Leçon. 5 Enoncé Semaine 24

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^1 f = 0$. Montrer que f s'annulle au moins une fois. On suppose de plus que $\int_0^1 t f(t)\,dt = 0$. Montrer que f s'annulle au moins deux fois

Solution

Supposons que f est non nul.
Supposons alors qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) > 0$
Si f est positive sur $[0,1]$, alors, par contraposé de la positivité $\int_0^1 f(x_0)\,dt > 0$ E.
Donc $\exists x_1 \in [0,1]$ telle que $f(x_1) < 0$.
f est continue sur $[0,1]$, d'après le TVI, il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$

De même, si $\exists x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) < 0$, alors f s'annule au moins une fois

Supposons de plus que $\int_0^1 t f(t)\,dt = 0$
$\exists \alpha \in [0,1] : f(\alpha) = 0$.
et : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad a\int_0^1 t f(t)\,dt + b\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.
donc $\int_0^1 f(t)(at+b)\,dt = 0$.
Supposons que f ne s'annule qu'une fois.
Supposons que : $\forall x \in [0,\alpha[\ f(x) > 0$ et
$\forall x \in]\alpha,1]\ f(x) < 0$
Avec $a = -1$ et $b = \alpha$.
$\int_0^1 f(t)\,(-t+\alpha)\,dt = 0$

$g \left\{ \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \to f(x)(-x+1) \end{array} \right.$

est annule en α et

$\forall x \in [0,1] \setminus \alpha \quad f(x) > 0$

et $\int_0^1 g(t)\,dt = 0$ (contredit la positivité).

De même, f ne peut pas être négative seul positive.

Donc f s'annule au moins 2 fois

Nicolas.H

Colle de la semaine 24

Énoncé

Calculer une primitive de la fonction
$f : t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ sur un intervalle que l'on précisera

Solution

f est définie $\Leftrightarrow \begin{cases} t\mapsto \ln(t) \text{ définie} \\ t\ln(t) \neq 0 \quad (x \mapsto \frac{1}{x} \text{ définie}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t \neq 0 \text{ et } t = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow t \in]0,1[\cup]1;+\infty[$

Soit $t \in]1;+\infty[= I$

f est $\mathcal{C}^0$ sur I car composée et produit de fonction $\mathcal{C}^0$ sur I.

D'après le théorème fondamentale de l'analyse, il existe une unique primitive de f nulle en $a \in I$ telle que $F \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_a^x \frac{1}{t\ln(t)}\,dt \end{array}\right.$

Soit $x \in I$

$$\int_a^x \frac{1}{t\ln(t)}\,dt = [\ln(|\ln(t)|)]_a^x = \ln(\ln(x))$$

donc $F \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(\ln(x)) \end{array}\right.$ est une primitive de f sur $]1;+\infty[$

Robin G. Colle de la semaine 24

> Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.
>
> Démontrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $\int_0^x t f(t)\,dt = 0$.

Solution : • f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$, par le théorème fondamental de l'analyse (TFA)

$F \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt \end{array} \right.$ existe et est une primitive de f sur $[0,1]$.

• $F(0) = 0$ et $F(1) = 0$ (énoncé)

• $t \mapsto t f(t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$ (opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^0$) et par le T.F.A. :

$G \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x t f(t)\,dt \end{array} \right.$ est bien définie.

Soit $x \in [0,1]$. $G(x) = [tF(t)]_0^x - \int_0^x F(t)\,dt$ (intégration par parties, $t \mapsto t$ et F $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$)

$= xF(x) - \int_0^x F(t)\,dt$

$G(x) = \int_0^x F(x) - F(t)\,dt$ (intégrale de fonction cste et linéarité de l'intégrale $\int_0^x$)

• __1^{er} cas :__ Supposons $F \geq 0$ sur $[0,1]$.

