne réviser que cinq exercices de probabilités de la banque CCINP sur les dix-huit qui peuvent tomber. Après tirage au sort des exercices de la planche, le colleur prend connaissance des cinq exercices révisés. Quelle est la probabilité que l'étudiant tombe sur un tel exercice dans les trois cas suivants : (i) si le colleur a été corrompu par ailleurs, (ii) si la planche est tirée au hasard, (iii) si le colleur est malveillant ?

SOLUTION :

L'étudiant n'a révisé que 5 exercices sur les 18.

Le colleur tire 3 exercice en même temps et au hasard parmi les 18 et lui en donne un des 3.

$\Omega = \mathcal{P}_3([\![1,18]\!])$, i.e. $|\Omega| = \binom{18}{3}$

Soit $A \in \mathcal{P}_5([\![1,18]\!])$ les exercices appris, $a_1, \dots, a_5$ les éléments de $A$.

(i) On cherche $P$("Un des exos tirés fait partie des 5")

En hypothèse d'equiprobabilité, on cherche $|T|$, où $T$ est l'ensemble des tirages favorables.

Quitte à renommer les exos, on peut suppose $A = [\![1,5]\!]$.

On peut alors fractionner $\Omega$ :

$$\Omega = \bigsqcup_{k=0}^{3} \{E \cup F : E \in \mathcal{P}_k([\![1,5]\!]),\ F \in \mathcal{P}_{3-k}([\![6,18]\!])\}$$

Il suffit d'un seul exo pour que le cas soit favorable pour l'etudiant :

$$T = \bigsqcup_{k=1}^{3} \{E \cup F : E \in \mathcal{P}_k([\![1,5]\!]),\ F \in \mathcal{P}_{3-k}([\![6,18]\!])\}$$

i.e $T = \Omega \setminus \{E \cup F : E \in \mathcal{P}_0([\![1,5]\!]),\ F \in \mathcal{P}_3([\![6,18]\!])\}$.

$\Rightarrow |T| = \binom{18}{3} - \binom{13}{3}$

$$\Rightarrow P(T) = \frac{|T|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\binom{13}{3}}{\binom{18}{3}} = 1 - \frac{\frac{13!}{10!\,3!}}{\frac{18!}{15!\,3!}} = 1 - \frac{13!\,15!}{10!\,18!} \simeq 0{,}65$$

(iii) On raisonne de manière equivalente.

Ici, le cas favorable est lorsque les 3 exos tirés ont été revisés, i.e.

$$T = \{E \cup F : E \in \mathcal{P}_3([\![1,5]\!]), F \in \mathcal{P}_0([\![6,18]\!])\}.$$

i.e. $T = \Omega \setminus \bigsqcup_{k=0}^{2} \{E \cup F : E \in \mathcal{P}_k([\![1,5]\!]), F \in \mathcal{P}_{3-k}([\![6,18]\!])\}.$

$$\Rightarrow |T| = \binom{18}{3} - \binom{13}{3} - \binom{5}{1}\binom{13}{2} - \binom{5}{2}\binom{13}{1}$$

$$\Rightarrow P(T) = 1 - \frac{\binom{13}{3}}{\binom{18}{3}} - \frac{\binom{5}{1}\binom{13}{2}}{\binom{18}{3}} - \frac{\binom{5}{2}\binom{13}{1}}{\binom{18}{3}}$$

$$= 1 - \frac{13!\,15!}{10!\,18!} - 5\,\frac{\frac{13!}{11!\,2!}}{\frac{18!}{15!\,3!}} - 13\,\frac{\frac{5!}{3!\,2!}}{\frac{18!}{15!\,3!}}$$

$$= 1 - \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{18 \cdot 17 \cdot 16} - 5\,\frac{13!\,15!\,3!}{11!\,18!\,2!} - 13\,\frac{5!\,15!}{2!\,18!}$$

$$= 1 - \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{18 \cdot 17 \cdot 16} - 5\,\frac{13 \cdot 12 \cdot 3}{18 \cdot 17 \cdot 16} - 13\,\frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{18 \cdot 17 \cdot 16} \simeq 0{,}012.$$

(ii) Le raisonnement est identique, mais cette fois-ci on ajoute une pondération :

$\frac{1}{3}$ pour une partie de $[\![1,5]\!]$ à 1 element

$\frac{2}{3}$ ———————— 2 elements.

$$|T| = \underbrace{\binom{18}{3}}_{\Omega} - \underbrace{\binom{13}{3}}_{\text{Que des exercices non connus}} - \underbrace{\frac{1}{3}\,5\binom{13}{2}}_{\text{1 exercice connu, 2 exercices inconnus}} - \underbrace{\frac{2}{3}\binom{5}{2}13}_{\text{2 exercices connus, 1 exercice inconnu}} - \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{3 exercices connus, 0 exercices inconnus}}$$

$$\Rightarrow P(T) = \frac{|T|}{|\Omega|} = \frac{455}{1224} \simeq 0{,}37.$$

Ahmed
Amine

Semaine 26

Énoncé

### 2.3 dé pipé ?

On dispose de 100 dés dont 30 sont pipés : pour ces derniers, la probabilité d'obtenir un 6 est égale à 1/2. Les autres dés sont équilibrés.
On choisit un dé au hasard, on le lance et on obtient un 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Solution :

Notons $A$ l'événement "le dé est pipé", et $B$ l'événement "on obtient le chiffre 6". On cherche $P_B(A)$.

$(A, \bar{A})$ forme un système complet d'événements.

$P(A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ et $P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

D'après l'énoncé : $P_A(B) = \frac{1}{2}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{6}$

Or $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$

A.N : $P(B) = \frac{4}{15}$

Par la formule de Bayes :

$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$ A.N : $P_B(A) = \frac{9}{16}$

Colle du lu semaine 26

Adem M.

**Exercice 1.** On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec probabilité $\frac{1}{8}$, 1 ou 2 descendants avec la probabilité $\frac{3}{8}$ et aucun descendant avec la probabilité $\frac{1}{8}$, indépendamment de ses congénères.

A l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec probabilité $x_1 = \frac{1}{8}$.

1. Déterminer la probabilité $x_2$ pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la 2ième génération.
2. On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ $x_n$ la probabilité qu'à l'issue de la $n$-ième génération, l'espèce ait totalement disparu. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $x_1 = \frac{1}{8}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n^3 + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{3}{8}x_n + \frac{1}{8}$.
3. Etudier la suite $(x_n)$ et montrer qu'elle converge vers $-2+\sqrt{5}$. Interpréter ce résultat.

Solution :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $D_n$ : " l'espèce a disparu à la $n$-ième génération "

$\forall k \in [\![0,3]\!]$ $A_k$ : " Il y a $k$ individus à la 1ère génération "

Pour qu'il n'y ait aucun individus à la 2ème génération, il faut que chacun des individus n'est aucun descendant

Par indépendance des évènements

$\forall k \in [\![0,3]\!]$ $P(D_2 | A_k) = x_1^k$

$(A_0, A_1, A_2, A_3)$ sce

$$x_2 = P(D_2) = P(D_2|A_0)P(A_0) + P(D_2|A_1)P(A_1) + P(D_2|A_2)P(A_2) + P(D_2|A_3)P(A_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\times\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{729}{4096} \geq \frac{1}{8}$$

2. Pour que l'espèce disparaisse à la $n+1$-ième génération, il faut que la lignée de chacun des individus de la 1ère génération disparaisse au bout de la $n$-ième génération.

Par indépendance des évènements

$\forall k \in [\![0,3]\!]$ $P(D_{n+1} | A_k) = x_n^k$

$(A_0, A_1, A_2, A_3)$ sce

$$x_{n+1} = P(D_{n+1}) = P(D_{n+1}|A_0)P(A_0) + P(D_{n+1}|A_1)\times P(A_1) + P(D_{n+1}|A_2)P(A_2) + P(D_{n+1}|A_3)P(A_3)$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x_n + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{1}{8}x_n^3$$

3. $f \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow [0,1] \\ x \longrightarrow \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 \end{array} \right.$ est bien définie $f(x_n) = x_{n+1}$

$h \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) - x \end{array} \right.$

Soit $x \in [0,1]$ $h(x) = \frac{1}{8}(x-1)(x^2+4x-1)$

$$= \frac{1}{8}(x-1)(x+2-\sqrt{5})(x+2+\sqrt{5})$$

$$f(x) = \frac{1}{8}(x+1)^3$$

| $x$ | $0$ | | $-2+\sqrt{5}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\nearrow$ | $-2+\sqrt{5}$ | $\nearrow$ | $1$ |

Comme $f$ est croissante, $(x_n)$ est monotone
De plus $(x_n)$ est bornée

Comme $x_1 \in [0, -2+\sqrt{5}]$. $(x_n)$ est croissante et majorée par $-2+\sqrt{5}$, d'après le théorème de la limite monotone
$\exists \ell \in [0, -2+\sqrt{5}]$ $x_n \to \ell$
Comme $f$ est continue sur $[0, -2+\sqrt{5}]$ $f(x_n) \longrightarrow f(\ell)$
or $f(x_n) = x_{n+1} \longrightarrow \ell$ (suite extraite)
Par unicité de la limite $f(\ell) = \ell$, $\ell$ est un point fixe de $f$ dans $[0, -2+\sqrt{5}]$, $\ell = -2+\sqrt{5}$.

Rayan. G
MP2I

Colle de la semaine n° 26

<u>Enoncé</u> : On dispose d'un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence. On sait que 50 de ces pièces sont équilibrées tandis que les 50 autres sont truquées. Pour une pièce truquée, la probabilité d'apparition de pile lors d'un jet de cette pièce vaut $\frac{3}{4}$. On suppose que les différents lancers dont il sera question par la suite sont indépendants les uns des autres.

1. a) On prend une pièce au hasard et on la lance. Le résultat est "pile", quelle est alors la probabilité que la pièce choisie soit truquée ?

   b) On relance la pièce et obtenons "pile". Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée ?

2. On désire effectuer un tri des pièces pour tenter d'éliminer celles qui sont truquées. Pour cela, on prend les pièces du lot et on lance chaque pièce 4 fois. Si au cours des 4 lancers, on obtient au moins 3 fois pile on décide d'éliminer la pièce.

a) Quelle est la probabilité d'éliminer une pièce équilibrée ?

b) Quelle est la probabilité de conserver une pièce truquée ?

Solution :

1. a) On cherche à déterminer

$$P_{P_i}(T) = \frac{P(T \cap P_i)}{P(P_i)} \quad \text{(Probabilité conditionnelle)}$$

$$P(T \cap P_i) = P(T)\, P_T(P_i) = \frac{3}{8}$$

( $P(T) = \frac{1}{2}$ car il y a 50 pièce truquée sur 100 et on prend la pièce au hasard , $P_T(P_i)$ est donné dans l'énoncé )

$$P(P_i) = P(T)\, P_T(P_i) + P(\bar{T})\, P_{\bar{T}}(P_i) \quad \text{(Probabilité totale)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$P(P_i) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{5}{8}$$

$$P_{P_i}(T) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+1\right)} = \frac{\cancel{\frac{3}{2}}}{\cancel{1+\frac{3}{2}}} \quad \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$$

b) On note

$P_1$ : "pile au premier lancé"
$P_2$ : "pile au deuxième lancé"

$$P_{P_1\cap P_2}(T) = \frac{P(P_1\cap P_2\cap T)}{P(P_1\cap P_2)}$$

$$P(P_1\cap P_2\cap T) = P(T)\,P_T(P_1\cap P_2)$$
$$= \frac{1}{2}P_T(P_1)P_T(P_2)$$ (Indépendance des lancés)

$$P(P_1\cap P_2\cap T) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(P_1\cap P_2) = P(T)P_T(P_1\cap P_2) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(P_1\cap P_2)$$
$$P(P_1\cap P_2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$$

$$P_{P_1\cap P_2}(T) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{1}{4}+\frac{9}{16}} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{13}{16}} = \frac{9}{13}$$

2. a) On pose $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de pile sur les 4 lancés.
Les lancés étant indépendants, la pièce ne changeant pas et $X$ ayant comme issue le succès l'échec sur 4 répétitions :

$X \sim \mathcal{B}(4, p)$ où $p$ va dépendre de la pièce

En effet si la pièce est truquée alors

$p = \frac{3}{4} \in (0,1)$

Sinon, $p = \frac{1}{2} \in (0,1)$

a) On cherche $P(X \geq 3 \mid \bar{T}) = \dfrac{P((X \geq 3) \cap \bar{T})}{P(\bar{T})}$

$$P((X \geq 3) \cap \bar{T}) = \left( P((X=3) \cap \bar{T}) + P((X=4) \cap \bar{T}) \right)$$

$$= \binom{4}{3} p^3 (1-p) + \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0$$

Or ici $p = \frac{1}{2}$ car $\bar{T}$ est réalisé

$$= \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$= 4 \left(\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

$P((X \geq 3) \cap \bar{T}) = \cancel{\frac{2}{16}} \frac{5}{16}$ donc $P(X \geq 3 \mid \bar{T}) = \frac{5}{8}$

b) On cherche $P(X \leq 2 \mid T) = \dfrac{P((X \leq 2) \cap T)}{P(\bar{T})}$

$$P((X \leq 2) \cap T) = P(X=0 \cap T) + P(X=1 \cap T) + P(X=2 \cap T)$$

T est réalisé

$$= \binom{4}{0} \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^4 + \binom{4}{1} \left(\frac{3}{4}\right) \left(1 - \frac{3}{4}\right)^3$$

$$+ \binom{4}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^4 + 4 \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 6 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{256} + \frac{3\times 4}{256} + \frac{6\times 3\times 3}{256}$$

$$= \frac{1}{256} + \frac{12}{256} + \frac{54}{256}$$

$$P((X\leq 2)\cap T) = \frac{67}{256}$$

Donc $P((X\leq 2) \mid T) = \frac{67}{128}$

Léa N. Colle de la semaine n°. 26

Énoncé :

**Exercice 1**
Soient $n$ et $m$ deux entiers strictement positifs. Soit $p \in ]0,1[$. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$ et une loi binomiale de paramètre $m$ et $p$.
Donner la loi de $X + Y$.

Solution :

$X \sim B(n, p)$

$Y \sim B(m, p)$

On pose $S := X + Y$

$S(\Omega) = [\![0, n+m]\!]$

$((X=i))_{i \in [\![0,n]\!]}$ système complet d'événements

Soit $k \in [\![0, n+m]\!]$, d'après la formule de probabilité totale :

$$P(S=k) = \sum_{i=1}^{n} P(S=k, X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X+Y=k \cap X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(Y=k-i \cap X=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(Y=k-i)\, P(X=i) \qquad (X \perp\!\!\!\perp Y)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i} \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{m}{k-i}\binom{n}{i} p^{k} (1-p)^{m+n-k}$$

On distingue deux cas :

- si $k \leq i$, alors $P(Y=k-i) = 0$

Donc $P(S=k) = 0$

- si $k \geq i$, $P(S=k) \geq 0$

Donc $P(S=k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{m}{k-i}\binom{n}{i} p^{k} (1-p)^{m+n-k}$

$$= p^{k} (1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^{k-n} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

$$= p^k (1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k-i} \binom{m}{i}$$

car si $i \geqslant k - n$ $\quad \binom{n}{k-i} = 0$

$$= \binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}$$ (D'après la formule de Vandermonde)

On en déduit que $S \sim \mathcal{B}(m+n, p)$

### 2.4 somme de deux dés (1)

On lance deux dés équilibrés et on note $X$ la somme des deux nombres obtenus.
1) Expliquer pourquoi $X$ ne suit pas une loi uniforme.
2) Peut-on piper les dés de sorte que $X$ suive une loi uniforme sur $[|2, 12|]$?

Solution :

1) Les lancés sont équilibrés et indépendant donc on a :

$$P(X=2) = 1/36 \neq P(X=3) = 2/36$$

Donc $X$ ne suit pas une loi uniforme.

2) Supposons que l'on peut piper les dés pour que $X \sim \mathcal{U}([\![2;12]\!])$. $X_1, X_2$ les nombres de chaque dés.

$$P(X=2) = \underbrace{P(X_1=1)}_{p_1}\underbrace{P(X_2=1)}_{p_2} = \frac{1}{11}$$

$$P(X=12) = \underbrace{P(X_1=6)}_{p_3}\underbrace{P(X_2=6)}_{p_4} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{11} = P(X=7) = P(X_1=6)P(X_2=1) + P(X_1=1)P(X_2=1) + \underbrace{\sum_{k=2}^{5} P(X_1=k)P(X_2=\cancel{6}-k)}_{\geq 0}$$

Montrons que $p_1p_3 + p_2p_4 > \frac{1}{11}$

sachant que $p_1p_2 = \frac{1}{11}$

et $p_3p_4 = \frac{1}{11}$

$$(p_3 - p_2)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow p_3^2 + p_2^2 \geq 2p_3p_2$$

$$\underset{\times p_1p_4 \geq 0}{\Rightarrow} p_3^2p_1p_4 + p_2^2p_1p_4 \geq 2p_1p_2p_3p_4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{11}p_1p_3 + \frac{1}{11}p_2p_4 \geq 2 \times \frac{1}{11} \times \cancel{\frac{1}{11}} > \frac{1}{11}$$

donc on obtient une contradiction.

Raphaël Houchonnet colle semaine n°26

**Exercice 1.** On dispose de deux dés $A$ et $B$. Le dé $A$ possède quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé $B$ possède deux faces rouges et quatre blanches. On lance une pièce de monnaie déséquilibrée pour déterminer quel dé sera utilisé dans toute la suite de l'expérience (Elle fait pile avec probabilité $\frac{1}{3}$).

— Si on obtient Pile, on décide de jouer uniquement avec le dé $A$.

— Si on obtient Face, on décide de jouer uniquement avec le dé $B$.

Ce dé est ensuite lancé un grand nombre de fois.

1. Calculer la probabilité d'obtenir Rouge au premier lancer.
2. On a obtenu rouge aux deux premiers lancers. Quel est la probabilité d'obtenir rouge au troisième lancer ?
3. On a obtenu Rouge aux $n$ premiers lancers avec $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité d'avoir utilisé le dé $A$ ?

Solution : Soit $m \in \mathbb{N}$ le nombre de lancers de dé.
On pose $\Omega = \{(\text{dé}, \text{couleur}) \in (\{A,B\} \times \{R,B\})^m\}$
On munie $\Omega$ de $P$, une probabilité suivant l'énoncer. On pose

$E = \{(x,y) \in \Omega : x = A\}$ = "la pièce fait Pile"

$E' = \{(x,y) \in \Omega : x = B\}$ = "la pièce fait face"

Sachant $E \cup E' = \Omega$, $(E, E')$ est un système complet d'élément sur $\Omega$.