• F est dérivable donc $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$ segment, par le théorème des bornes atteintes (TBA) :

$\exists\, b \in [0,1],\ \forall t \in [0,1] \quad F(t) \leq F(b)$

• $G(b) = \int_0^b \underbrace{F(b) - F(t)}_{\geq 0} dt$, par positivité de l'intégrale $G(b) \geq 0$

• $G(1) = \int_0^1 F(1) - F(t)\, dt = -\int_0^1 \underbrace{F(t)}_{\geq 0} dt, \leq 0$

• $G(1) \leq 0 \leq G(b)$

si $b = 0$, $F(b) = 0$ et $F = 0$, donc $G = 0$.
si $b = 1$, de même $G = 0$.
Sinon si $0 < b < 1$, G est $\mathcal{C}^0$ sur $[b, 1]$ intervalle et par le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :
$\exists c \in [b, 1] \subset]0, 1]$, $G(c) = 0$

si $c = 1$, $G(c) = 0 = G(1) = -\int_0^1 F(t)\, dt$
Comme $F \geq 0$, par séparation on a $F = 0$ et $G = 0$.

Sinon, $c \in]0, 1[$.

Donc $\boxed{F \geq 0 \implies \left(G = 0 \text{ ou } (\exists c \in]0,1[\;\; G(c) = 0) \right)}$

2e cas : $F \leq 0$
Analogue au 1er cas, avec b tel que $\forall t \in [0,1]$ $F(b) \leq F(t)$ (TBA).

3e cas : F est de signe variable :
i.e. $\exists (x_1, x_2) \in [0,1]^2$ tq $F(x_1) < 0$ et $F(x_2) > 0$
Par le T.B.A., on a :
$\exists (x_m, x_M) \in [0,1]^2$ tq $\forall t \in [0,1]$ $F(x_m) \leq F(t) \leq F(x_M)$

En particulier : $F(x_m) \leq F(x_1) < 0$ et $F(x_M) \geq F(x_2) > 0$
et $F(1) = F(0) = 0$, donc x_m et x_M sont différents de 0 et 1

2/3

Rabin G. • $G(x_m) = \int_0^{x_m} \underbrace{F(x_m) - F(t)}_{\leq 0}\, dt \leq 0$

• $G(x_M) = \int_0^{x_M} \underbrace{F(x_M) - F(t)}_{\geq 0}\, dt \geq 0$

Ainsi $G(x_m) \leq 0 \leq G(x_M)$. Comme $F(x_m) < 0 < F(x_M)$, $x_m \neq x_M$.
Donc G est $\mathcal{C}^0$ sur $[x_m, x_M]$ ou $[x_M, x_m]$ intervalle inclus dans $]0,1[$.

Par le TVI,

$\boxed{\exists c \in]0,1[, \ G(c) = 0 .}$

3/3

Titouan

D

Rapport de colle semaine 24

Demontrer que l'application $f : x \mapsto \ln(x)$ n'est pas uniformement continue

Par l'absurde, supposons que f est uniformement continue

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall (x, y) \in D_f^2 \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |\ln(x) - \ln(y)| < \varepsilon$

$D_f = \mathbb{R}_+^*$

Soit $\varepsilon = 1$

Supposons $\exists \delta > 0$ tel que

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |\ln(x) - \ln(y)| < 1$

Pour $x = \delta > 0$

$y = \frac{\delta}{10} > 0$

$$|x - y| = \frac{9\delta}{10} < \delta \Rightarrow \left|\ln(\delta) - \ln\left(\frac{\delta}{10}\right)\right| < 1$$

$$\Rightarrow |\ln(\delta) - \ln(\delta) + \ln(10)| < 1 \quad \text{(propriétés de ln)}$$

$$\Rightarrow \ln(10) < 1$$

$$\text{exp croissante} \Rightarrow 10 < e \approx 2{,}7$$

Il y a contradiction.