$\forall i \in [\![1, m]\!]$ $X_i : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$

tel que $(X_i = 1)$ est l'événement "rouge au $i$ème lancer"

1) On s'intéresse à $P(X=1)$
Par la formule des probabilités totales

$$P(X=1) = \underbrace{P(E)}_{1/3}\underbrace{P(X=1|E)}_{2/3} + \underbrace{P(E')}_{2/3}\underbrace{P(X=1|E')}_{1/3} = 4/9$$

2) $P(X_3=1 \mid X_1=1, X_2=1) = \dfrac{P(X_3=1, X_2=1, X_1=1)\ \circledast}{P(X_1=1, X_2=1)\ \circledast\circledast}$

$$\circledast \overset{FPT}{=} P(E)\,P\Big(\bigcap_{i=1}^{3} X_i=1 \mid E\Big) + P(E')\,P\Big(\bigcap_{i=1}^{3} X_i=1 \mid E'\Big)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$= \frac{10}{81}$$

$$\circledast\circledast \overset{FPT}{=} P(E)\,P\Big(\bigcap_{i=1}^{2} X_i=1 \mid E\Big) + P(E')\,P\Big(\bigcap_{i=1}^{2} X_i=1 \mid E'\Big)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{6}{27}$$

Donc $P(X_3=1 \mid X_2=1, X_1=1) = \dfrac{10}{81} \times \dfrac{27}{6} = \dfrac{270}{486}$

3) On cherche $P\Big(E \mid \bigcap_{i=1}^{n}(X_i=1)\Big)$.

$$P\Big(E \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i=1)\Big)\Big) \overset{\text{proba composées}}{=} P(E)\,\overbrace{P(X_1=1 \mid E)}^{2/3} \times \overbrace{P(X_2=1 \mid E \cap (X_1=1))}^{2/3} \times \dots \times \underbrace{P\Big(X_n=1 \mid E \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{n-1}(X_i=1)\Big)\Big)}_{2/3}$$

(sachant E la proba que le dé face rouge reste la m a tous les tours)

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i=1)\Big) \overset{FPT}{=} \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n+2}{3^{n+1}}$$

Donc $P\Big(E \mid \bigcap_{i=1}^{n}(X_i=1)\Big) = \dfrac{2^n}{3^{n+1}} \, \dfrac{3^{n+1}}{2^n+2} = \dfrac{2^n}{2^n+2}$

Louis Guillaume S. Colle de la semaine 26

**Exercice 1**

Dans une partie du centre-ville de la ville de Probabylone, toutes les rues sont en sens unique. Le plan de cette partie peut-être modélisé de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccc} S & \rightarrow & P & \rightarrow & I \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V & \rightarrow & E & \rightarrow & N. \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \rightarrow & R & \rightarrow & T \end{array}$$

Chaque rue a une probabilité $q = 1 - p$, ($p \in ]0,1[$) d'être fermée pour travaux, indépendamment des autres rues.

1. Pour $k \in [\![0, 12]\!]$, quelle est la probabilité que exactement $k$ rues soient libres (c'est-à-dire non fermées pour travaux) ?
2. Déterminer la probabilité $p_1$ qu'il existe un chemin libre de $S$ à $T$ ne passant par $E$.
3. Déterminer la probabilité $p_2$ qu'il existe un chemin libre de $S$ à $T$ passant $E$.
4. Déterminer la probabilité $p_3$ que tous les chemins de $S$ à $T$ soient libres sauf ceux qui passent par $E$.

Solution :

1. Soit $\Omega = [\![1,12]\!]$ ensemble des rues de la ville.
On muni $\Omega$ de la probabilité $P$, considérons alors la situation suivante :

"On répète 12 fois de manière indépendante une expérience de Bernoulli qui a pour succès : "La rue est libre" de probabilité $p \in ]0,1[$

Soit $X$ la variable aléatoire sur $\Omega$ qui compte le nombre de succès.
Ainsi $X$ suit la loi Binomiale de paramètres $n = 12$ et de probabilité $p$.
Soit $k \in [\![0,12]\!]$. Nous en déduisons alors :

$$\boxed{P(X=k) = \binom{12}{k} p^k q^{12-k}}$$

2. Remarquons que seul 2 évènement parviennent à satisfaire la condition recherchée. Respectivement :

$\mathcal{A}$ = "Le chemin $S \to P \to I \to N \to T$ est libre"
$B$ = "Le chemin $S \to V \to A \to R \to T$ est libre"

Comme la probabilité qu'une rue soit libre est indépendante des autres :

$$\underline{P(\mathcal{A}) = P(B) = p^4}$$

Or, $P_1 = P(\mathcal{H} \cup B) = P(\mathcal{H}) + P(B) - P(\mathcal{H} \cap B)$

$$\Rightarrow \boxed{P_1 = 2p^4 - p^8} \geq 0$$

3. Remarquons que nous pouvons scinder notre étude. En effet la probabilité est la même que celle qu'il existe un chemin de S à E et de E à T
Considérons alors les évènements suivant :

$\mathcal{E}_1$ = "Les chemins $S \to V \to E$ et $S \to P \to E$ sont libres"
$\mathcal{E}_2$ = "Les chemins $E \to R \to T$ et $E \to V \to T$ sont libres"

De manière analogue à 2, nous obtenons

$$\mathcal{E}_1 = 2p^2 - p^4$$
$$\mathcal{E}_2 = 2p^2 - p^4$$

Ainsi nous obtenons $\boxed{P_2 = P(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = P(\mathcal{E}_1) \times P(\mathcal{E}_2) = (2p^2 - p^4)^2}$

4. Remarquons qu'il existe 6 chemins possibles pour rejoindre T de S.
Notons ces chemins $(L_1, L_2, \ldots, L_5, L_6)$ tq $L_1, L_2$ ne passant pas par E.
Calculons la probabilité que $L_1$ et $L_2$ soient libres.
$P_4 = P(L_1 \cap L_2) = P(L_1) \times P(L_2) = \underline{(2p^4 - p^8)^2}$
Or, la probabilité que tous les chemins passant par E soient fermé correspond au complémentaire de $P_2$.
Ainsi nous en déduisons que

$$\underline{P_3 = P_4 \times (1 - p_2) = (2p^4 - p^8)^2 (1 - (2p^2 - p^4)^2)}$$

Titouan D

Rapport de colle semaine 26

On voudrait connaître le nombre $n$ de baleine à bosse sur Terre. La première année, on cherche 100 baleines à bosse, on les marque de manière à pouvoir les reconnaître plus tard, puis on les relâche.
L'année suivante, on sélectionne successivement 100 baleines à bosse distinctes. On compte celles qui portent la marque de l'année précédente.
Pour tout $i \in [\![1;100]\!]$ on note $X_i$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la ième baleine examinée est marquée et 0 sinon.
On note $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$
Enfin, on appelle $E$ l'ensemble des baleines, $B_1, \dots, B_{100}$ les baleines marquées et $B_{101}, \dots, B_n$ celles qui ne le sont pas.

1) Par quelle objet mathématique code-t-on le résultat de l'expérience. Décrire l'univers $\Omega_n$ et la probabilité $P_n$ associée à cette expérience

On a un tirage sans remise répété 100 fois. C'est donc un 100-uplet sans répétition de $[\![1;n]\!]$

Donc $\Omega_n = \mathcal{A}_{100}^{[\![1;n]\!]}$

On y associe la probabilité uniforme $P_n$ $\left|\begin{array}{l} \mathcal{P}(\Omega_n) \to [0;1] \\ A \mapsto \dfrac{|A|}{|\Omega_n|} \end{array}\right.$

2) Soit $i \in [\![1;100]\!]$ Calculer la probabilité que la ième baleine examinée soit marquée

$$P(X_i=1) = \frac{|(X_i=1)|}{|\mathcal{A}_{100}^{[\![1;n]\!]}|}$$

nombre de choix pour la baleine $\to$

$$= \frac{100 \times \dfrac{(n-1)!}{(n-1-99)!}}{\dfrac{n!}{(n-100)!}}$$

$\leftarrow$ nombre de possibilités pour la répartition des autres baleine (99-uplet sans répétition dans $[\![1;n]\!] \setminus \{i\} \to [\![1;n-1]\!]$

$$\boxed{P(X_i=1) = \frac{100}{n}}$$

3) Calculer $P(X_2=1 \mid X_1=1)$. Les variables aléatoires $X_1, X_2$ sont elles indépendantes ?

nombre de choix pour

les autres

$$P(X_2=1 \mid X_1=1) = \frac{\underset{X_1}{100} \times \underset{X_2}{99} \times \left(\frac{(n-2)!}{(n-2-98)!}\right)}{\frac{n}{(n-100)!}}$$

$$= \frac{9900}{n(n-1)}$$

$$P(X_2=1)\,P(X_1=1) = \left(\frac{100}{n}\right)^2$$

Si $X_2$ et $X_1$ independants

$P(X_2=1 \mid X_1=1) = P(X_2=1)$

$\Rightarrow \frac{99}{n-1} = 1 \Rightarrow n = 100$

$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont independant si et seulement si } n=100}$$

4) Que represente $Z$ ? Donner $Z(\Omega_n)$

$Z$ représente le nombre de baleines marquées pechee la $2^e$ année.

S'il y a moins de 200 baleines, $Z$ vaut au moins $n-100$ donc

$Z(\Omega_n) = [\![ \max(0 ; 200-n) ; 100 ]\!]$

5) Pour tout $k \in [\![1;100]\!]$, calculer $P_n(Z=k)$

Soit $k \in [\![1;100]\!]$

nombre de façon de choisir parmi les marquées × nombre de façon de choisir les restantes parmis les autres × nombre de bijection du resultat

$$P_n(Z=k) = \frac{\binom{100}{k}\left(\frac{n-100}{100-k}\right)}{\frac{n!}{(n-100)!}} \times 100!$$

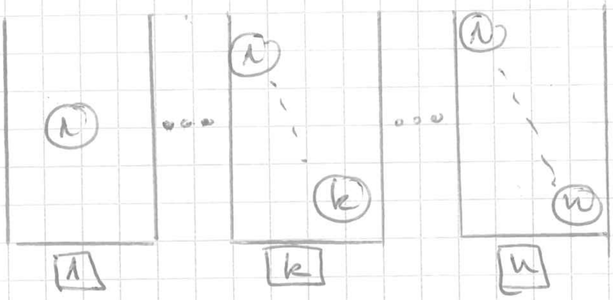
$$= \frac{\frac{100!}{k!(100-k)!}\;\frac{(n-100)!}{(100-k)!(n-k)!}}{\frac{n!}{(n-100)!}} \times 100!$$

$$= \frac{(100!)^2((n-100)!)^2}{((100-k)!)^2\,k!\,(n-k)!\,n!}$$

Sophie G. — Semaine de colle 26

**EXERCICE 13** — On dispose de $n$ urnes numérotées de 1 à $n$, l'urne numérotée $k$ comprenant $k$ boules numérotées de 1 à $k$ indiscernables au toucher. On réalise l'expérience aléatoire suivante. On choisit d'abord au hasard et sans préférence une urne, puis on prélève une boule dans cette urne. On note $X$ le numéro de l'urne choisie et on note $Y$ le numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X$ ?
2. Pour $(i,k) \in \{1,\dots,n\}^2$, déterminer $P(Y=k|X=i)$.
3. Déterminer la loi de $Y$ ?
4. Quelle est l'espérance de $Y$ ? Comment l'interprétez-vous ?




1) $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$

$\forall k \in [\![1,n]\!] \ P(X=k) = \frac{1}{n}$

$$\boxed{X \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])}$$

2) Soit $(k,i) \in \{1,\dots n\} \times \{1,\dots n\}$

$$\boxed{P(Y=k \mid X=i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > i \\ \frac{1}{i} & \text{si } k \leq i \end{cases}}$$

car les boules sont indiscernables au toucher

3) $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$

$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P(Y=k \mid X=i)\, P(X=i)$$

formule des probas totales

car $(X=i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sce de $\Omega$

$$= \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}\frac{1}{n} = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i} = P(Y=k)}$$

4)

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(Y=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{k}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \frac{k}{i}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \frac{i \times (i+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (i+1)$$

$$= \frac{1}{2n} \left( \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n+1}{4} + \frac{1}{2}$$

MANGIACOMINI
Amélien

Colle semaine 26

Problème de Monty Hall

Lors d'un jeu télévisé, on présente trois portes à un candidat. Derrière l'une d'elle se trouve un cadeau, les autres sont vides.

Un candidat choisi la porte 1, mais ne l'ouvre pas. Le présentateur, qui sait quelles boites sont vides ouvre une porte qu'il sait vide : la porte n°2.

Le candidat peut alors décider d'ouvrir la porte n°1 ou 3. Que doit-il faire ?

Soit $(\Omega, P)$ espace de proba uniforme
On note $A_k$ : " Le cadeau se trouve derrière la porte $k$ " avec $k \in [\![1;3]\!]$

$B_k$ : " Le présentateur ouvre la porte $k$ qui est vide " avec $k \in [\![1;3]\!]$

On cherche $P(A_1 | B_2)$ et $P(A_3 | B_2)$

D'après le théorème de Bayes ;

$$P(A_1 | B_2) = \frac{P(B_2 | A_1)\, P(A_1)}{P(B_2)}$$

Or $A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 = \Omega$ est un s.c.e.

donc $P(B_2) = P(B_2 \cap A_1) + P(B_2 \cap A_2) + P(B_2 \cap A_3)$ (F.P.T.)

donc $$P(A_1 | B_2) = \frac{P(B_2|A_1)P(A_1)}{P(A_1)P(B_2|A_1) + P(A_2)P(B_2|A_2) + \ldots}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

De manière analogue, $P(A_3 | B_2)$

$$= \frac{P(B_2|A_3)P(A_3)}{P(A_1)P(B_2|A_1) + P(A_2)P(B_2|A_2) + P(A_3)P(B_2|A_3)}$$

$$= \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1} = \frac{2}{3}$$

Il faut privilégier la porte 3.

Pierre V. Colle de la semaine 26

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire deux boules simultanément. On appelle $X$ le plus grand des deux numeros obtenus. Determiner la loi de $X$

Solution

- Posons l'univers $\Omega = \{(i,j) \in [\![1,10]\!]^2 : i<j\}$ qu'on munit de la probabilité uniforme $P$.

  On a donc $\text{Card}(\Omega) = \binom{10}{2} = 45$

- $X(\Omega) = [\![2,10]\!]$

- Soit $k \in [\![2,10]\!]$

  $(X=k) = \{(i,j) \in \Omega ; j=k\} = \{(1,k), \dots, (k-1,k)\}$

  Ainsi $\text{Card}(X=k) = k-1$

  Donc $\forall k \in [\![2,10]\!] \quad P(X=k) = \dfrac{k-1}{45}$

NISS
MATHEO

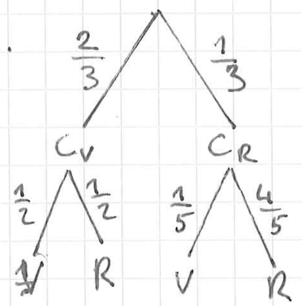
# Rapport de colle semaine 26

**Exercice 1**
Un caméléon daltonien posé sur du vert prend soit la couleur verte, soit la couleur rouge, avec la même probabilité. Quand il est posé sur du rouge, il prend soit la couleur verte une fois sur cinq, soit la couleur rouge quatre fois sur cinq. Laurine étale chaque matin sa couverture bicolore sur l'herbe, une fois sur trois côté rouge visible, deux fois sur trois côté vert visible. Un couple de caméléon daltoniens vient s'ébattre sur sa couverture. Pour une couleur de couverture fixée, et malgré l'amour fou qui lie les deux caméléons, leurs deux couleurs respectives sont indépendantes entre elles.

1. Calculer la probabilité qu'ils soient de la même couleur.
2. Les événements « le caméléon mâle est vert » et « le caméléon femelle est vert » sont-ils indépendants ?
3. Sachant qu'ils sont de couleurs différentes, calculer la probabilité que la face apparente de la couverture soit rouge.

## Solution :

On pose : $(\Omega, P)$ un espace probabilisé fini.




$V_1$ = " Le caméléon 1 est vert "

$V_2$ = " Le caméléon 2 est vert "

$C_V$ = " La couverture est verte "

$C_R$ = " La couverture est rouge "

1) Nous cherchons $P(V_1 \cap V_2)$ et $P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2})$

$\{C_V, C_R\}$ étant un système complet d'événement de $\Omega$

$$P(V_1 \cap V_2) = P_{C_V}(V_1 \cap V_2)P(C_V) + P_{C_R}(V_1 \cap V_2)P(C_V) \quad \text{[Probabilités totales]}$$

$$= P_{C_V}(V_1)P_{C_V}(V_2)P(C_V) + P_{C_R}(V_1)P_{C_R}(V_2)P(C_R)$$

[indépendances des couleurs pour une couleur fixée]

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{75} = \frac{75}{450} + \frac{6}{450} = \frac{81}{450} = \frac{9}{50}$$

De même :

$$P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = P_{C_V}(\overline{V_1} \cap \overline{V_2})P(C_V) + P_{C_R}(\overline{V_1} \cap \overline{V_2})P(C_R)$$

$$= (P_{C_V}(R))^2 \times P(C_V) + (P_{C_R}(R))^2 P(C_R)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{16}{75} = \frac{75}{450} + \frac{96}{450} = \frac{171}{450} = \frac{19}{50}$$

Ainsi, la probabilités qu'ils soient de la même couleur est : $P(V_1 \cap V_2) + P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = \frac{9}{50} + \frac{19}{50} = \boxed{\frac{28}{50}}$

2. Nous avons : $P(V_1 \cap V_2) = \frac{9}{50}$, calculons $P(V_1)P(V_2) = (P(V))^2$

Par les probabilités totales, comme $(C_R, C_V)$ est un système complet d'événement

$$P(V) = P_{C_R}(V) \times P(C_R) + P_{C_V}(V)\,P(C_V)$$
$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$
$$= \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{6}{15}$$

On a : $(P(V))^2 = \frac{36}{225} = \frac{4}{25} = \frac{8}{50}$

Ainsi $\underline{P(V_1 \cap V_2) \neq P(V_1)P(V_2)}$, les événements $V_1$ et $V_2$ ne sont donc pas indépendant

3. Soit $C_d$ = "Les couleurs des caméléons sont différentes"

On a : $P(C_d) = 1 - \underbrace{(P(V_1 \cap V_2) + P(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}))}_{\text{Probabilités qu'ils soient de la même coul}}$

On a : $P_{C_d}(C_R) = P_{C_R}(C_d) \times \frac{P(C_R)}{P(C_d)}$

$$= \left(1 - (P_{C_R}(V_1 \cap V_2) + P_{C_R}(\overline{V_1} \cap \overline{V_2}))\right) \times \frac{P(C_R)}{P(C_d)}$$
$$= \left(1 - (P_{C_R}(V_1)P_{C_R}(V_2) + P_{C_R}(\overline{V_1})P_{C_R}(\overline{V_2}))\right) \times \frac{P(C_R)}{P(C_d)}$$
$$= \left(1 - \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right)\right) \times \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{28}{50}}$$
$$= \left(1 - \frac{17}{25}\right) \times \frac{50}{66}$$
$$= \frac{8}{25} \times \frac{50}{66} = \frac{16}{66} = \boxed{\frac{8}{33}}$$

Rapport de Colle, semaine n° 26

Wassim
M.