$\boxed{\text{Donc } f : x \mapsto \ln(x) \text{ n'est pas uniformement continue}}$

Uta Bayer de Meyer

Rapport de cette semaine - 24

<u>Exercice 1 :</u> Soit $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{ch(t)}{t} dt$

1. Etudier la parité de f. On étudie désormais f sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Prolonger f par continuité en 0.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
4. Branches infinies et allure.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{ch(t)}{t} dt$$

$$= \int_x^{2x} - \frac{ch(-v)}{-v} dv$$

changement de variable
$t \to -v$
$dt \to -dv$

$$= \int_x^{2x} \frac{ch(v)}{v} dv$$

$$= f(x)$$

2.

$$0 \leq \int_x^{2x} \underbrace{\frac{ch(t)}{t}}_{>0} dt \leq \int_x^{2x} ch(t)\, dt$$

sur $[x, 2x]$ où $x > 0$

$$= \left[sh(t) \right]_x^{2x}$$

$$= \underbrace{sh(2x)}_{\xrightarrow[x \to 0^+]{} 0} - \underbrace{sh(x)}_{\xrightarrow[x \to 0^+]{} 0}$$

Par encadrement $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et $f(0) = 0$.

3. Soit $g : t \mapsto \frac{ch(t)}{t}$

Comme g est continue, il existe G une primitive de g par théorème fondamental d'analyse.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = G(2x) - G(x)$

Donc f est dérivable par somme de fonction dérivable.

Et, $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = 2g(2x) - g(x)$

$$= \frac{\overbrace{ch(2x) - ch(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{x}_{>0}} \quad \text{ch} \nearrow \text{sur } \mathbb{R}_+$$

> 0

De plus, f est croissant sur $\mathbb{R}_+$.

4. Soit $x \in [1, +\infty[$, Soit $t \in [x, 2x]$.

Soit $h : t \mapsto \frac{e^t}{2t}$ alors $\forall x \in [1, +\infty[\quad h'(x) = \frac{\overbrace{e^x}^{>0}\overbrace{(x-1)}^{\geq 0}}{\underbrace{2x^2}_{>0}}$

Ainsi h est croissant sur $[1, +\infty[$.

On a donc : $\frac{e^x}{2x} \leq \frac{e^t}{2t} \underset{\substack{\uparrow \\ e^{-t} > 0 \text{ sur } [x, 2x]}}{<} \frac{ch(t)}{t}$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \frac{e^x}{2x} dt = \underbrace{\frac{e^x}{2}}_{\substack{\downarrow x \to +\infty \\ +\infty}} \leq \int_x^{2x} \frac{ch(t)}{t} dt = f(x)$$

Par minoration, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Alexandre M.   Colle semaine 24   (feuille 1/2)

Exercice 1. On définit

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{array}.$$

1. Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. A l'aide d'un changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = F(1/x)$
3. Exprimer F à l'aide de

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ 0 & \mapsto & 1 \\ x \neq 0 & \mapsto & \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} \end{array}.$$

4. Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0

1) Soit $x > 1$

Soit $t \in [1; x]$

$\ln(t) \geqslant 0$ [$\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$]

et $1+t^2 > 0$ [$\cdot^2 \geqslant 0$]

donc $\dfrac{1}{1+t^2} > 0$

on a $\dfrac{\ln(t)}{1+t^2} \geqslant 0$; on remarque $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est C^0 sur $[1;x]$

par positivité de $\int_1^x$ on a

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt \geqslant 0$$

de plus $\dfrac{\ln(x)}{1+x^2} \neq 0$, d'après la propriété de séparation de l'intégrale des fonctions continues, on a

$$\boxed{\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt > 0}$$

Si $x = 1$ alors $\boxed{\int_1^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt = 0}$

Soit $x \in]0;1[$ Soit $t \in [x;1]$

avec une démarche analogue au premier cas on a

$$\frac{-\ln(t)}{1+t^2} \geqslant 0$$

donc $\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} \leqslant 0$ [positivité]

or $\frac{\ln x}{1+x^2} \neq 0$ donc [séparation]

$$\boxed{\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} < 0}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \overset{(*)}{=} \int_1^{\frac{1}{x}} -\frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \times -\frac{1}{u^2} du$

on pose (*) $u = \frac{1}{t}$

donc $t = \frac{1}{u}$ [changement de variable]

$dt = -\frac{1}{u^2} du$

donc

$$F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln\left(\left(\frac{1}{u}\right)^{-1}\right)}{1 \times \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} \times u^2} du = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = \boxed{F\left(\frac{1}{x}\right)}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = [\ln(t) \operatorname{Arctan}(t)]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \cdot \operatorname{Arctan}(t) dt$