Exercice:

Montrer que si n evenements sont independants dans leur ensemble, alors ils sont independants deux à deux. Rappeler un contre exemple de la reciproque

Solution:

Soit $(\Omega, P)$ un espace de probabilité fini

$(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$. on pose $I = [\![1, n]\!]$

Soit $J \subset [\![1, n]\!]$

Supposons $(A_1, \dots, A_n)$ independants alors

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]$ tq $i \neq j$ $A_i \cap A_j \subset A_1 \cap \dots \cap A_n$

donc $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) P(A_j)$

donc si ces 2 evenements sont independants

- Contre exemple : 2 lancers d'un dé à 6 faces

- $\Omega = [\![1,6]\!]^2 \quad |\Omega| = 36$

A : "le chiffre du 1er lancer est pair" B : "le chiffre du 2eme lancer est impair" C : "la somme des 2 chiffres est paire"

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$C = \{1,3,5\} \times \{1,3,5\} \sqcup \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}$

$P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{2,4,6\} \times \{1,3,5\} \quad P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$

$A \cap C = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\} \quad P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$

$B \cap C = \{1,3,5\} \times \{1,3,5\} \quad P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$

Donc A, B, C sont 2 à 2 independants

$P(A \cap B \cap C) = \emptyset$ or $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$ donc A, B, C non independants

Tigeën David

Colle de la semaine 26

**Exercice** : Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question dont $m$ réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse (probabilité $p \in ]0,1[$), soit il choisit au hasard. Sachant que l'étudiant a répondu correctement, quelle est la probabilité qu'il ait connu la réponse ?

Soit A l'évènement "connait la réponse" et B l'évènement "repond correctement". Ainsi on sait que

$P(A) = p$ et d'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'evenements $(A, \bar{A})$ :

$$P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(A)$$

$$= p + \frac{1}{m(1-p)} \times p$$

Or d'après la formule de Bayes

$P_B(A) = P_A(B) \times \frac{P(A)}{P(B)}$ et $P_A(B) = 1$ d'où

$$P_B(A) = \frac{p}{p + \frac{p}{m(1-p)}}$$

$$= \frac{m(1-p)}{m(1-p)+1}$$

qui est la probabilité qu'il ait connu la réponse sachant que l'étudiant a repondu correctement.

Hugo D. Colle de la semaine n°26

**Exercice 1.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $n$ sacs $S_1, \ldots, S_n$. Pour tout $k$ compris entre 1 et $n$, le sac $S_k$ contient $k$ jetons blancs et $(n+1-k)$ jetons mauves.*

*On choisit un sac de sorte que la probabilité de choisir le sac $S_k$ soit égale à $\alpha k$ pour tout $k$ compris entre 1 et $n$, ce après quoi on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.*

1. *Trouver la valeur de $\alpha$ de sorte à ce que le problème soit bien posé.*
2. *Le jeton pioché est mauve. Exprimer en fonction de $k \in [\![1, n]\!]$ la probabilité que ce jeton provienne du sac $S_k$. Simplifier au maximum l'expression obtenue.*

Solution

1) On pose : $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $p_k$ la probabilité de choisir le sac $S_k$

Pour que le problème soit bien défini, il faut que

$$1 = \sum_{k=1}^{n} p_k$$

On $1 = \sum_{k=1}^{n} p_k \iff 1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha k$

$$\iff 1 = \alpha \sum_{k=1}^{n} k$$

$$\iff 1 = \alpha \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\underset{\times \frac{2}{n(n+1)} \neq 0}{\iff} \boxed{\alpha = \frac{2}{n(n+1)}}$$

2) Calculons $P(M)$ où $M$ est l'évenement : "Le jeton pioché est mauve".

$(S_1, \ldots, S_n)$ forment un sce.

Donc $P(M) = \sum_{k=1}^{n} P(S_k) P_{S_k}(M)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha k \frac{n+1-k}{n+1}$$

$$= \frac{\alpha}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} k(n+1) - \sum_{k=1}^{n} k^2\right) \quad \text{(Linearité de } \Sigma\text{)}$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} k - \frac{\alpha}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{n+1} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= 1 - \frac{2n+1}{3(n+1)} = \frac{2}{3} - \frac{n}{3(n+1)}$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$

Par la formule de Bayes : $P(S_k | M) = \dfrac{P(M|S_k) P(S_k)}{P(M)}$

$$= \frac{\alpha k (n+1-k)}{n+1} \times \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{n}{3(n+1)}}$$

$$= \frac{3\alpha k(n+1-k)}{2(n+1) - n} = \frac{3\alpha k(n+1-k)}{n+2}$$

$$\boxed{= \frac{6 k(n+1-k)}{n(n+1)(n+2)}}$$

Maximilien T. Colle de la Semaine

> On lance $n$ fois une pièce équilibrée
> Quelle est la probabilité d'avoir strictement plus de pile que de face ?

On répète $n$ fois de manière indépendante une expérience de Bernoulli de succès " avoir face ".
$X$ compte le nombre de faces.
Ainsi $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

Montrons d'abord que la probabilité d'avoir strictement plus de pile est égale à la probabilité d'avoir strictement plus de face.

Supposons $n$ pair (le cas $n$ impair est analogue)

$$P\left(X \leq \frac{n}{2} - 1\right) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2}^{n}$$

$$P\left(X \geq \frac{n}{2} + 1\right) = \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} P(X=k) = \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2}^{n}$$

$$= \sum_{l=\frac{n}{2}-1}^{0} \binom{n}{n-l} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \qquad l \leftarrow n-k$$

$$= \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad \text{(Symétrie des coefficient binomiaux)}$$

Par la suite on note les évènements

A : " On obtient strictement plus de faces que de piles "

B : " On obtient strictement plus de piles que de faces "

C : "On obtient le même nombre de piles et de faces"

$(A, B, C)$ forment un sce.

Donc $A \sqcup B \sqcup C = \Omega$

$$\Rightarrow \underbrace{P(A)}_{P(B)} + P(B) + P(C) = 1$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1 - P(C)}{2}$$

Si $n$ est impair $P(C) = 0$ et donc $P(B) = \frac{1}{2}$

Si $n$ est pair $P(C) = P(X = \frac{n}{2}) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} - \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Youssef.B

Colle de la semaine 26

**Exercice** : Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question dont $m$ réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse (probabilité $p \in ]0,1[$), soit il choisit au hasard. Sachant que l'étudiant a répondu correctement, quelle est la probabilité qu'il ait connu la réponse ?

Solution :

On pose les évenements suivants :

$C$ = " l'étudiant connait la bonne réponse "

$R$ = " l'étudiant a repondu correctement "

On cherche à calculer $P_R(C)$

$(C, \overline{C})$ est un système complet d'evenements, donc

D'après la formule de Bayes ;

$$P_R(C) = \frac{P_C(R)P(C)}{P_C(R)P(C) + P_{\overline{C}}(R)P(\overline{C})}$$

D'après l'énoncé, on a :

$P(C) = p$

$P_C(R) = 1$

$P_{\overline{C}}(R) = \frac{1}{m}$

Alors

$$P_R(C) = \frac{p}{p + \frac{1}{m}(1-p)} = \frac{pm}{pm + (1-p)}$$

Mehdi B.

**Exercice 9** — On considère trois points distincts du plan nommés $A$, $B$ et $C$. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n=0$, on suppose que le pion se trouve sur le point $A$. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

— le mouvement du pion de l'étape $n$ à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape $n$;

— pour passer de l'étape $n$ à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n$ l'évènement "le pion se trouve en $A$ à l'étape $n$", $B_n$ l'évènement "le pion se trouve en $B$ à l'étape $n$" et $C_n$ l'évènement "le pion se trouve en $C$ à l'étape $n$". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n),\ b_n = P(B_n),\ c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres $a_n$, $b_n$ et $c_n$ pour $n = 0, 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$. Faire de même pour $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$.
3. Donner une matrice $M$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M^n = \frac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$. En déduire une expression de $a_n$, $b_n$ et $c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer les limites respectives des suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$. Interpréter le résultat.

<u>Solution</u> 1/ <u>$n=0$</u> : $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$

<u>$n=1$</u> : $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{4}$, $c_1 = \frac{1}{4}$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A_n, B_n, C_n)$ :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} | A_n) \cdot P(A_n) + P(A_{n+1} | B_n) \cdot P(B_n) + P(A_{n+1} | C_n) \cdot P(C_n)$$

Donc :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n$$

En raisonnant de manière analogue pour $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$, nous obtenons :

$$(S)\ \boxed{\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{1}{2} c_n \end{cases}}$$

3/ La traduction matricielle du système (S) donne :

$$V_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{:=M} V_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

4/ • On remarque grâce à 3/ : $V_1 = MV_0$
$V_2 = MV_1 = M^2 V_0$

On montre par récurrence le prédicat valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\mathcal{P}(n)$ : " $V_n = M^n V_0$ "

L'initialisation est claire, on fixe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$V_{n+1} = MV_n \overset{HR}{=} M M^n V_0 = M^{n+1} V_0$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie. L'axiome de récurrence livre le résultat.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule alors

$$V_n = M^n \underbrace{V_0}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n} \\ \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} \\ \frac{4n - 1}{3 \cdot 4n} \end{pmatrix}$$

Mehdi B.

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \begin{array}{l} a_n = \dfrac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n} \\[2ex] b_n = \dfrac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} \\[2ex] c_n = \dfrac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} \end{array} \right.}$$

5/ $a_n = \dfrac{4^n\left(1 + \frac{2}{4^n}\right)}{3 \cdot 4^n} \longrightarrow \dfrac{1}{3}$

$b_n = c_n = \dfrac{4^n\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{3 \cdot 4^n} \longrightarrow \dfrac{1}{3}$

Ainsi, pour un nombre d'étapes très grand, les événements $A_n$, $B_n$ et $C_n$ sont équiprobables

Antoine B. colle de la semaine 26.

Une urne contient initialement une boule blanche et une noire. On répète n fois l'expérience suivante :

On tire une boule de l'urne, on la remet et on rajoute une boule de même couleur.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

1. Quelle est le nombre de boules dans l'urne après le k-ième tirage.
2. On note $N_k$ le nombre de boule blanches dans l'urne après la k-ième expérience. Montrer que $N_k$ suit une loi uniforme sur $\{1, k+1\}$ $\{1, \dots, k+1\}$

1. Après chaque tirage, on rajoute une boule, donc après k tirage ~~il~~ y a $k+2$ boules dans l'urne.

2. On introduits les événements : $B_k$ : "au k-ième tirage, la boule tirée est blanche"

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^* P(n)$ :
"$\forall k \in [\![1, n+1]\!], P(N_n = k) = \frac{1}{n+1}$"

Initialisation : $n=1$ :
$$P(N_1 = 1) = P(N_1 = 2) = \frac{1}{2}$$ (boules indiscernables au toucher).

$P(1)$ V

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tq $P(n)$ vrai ie : $\forall k \in [\![1, n+1]\!], P(N_n = k) = \frac{1}{n+1}$.
$(N_n = k)$ où $k \in [\![1, n+1]\!]$ forment un sce.

soit $j \in \{1, \dots, n+2\}$
$$P(N_{n+1} = j) = \sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k) \cdot P(N_{n+1} = j \mid N_n = k)$$

De cette somme, on enlève tous les termes nuls.

donc $P(N_{n+1}=j) = \underbrace{P(N_n=j-1)}_{(HR)\ =\frac{1}{n+1}} \, \overbrace{P(N_{n+1}=j \mid N_n=j-1)}^{=\frac{j-1}{n+2}}$ ← on tire une blanche

$\quad + \underbrace{P(N_n=j)}_{(HR)\ =\frac{1}{n+1}} \cdot P(N_{n+1}=j \mid N_n=j)$ ← on tire une noire au $n+1$ ième tirage.

$$= \frac{1}{n+1}\left( P(N_{n+1}=j \mid N_n=j-1) + \underbrace{P(N_{n+1}=j \mid N_n=j)}_{=\frac{n+2-j}{n+2}} \right)$$

← nb de boules noires

↖ nb de boules au totale

$$= \frac{1}{n+1} \times \left( \frac{n+2-j+j-1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

ne dépend pas de $j$
et $n+2 \times \frac{1}{n+2} = 1$ ✓

Ainsi $N_{n+1} \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n+2 \rrbracket)$

$P(n+1)$ ✓

Louis D. Semaine de colle n°26

**3.** On doit placer $2n$ personnes ($n$ hommes et $n$ femmes), constituées en $n$ couples, autour d'une table en U.
Combien existe-t-il de dispositions possibles :

a. au total ?
b. en respectant l'alternance des sexes ?
c. en ne séparant pas les couples ?
d. en réalisant b. et c. ?

a) $(2n)!$ car on considère le nombre de bijections de $[\![1, 2n]\!]$ dans $[\![1, 2n]\!]$

b) $2 \times n! \times n!$

choix du 1er sexe

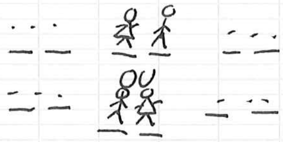
on place les $n$ personnes du 1er sexe aux $n$ places possibles

on place les $n$ personnes de l'autre sexe aux $n$ places restantes

c) $n! \times 2^n$

on place les $n$ couples aux $n$ places "doubles" possibles

les membres de chaque couple peuvent échanger de place




d) $2 \times n!$

choix du sexe de la 1ère personne

choix des $n$ positions des $n$ couples

Bordes
Louis

Colle de la semaine 26

On effectue une infinité de lancers d'une pièce truquée. On se place dans un espace probabilisé où p est la proba d'avoir pile. On note A l'événement : "avoir au moins une fois pile".
Déterminer $P(A)$

$n \in \mathbb{N}$
On considère $\bar{A}$ : "on obtient que des face en n lancers"
et $B_n$ : " on obtient face au $n^e$ lancer"

$$P(\bar{A}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (1-p) = (1-p)^n$$

$B_1, \dots, B_n$ sont indépendants

Comme $(A, \bar{A})$ forme un système complet d'évts :
$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1-p)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Piero T. Colle de la semaine 2

**Exercice 1**

On considère une urne contenant $N_1$ boules blanches et $N_2$ boules noires indiscernables au toucher. On pose $N = N_1 + N_2$. On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne et l'on replace dedans deux boules de la couleur obtenue. À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N+1$ boules et l'on note $X_1$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N+2$ boules et l'on note $X_2$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.

Plus généralement, pour tout entier naturel $k$ non nul, on note $X_k$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la $k$-ième expérience.

Pour tout $k$ non nul, on note $B_k$ l'événement « la boule tirée lors de la $k$-ième expérience est blanche ».

1. Déterminer la probabilité des évènements $B_1$ et $B_2$.
   *Indication : pour calculer $\mathbb{P}(B_2)$, on remarquera que $(B_1, \overline{B_1})$ est un système complet d'événements.*
2. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
   (a) Déterminer $X_{n-1}(\Omega)$ puis, en utilisant le système complet d'événements associé à $X_{n-1}$, montrer que
   $$\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k\mathbb{P}(X_{n-1}=k) = (N+n-1)\mathbb{P}(B_n).$$
   (b) Soit $k \in [\![N_1, N_1+n-1]\!]$.
   Donner, sans justification, la probabilité de $B_{n+1}$ sachant $B_n \cap (X_{n-1}=k)$.
   Donner, aussi sans justification, la probabilité de $B_{n+1}$ sachant $\overline{B_n} \cap (X_{n-1}=k)$.
   (c) [redacted], déduire des questions précédentes que $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n)$.

Solution :

1. $P(B_1) = \dfrac{N_1}{N_1+N_2}$

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|\overline{B_1})P(\overline{B_1})$$
$$= \frac{N_1+1}{N_1+N_2+1} \times \frac{N_1}{N_1+N_2} + \frac{N_1}{N_1+N_2+1} \times \frac{N_2}{N_1+N_2}$$
$$= \frac{N_1}{N_1+N_2}$$

2a. $X_{n-1} = [\![N_1, N_1+n-1]\!]$.

$$P(B_n) = \sum_{x\in X_{n-1}(\Omega)} P(B_n|(X_{n-1}=x))P(X_{n-1}=x) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N+n-1} P(X_{n-1}=k)$$

2b. $P(B_{n+1} \mid B_n \cap (X_{n-1} = k)) = \dfrac{k+1}{N+n}$

$P(B_{n+1} \mid \overline{B_n} \cap (X_{n-1} = k)) = \dfrac{k}{N+n}$

2.c. $P(B_{n+1}) = \sum_{x \in X_{n-1}(\Omega)} P(B_{n+1} \mid B_n \cap (X_{n-1} = x)) P(B_n \cap (X_{n-1} = x)) + P(B_{n+1} \mid \overline{B_n} \cap (X_{n-1} = x)) P(\overline{B_n} \cap (X_{n-1}$

$= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} P(B_{n+1} \mid B_n \cap (X_{n-1} = k)) P(B_n \mid (X_{n-1} = k)) P(X_{n-1} = k) + P(B_{n+1} \mid \overline{B_n} \cap (X_{n-1} = k)) P(\overline{B_n} \mid (X_{n-1} = k)) P(X_{n-1} = k)$

$= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \left( \dfrac{k+1}{N+n} \times \dfrac{k}{N+n-1} + \dfrac{k}{N+n} \times \dfrac{N+n-1-k}{N+n-1} \right) P(X_{n-1} = k)$

$= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \dfrac{k}{N+n-1} P(X_{n-1} = k)$

$= P(B_n)$

On en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $P(B_n) = P(B_0) = \dfrac{N_1}{N_1+N_2}$.

Alexandre M.

# Rapport de colle semaine 26 (feuille 1/2)

Enoncé :

Deux pièces A et B sont reliées entre elles par une porte ouverte. Seule la pièce B possède une issue vers l'extérieur. Une guêpe initialement dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. Son trajet obéit aux règles suivantes :

- Lorsqu'elle est en A au temps $t=n$, alors au temps $t=n+1$, elle reste en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$, ou elle passe en B avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$

- Lorsqu'elle est en B au temps $t=n$, alors au temps $t=n+1$, elle retourne en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$, ou elle reste en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$, ou elle sort à l'air libre avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$

Au temps $t=0$, la guêpe est en A. Lorsqu'elle est sortie, elle ne revient plus.

On note $A_n$ (resp. $B_n$, resp. $S_n$) les évènements

$A_n$ " à l'instant $t=n$, elle est en A "

$B_n$ " à l'instant $t=n$, elle est en B "

$S_n$ : " à l'instant $t=n$, elle sort (ou est dehors) "

et $a_n, b_n, c_n$ leurs probabilités respectives.

1. Calculer $a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1$.

2. (a) Exprimer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction $a_n$ et $b_n$.

   (b) Vérifier que la suite $u$ définie par $\forall n \geq 0$, $u_n = a_n - \frac{1}{2} b_n$ est stationnaire.

   (c) Montrer que la suite $v$ définie par $\forall n \geq 0$, $v_n = \frac{4}{10} a_n + \frac{3}{10} b_n$ est géométrique de raison $\frac{5}{6}$.
   En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.

d) Donner l'expression de $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$

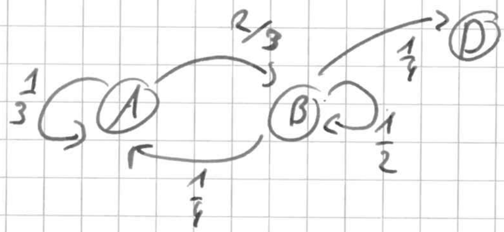
3) Combien vaut $\forall n \geq 0$ $a_n + b_n + s_n$ ?
En déduire $s_n$ en fonction de $n$.

4) Calculer $\lim_{n \to +\infty} s_n$. Interprétation.