Par intégration par parties :

on pose

$U : t \mapsto \ln(t)$ $\quad V : t \mapsto \operatorname{Arctan}(t)$

$U' : t \mapsto \frac{1}{t}$ $\quad V' : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$

avec U et V des fonctions $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ à $\mathbb{R}$

d'où $\boxed{F(x) = \ln(x) \operatorname{Arctan}(x) - \int_1^x g(t)\, dt}$

Alexandre M. Colle semaine 24 (feuille 2/2)

4) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$F(x) = \underbrace{\ln(x) \text{Arctan}(x)}_{*} - \underbrace{\int_1^x g(t)\,dt}_{**}$$

Etudions séparément les limites de * et ** en 0_+

*

Le développement limité d'Arctan livre

$\text{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ ①

or $\ln(x)\, x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ [croissances comparées]

d'où $\ln(x) \text{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ [propriété des équivalents et limites]

**

① livre $\dfrac{\text{Arctan}(x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$ $\left[\dfrac{\text{Arctan}\, x}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1\right]$

donc g est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$

$G \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_1^x g(t)\,dt \end{array} \right.$ est la primitive de g qui s'annule en 1 d'après le théorème fondamental de l'analyse.

donc G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc continue sur $\mathbb{R}_+$

Ainsi $F(x) = \underbrace{\ln(x) \text{Arctan}(x)}_{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 0}} - \underbrace{G(x)}_{\substack{\downarrow x \to 0 \\ G(0) \in \mathbb{R}}}$

donc $\boxed{F(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -G(0) \in \mathbb{R}}$

Martin K.-L. Colle de la semaine 24.

Exercice 1. On note, pour $n \geqslant 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x.$$

Soit $\alpha \in]0,1[$.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leqslant I_n \leqslant 1.$$

2. Démontrer que (I_n) est croissante.
3. Déterminer sa limite.

1). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'une part, par la relation de Chasles

$$I_n := \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx = \int_0^\alpha \frac{1}{1+x^n} dx + \int_\alpha^1 \frac{1}{1+x^n} dx . (*)$$

Or, si $x \in [0, \alpha]$,

$$x \leq \alpha$$

$$\Rightarrow x^n \leq \alpha^n \quad \left[h \mapsto h^n \text{ croissante sur } [0,\alpha] \right]$$

$$\Rightarrow 1+x^n \leq 1+\alpha^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^n} \geq \frac{1}{1+\alpha^n} \quad \left[h \mapsto \frac{1}{h} \text{ décroissante sur } \mathbb{R}^*_+ \right]$$

et par passage à la limite dans une inégalité large,

$$1 \leq \lim I_n \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \lim I_n = 1.$$

Anaé D. Rapport de colle S24

2.6

Calculer $\int_0^{10} \frac{1}{(x+1)(x+2)} \mathrm{d}x$

Solution :

On cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+2)}$$

$$= \frac{a(x+2) + b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{x(a+b) + 2a + b}{(x+1)(x+2)}$$

Il suffit que

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

On a donc

$$\int_0^{10} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = \int_0^{10} \frac{1}{(x+1)} dx - \int_0^{10} \frac{1}{(x+2)}$$ (linéarité de l'intégrale)

$$= [\ln(x+1)]_0^{10} - [\ln(x+2)]_0^{10}$$

$$= \ln(11) - \ln(12) + \ln(2)$$

$$\boxed{= \ln\left(\frac{11}{6}\right)}$$

Louis Guillaume S. Khôlle de la semaine

Exercice 11. *Calculer, sous réserve d'existence, la limite de la suite dont le terme général est :*

$$u_n = \frac{1}{n}(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \cdots + \sqrt[n]{2^n})$$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par les propriétés des exposants, remarquons :

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt[n]{2^k}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(2)^{k/n}$$

Ainsi, posons $f \left| \begin{array}{l} [0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2^x \end{array} \right.$.

La fonction f est bien définie et continue sur $[0;1]$.