Résolution :

D : dehors

shéma :




1) $a_0 = 1$ ; $b_0 = 0$ ; $s_0 = 0$ ; $a_1 = \frac{1}{3}$ ; $b_1 = \frac{2}{3}$ ; $s_1 = 0$
(interprétation immédiate de l'énoncé)

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$
$(A_n, B_n, S_n)$ forme un système complet d'événement.
D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap S_n)$$

donc $$a_{n+1} = \underbrace{P_{A_n}(A_{n+1})}_{\frac{1}{3}} a_n + \underbrace{P_{B_n}(A_{n+1})}_{\frac{1}{4}} b_n + \underbrace{P_{S_n}(A_{n+1})}_{0} s_n$$

donc $$\boxed{a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{4} b_n}$$

De manière analogue, on a

$$\boxed{b_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$U_n = a_n - \frac{1}{2} b_n$

donc $$\boxed{U_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{4} b_n - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n\right) = 0}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n = 0$, elle est donc stationnaire.

Alexandre M. Rapport de colle semaine 26 suite (feuille 2/2)

c) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{4}{10} a_n + \frac{3}{10} b_n$$

donc $v_{n+1} = \frac{4}{10}\left(\frac{1}{3} a_n + \frac{1}{4} b_n\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n\right)$

$$= \frac{5}{6}\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{10}\left(\frac{1}{3} a_n + \frac{1}{4} b_n\right) + \frac{6}{5}\cdot\frac{3}{10}\left(\frac{2}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n\right)\right)$$

$$= \frac{5}{6}\left(\frac{4}{10} a_n + \frac{3}{10} b_n\right)$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{5}{6} v_n}$$

Or $v_0 = \frac{4}{10} a_0 + \frac{3}{10} b_0 = \frac{4}{10}$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n v_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{4}{10}}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{cases} \frac{4}{10} a_n + \frac{3}{10} b_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{4}{10} \\ a_n - \frac{1}{2} b_n = 0 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{2} b_n + \frac{3}{10} b_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{4}{10} \\ a_n = \frac{1}{2} b_n \end{cases}$

donc $\boxed{\begin{cases} b_n = \frac{8}{10}\left(\frac{5}{6}\right)^n \\ a_n = \frac{4}{10}\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{cases}}$

3) Si $n = 0$ :

$a_0 + b_0 + s_0 = 1 + 0 + 0 = 1$ [cf 91)]

Si $n \in \mathbb{N}^*$ :

On sait $\Omega_n = A_n \sqcup B_n \sqcup S_n$ (s.c)

donc $P(\Omega_n) = P(A_n \sqcup B_n \sqcup S_n)$

donc $1 = a_n + b_n + s_n$

(d'après les deux axiomes d'une probabilité).

Donc $s_n = 1 - a_n - b_n$

$= 1 - \left(\frac{4}{10}\left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{8}{10}\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$

$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{6}{5}$

Ainsi $\boxed{\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* : s_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ \text{et } s_0 = 0 \end{cases}}$

4) $-1 < \frac{5}{6} < 1$

donc $\left(\frac{5}{6}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Par opérations sur les limites on a :

$$\boxed{s_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1}$$

Cela signifie que la guêpe finira par sortir dehors si on attend assez longtemps.

Anaé D.

# Rapport de colle S26

Soient $n$ un entier strictement positif. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant chacun une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Donner la loi de $X - Y$.

## Solution :

On note $Z$ la loi $X - Y$

Soit $(\Omega, P)$ un espace de probabilité fini

$Z(\Omega) = [\![1-n\,;\, n-1]\!]$

$((X = i))_{i \in [\![0;n]\!]}$ système complet d'événement

Soit $k \in [\![1-n\,;\, n-1]\!]$

D'après la formule des probabilités totales

$$P(Z = k) = \sum_{i=1}^{n} P(Z = k \mid X = i)\, P(X = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(Y = i - k)\, P(X = i)$$

### Si $k \geqslant 0$

$i - k \geqslant 1 \iff i \geqslant k+1$

$$P(Z = k) = \sum_{i=1}^{k+1} \underbrace{P(Y = i - k) P(X = i)}_{= 0} + \sum_{i=k+2}^{n} \underbrace{P(Y = i-k)}_{\frac{1}{n}}\, \underbrace{P(X = i)}_{\frac{1}{n}}$$

(car $X, Y$ probabilité uniforme sur $[\![1,n]\!]$)

$$= \sum_{i=k+2}^{n} \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{= \frac{(n-k-1)}{n^2}}$$

### Si $k \leqslant 0$

$n \geqslant i - k \iff n + k \geqslant i$

$$P(Z = k) = \sum_{i=1}^{n+k} \underbrace{P(Y = i-k)}_{\frac{1}{n}}\underbrace{P(X = i)}_{\frac{1}{n}} + \underbrace{\sum_{i=n+k+1}^{n} P(Y = i-k)\, P(X = i)}_{0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+k} \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{= \frac{(n-k)}{n^2}}$$

Lina. A

Colle de la semaine 26.

Montrer que si n événements sont indépendants dans leur ensemble. Alors ils sont deux à deux indépendants. Rappeler un contre exemple de la réciproque.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$A_1, \dots, A_n$ des évènements indépendants.

Alors

$$\forall J \subset [\![1, n]\!] \quad P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

En prenant un ensemble à deux éléments on obtient l'indépendance deux à deux des évènements.

La réciproque de cette assertion est fausse.
En effet, si on considère l'expérience consistant à lancer deux fois un dé équilibré à 6 faces et en posant.

A = " le premier chiffre est pair "
B = " le dernier chiffre est impair "
C = " la somme des chiffres est pair ".
$\Omega = [\![1, 6]\!]^2$, on muni $\Omega$ d'une probabilité uniforme

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

De même pour B on obtient $P(B) = \frac{1}{2}$.
Et pour C on obtient $P(C) = \frac{1}{2}$
car $(C = \{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\} \sqcup \{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\})$

Montrons que les évènements sont deux à deux indépendants :

→ A et B indépendants ⇒ $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

$A \cap B = \{2,4,6\} \times \{1,3,5\}$.

$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$.

→ A et C indépendants.

$A \cap C = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}$.

$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$.

→ De même pour B et C.

Mais A, B, C ne sont pas indépendants dans leur ensemble.

$A \cap B \cap C = \emptyset$.

$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{8}$.

Jules R. 			Colle de la semaine 26

| |
|---|
| Énoncé : On lance successivement 3 dés équilibrés. Quelle est la probabilité... <br> a) d'obtenir exactement un 6 ? <br> b) d'obtenir au moins un 6 ? <br> c) d'obtenir au moins deux chiffres égaux ? |

Solution :

a) On pose l'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$
On munit $\Omega$ d'une probabilité $P$ et d'une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow [\![0, 3]\!]$ qui compte le nombre de 6 obtenus.
$X \sim \mathcal{B}(3, \frac{1}{6})$

On peut utiliser la loi binomiale :
$\forall k \in [\![0, 3]\!] \quad P(X = k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$
Donc

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$= \frac{25}{72}$$

b)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \quad \text{(probabilité de l'évènement contraire)}$$

$$= \frac{91}{216}$$

c) Par symétrie des rôles joués par les chiffres du dé, on obtient :

$$6P(X \geq 2) = 6\,(P(X \geq 1) - P(X = 1))$$

$$= 6 \times \frac{2}{27} = \frac{4}{9}$$

Martin K-2.                                                  Colle de la semaine 26

**EXERCICE 14** — Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On repète $n$ fois l'expérience suivante : on tire une boule de l'urne, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

1. Quel est le nombre de boules dans l'urne après la $k$-ième expérience?
2. On note $N_k$ le nombre de boules blanches dans l'urne après la $k$-ième expérience. Montrer que $N_k$ suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, k+1\}$.

Solution :

1) Après $k$ réalisations, nous avons tiré, et donc ajouté, $k$ boules. Il y a donc $k+2$ boules dans l'urne à la $k$-ième répétition.

2) Si $k \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$H(k) : N_k \sim \mathcal{U}([\![1, k+1]\!]).$$

On montre que $H(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ par récurrence simple finie.

Initialisation ($k=1$).

Après une réalisation il y a soit 1, soit 2 boules blanches dans l'urne.

Puisque nous supposons les boules indiscernables au touches, il vient que $P(N_1 = 1)$, soit, la probabilité d'avoir tiré une boule noire à la première réalisation (iii). $q = k+2$.

On a, de même,

$$P(N_{k+1} = k+2) = \sum_{i=1}^{k+1} \overbrace{P(N_{k+1}=k+2 \mid N_k=i)}^{0 \text{ si } i<k+1} \cdot P(N_k = i)$$

$$= \overbrace{P(N_{k+1} = k+2 \mid N_k = k+1)}^{\frac{k+1}{k+2}} \cdot \underbrace{P(N_k = k+1)}_{\frac{1}{k+1}}$$

$$= \frac{1}{k+2}.$$

Donc, $N_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, k+2]\!])$, et $H(k+1)$ est vraie.

On conclut que,

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad N_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, k+1]\!]).$$

Célia A.                Semaine n° 26, rapport de colle.

**énoncé :** On classe des gérants de portefeuille en deux catégories : les bien informés et les autres. Lorsqu'un gérant bien informé conseille son client, la probabilité que le conseil soit bon est de 0,8. Si le gérant est mal informé, la probabilité que le conseil soit mauvais est de 0,6.
Pour un gérant fixé, les évènements suivants lesquels un conseil soit bon ou non sont mutuellement indépendants.
On sait que si l'on choisit au hasard un gérant de portefeuille, il y a une chance sur dix qu'il soit bien informé.
Un client choisit au hasard un gérant de portefeuille qui lui donne un conseil.

1. Sachant que le conseil était bon, quelle est la probabilité que le gérant soit mal informé ?

2. Le gérant donne dix conseils à un client et ils étaient tous bons. Il donne un nouveau conseil. Quelle est la probabilité qu'il soit bon ?

**solution :** Posons les évènements
- "B" le gérant est bien informé  $P(B) = 0,1$.
- "C" le conseil est bon.

1. $(B, \bar{B})$ est un système complet d'évènements
Selon la formule de Bayes,

$$P(\bar{B} \mid C) = \frac{P(C \mid \bar{B}) \cdot P(\bar{B})}{P(C \mid \bar{B}) \cdot P(\bar{B}) + P(C \mid B) \cdot P(B)} = \frac{0,4 \cdot 0,9}{0,4 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,1}$$

D'où $\boxed{P(\overline{B} \mid C) = \frac{9}{11}}$

2. Posons l'évènement $C_{10}$ = " le conseil est bon dix fois".

$(B, \overline{B})$ est un système complet d'évènements. De plus, pour un gérant fixé, les évènements suivants lesquels un conseil est bon ou non sont mutuellement indépendants.

Ainsi, selon la formule des probabilités totales,

$$
\begin{aligned}
P(C_{10}) &= P(C_{10} \mid B) \cdot P(B) + P(C_{10} \mid \overline{B}) \cdot P(\overline{B}) \\
&= P(C \mid B)^{10} \cdot P(B) + P(C \mid \overline{B})^{10} \cdot P(\overline{B}) \\
&= (0{,}8)^{10} \cdot 0{,}1 + (0{,}4)^{10} \cdot 0{,}9
\end{aligned}
$$

indépendance.

De plus,

$$
\begin{aligned}
P(C \mid C_{10}) &= \frac{P(C \cap C_{10})}{P(C_{10})} \\
&= \frac{(0{,}8)^{11} \cdot 0{,}1 + (0{,}4)^{11} \cdot 0{,}9}{(0{,}8)^{10} \cdot 0{,}1 + (0{,}4)^{10} \cdot 0{,}9}
\end{aligned}
$$

même raisonnement avec $C \cap C_{10} = C_{11}$.

Donc $\boxed{P(C \mid C_{10}) = \frac{(0{,}8)^{11} \cdot 0{,}1 + (0{,}4)^{11} \cdot 0{,}9}{(0{,}8)^{10} \cdot 0{,}1 + (0{,}4)^{10} \cdot 0{,}9}}$

Paul C.

Semaine de colle

$\boxed{\text{Dénombrer les triplets } (x,y,z)\in [\![0,5]\!]^3 \text{ tels que } xyz=0}$

Solution:

$$\underbrace{\{(x,y,z)\in[\![0,5]\!]^3\}}_{E} = \underbrace{\{(x,y,z)\in[\![0,5]\!]^3 : xyz=0\}}_{A} \sqcup \underbrace{\{(x,y,z)\in[\![0,5]\!]^3 : xyz\neq 0\}}_{B}$$

d'où

$|A| = |E| - |B|$

$|E| = 6^3$

$B = \{(x,y,z)\in[\![1,5]\!]^3\}$ : si $x,y$ ou $z=0$, alors $xyz=0$ et $(x,y,z)\notin B$
donc $B$ est l'ensemble des triplets de $[\![1,5]\!]$

d'où $|B| = 5^3$

ainsi $|A| = 6^3 - 5^3$
$= 91$

Il y a $91$ triplets $(x,y,z)\in[\![0,5]\!]^3$ tels que $xyz=0$

Robin G.          Colle de la semaine 26

**Exercice 1.** On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec probabilité $\frac{1}{8}$, 1 ou 2 descendants avec la probabilité $\frac{3}{8}$ et aucun descendant avec la probabilité $\frac{1}{8}$, indépendamment de ses congénères.

A l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec probabilité $x_1 = \frac{1}{8}$.

1. Déterminer la probabilité $x_2$ pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la 2ième génération.
2. On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ $x_n$ la probabilité qu'à l'issue de la $n$-ième génération, l'espèce ait totalement disparu. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $x_1 = \frac{1}{8}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n^3 + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{3}{8}x_n + \frac{1}{8}$.

Solution : 1) $\forall i \in \mathbb{N}$, $X_i$ compte le nombre d'individus à la $i$-ème génération.

$\forall i \in \mathbb{N}$, $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

- $X_0(\Omega) = \{1\}$.
- $X_1(\Omega) = [\![0,3]\!]$
- $P(X_1=0) = x_1 = \frac{1}{8}$, $P(X_1=1) = P(X_1=2) = \frac{3}{8}$ et $P(X_1=3) = \frac{1}{8}$.

On cherche $x_2 = P(X_2=0)$.

- $((X_1=i))_{0\leq i\leq 3}$ est un système complet d'événements.

Formule des probabilités totales :

$$P(X_2=0) = \sum_{i=0}^{3} P(X_2=0 \mid X_1=i) \cdot P(X_1=i)$$

- sachant $(X_1=0)$, l'espèce s'est éteinte, donc $P(X_2=0|X_1=0) = 1$
- sachant $(X_1=1)$, il n'y a qu'1 seul individu donc la probabilité qu'il n'ait aucun descendant à la 2e génération

1/2

c) $P(X_2=0|X_1=1) = \frac{1}{8}$.

• sachant $(X_1=2)$, les descendances étant indépendants (énoncé) la probabilité que les 2 n'aient pas de descendance est de $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$.

• De même pour $(X_1=3)$.

Ainsi, $P(X_2=0) = 1 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{3}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \frac{3}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^3 \times \frac{1}{8}$

$$\underline{P(X_2=0) = \frac{729}{4096}}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on cherche $x_{n+1} = P(X_{n+1}=0)$.

Comme en Q1), $P(X_{n+1}=0) = \sum_{i=0}^{3} P(X_{n+1}=0|X_1=i)\, P(X_1=i)$.

• Soit $i \in [\![0,3]\!]$, calculons $P(X_{n+1}=0|X_1=i)$.

Sachant $(X_1=i)$, la probabilité que l'espèce ~~s'éteigne~~ ait disparu à la $n+1$-ème génération, est celle que la descendance de chacun des $i$ individus ait disparu après $n$ générations (les descendances sont indépendantes).

Cette probabilité pour chaque individu est

$P(X_n=0|X_0=1) = x_n$

Et donc, $P(X_{n+1}=0|X_1=i) = x_n^i$.

$$x_{n+1} = P(X_{n+1}=0) = x_n^0 \times \frac{1}{8} + x_n^1 \times \frac{3}{8} + x_n^2 \times \frac{3}{8} + x_n^3 \times \frac{1}{8}$$

Donc :
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{8} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ x_{n+1} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x_n + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{1}{8}x_n^3 \end{cases}$$

2/2

Nicolas.H

Colle de la semaine 26.

Enoncé

**Exercice 1.** On voudrait connaître le nombre $n$ de baleines à bosse sur Terre. La première année, on cherche 100 baleines à bosse, on les marque de manière à pouvoir les reconnaître plus tard, puis on les relâche.

L'année suivante, on sélectionne successivement 100 baleines à bosse distinctes. On compte celles qui portent la marque de l'année précédente.

Pour tout $i \in [\![1, 100]\!]$, on note $X_i$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la $i$-ème baleine examinée est marquée et 0 sinon.

On note $Z = \sum_{i=1}^{100} X_i$.

Enfin, on appelle $E$ l'ensemble des baleines, $B_1, \dots, B_{100}$ les baleines marquées et $B_{101}, \dots, B_n$ celles qui ne le sont pas.

1. Par quel objet mathématique code-t-on le résultat de l'expérience ? Décrire l'univers $\Omega_n$ et la probabilité $\mathbb{P}_n$ associée à cette expérience. (les indices $n$ sont-là pour rappeler que tout cela dépend de la population totale de baleines).
2. Soit $i \in [\![1, 100]\!]$. Calculer la probabilité que la $i$-ème baleine examinée soit marquée. Quelle est la loi de $X_1$ ?
3. Calculer $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$. Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?
4. Que représente $Z$ ? Donner $Z(\Omega_n)$.
5. Pour tout $k \in [\![1, 100]\!]$, calculer $P_n(Z = k)$.

Solution:

1) On code cette expérience par un tirage sans remise : un uplet de 100 baleines. Soit $n \geq 100$

$\Omega_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \{B_1, \dots, B_n\}^{100} \}$

$P_n$ suit la loi de probabilité uniforme sur $\Omega_n$

2) Soit $i \in [\![1, 100]\!]$ $\quad P(X_i = 1) = \dfrac{100}{n}$

$X_1(\Omega_n) = \{0, 1\}$ $X_1$ suit la loi binomiale de succès "la 1ère baleine est marquée".

$X_1 \sim B(p)$ où $p = \dfrac{100}{n}$

3) $P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \dfrac{99}{n-1}$.

Supposons $X_1$ et $X_2$ indépendants

$P(X_2=1, X_1=1) \underset{\text{indépendants}}{=} P(X_1=1)\cdot P(X_2=1)$

Alors, $P(X_2=1 | X_1=1) = P(X_2=1) \underset{Q2}{=} \frac{100}{n}$

donc $X_1$ et $X_2$ sont indépendants si et seulement si $n=100$

On peut supposer $n>100$ d'après les données de l'exercice. Donc $X_1$ et $X_2$ ne sont pas indépendants

4) $Z$ représente le nombre de baleine marquée, qui sont capturées la deuxième année.

$Z(\Omega_n) = \begin{cases} [\![100-k, 100]\!] & \text{si } n<200, \text{ où } k=200-n \\ [\![0,100]\!] & \text{si } n \geq 200 \end{cases}$

Si il y a moins de 200 baleines, au moins une marquée sera capturée, car il y en a 100 de marquées et que pour obtenir $(Z=0)$, il faudrait capturer 100 baleines non marquées.

5) Soit $n \geq 200$

$|\Omega_n| = \binom{n}{100}$.

Soit $k \in [\![0,100]\!]$

$|(Z=k)| = \binom{100}{k} \times \binom{n-100}{100-k}$

On a choisi $k$ baleines parmi les 100 marquées

parmi celles non marquées, on en a choisi $n-k$

$P(Z=k) = \frac{|(Z=k)|}{|\Omega|} = \frac{(100!)^2 \, ((n-100)!)^2}{k! \, ((100-k)!)^2 \, (n-200+k)!}$