· Justification :

En utilisant la notation exponentielle-log nous avons que

$$\forall x \in [0,1] \quad 2^x = e^{x\ln(2)}$$

Ainsi par composition de fonctions continues, f est bien définie et C^0 sur l'intervalle $[0;1]$. Nous pouvons ainsi appliquer le théorème sur les sommes de Riemann pour obtenir l'existence de la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que sa limite :

$$\boxed{U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{2^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 e^{x\ln(2)}\,dx}$$

$\ln(2)$ étant une constante positive non nulle, nous connaissons une primitive de $x \mapsto e^{x\ln(2)}$ de telle sorte que

$$\int_0^1 2^x \, dx = \left[\frac{1}{\ln(2)} e^{x\ln(2)} \right]_0^1 = \frac{2-1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}$$

<u>Conclusion</u> : Après application du théorème sur les sommes de Riemann pour les fonctions continues sur un intervalle nous avons pu déterminer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et de plus :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\ln(2)}}$$

Ihsan. K. Colle de la semaine 24

- Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de :

$$u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!\, n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

comme $n > 0$ alors $u_n > 0$:

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\left(\ln((2n)!) - \ln(n!) - n\ln(n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln(k) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k) - \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k+n) - \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{k}{n}+1\right) + \ln(n)\right) - \ln(n)$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}+1\right)\right) + \ln(n) - \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}+1\right)$$

$f \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(1+x) \end{array}\right.$ est $\mathcal{C}^0$ sur le segment $[0;1]$

par Somme de Riemann

$$\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

or $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$

$u \mapsto \ln(1+x)$ et $v : x \mapsto x$ sont $\mathcal{C}^1$.

ainsi $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \ln(2) - 1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}$

$= \ln(2) - 1 + \left[\ln(1+x)\right]_0^1$

$= \ln(4) - 1$

ainsi par continuité de $x \to \exp$.

$u_n \longrightarrow e^{\ln(4)-1} = \frac{4}{e}$.

Youssef B

Colle de la semaine 24

soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $0 < a < b$.

Calculer $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx$ en posant $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(t)$

Solution :

Changement de variable :

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(t)$$

$x = a \Rightarrow \cos(t) = -1 \Rightarrow t = \pi$

$x = b \Rightarrow \cos(t) = 1 \Rightarrow t = 0$

$$dx = -\frac{b-a}{2}\sin(t)\, dt$$

Alors, $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx$

$$= \int_\pi^0 \sqrt{\left(\frac{a+b+(b-a)\cos(t)}{2} - a\right)\left(b - \frac{a+b+(b-a)\cos(t)}{2}\right)}\ \frac{-(b-a)}{2}\sin(t)\, dt$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{\frac{b-a+(b-a)\cos(t)}{2} \times \frac{b-a-(b-a)\cos(t)}{2}} \times \frac{b-a}{2}\sin(t)\, dt$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{\frac{(b-a)(1+\cos(t))}{2} \times \frac{(b-a)(1-\cos(t))}{2}}\ \frac{b-a}{2}\sin(t)\, dt$$

$$= \int_0^\pi \left|\frac{(b-a)\sin(t)}{2}\right| \cdot \frac{b-a}{2}\sin(t)\, dt$$

$$= \int_0^\pi \frac{(b-a)^2}{4}\sin^2(t)\, dt$$

(on enlève la valeur absolue car $\sin(t) \geqslant 0$ entre 0 et π)

$$= \frac{(b-a)^2}{4} \int_0^{\pi} \sin^2(t)\,dt$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\,dt \qquad (\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t))$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4} \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4} \times \frac{\pi}{2}$$

Tigüin, David

Colle de la semaine 24

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \leq 1$ et $\int_0^1 f = 1$. Montrer que $f = 1$

On introduit $\Delta \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \to 1 - f(x) \end{array} \right.$ continue sur $[0,1]$ (f l'est)

Ainsi $\forall x \in [0,1]$ $\Delta(x) = 1 - f(x) \geqslant 0$ et

$\int_0^1 \Delta(x)\,dx = 1 - \int_0^1 f(x)\,dx = 0$ (linearité)

Par propriété de séparation de l'intégrale $\Delta = 0$

d'où $\forall x \in [0,1]$ $1 - f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$

Colle semaine 24

Ahmed Amine

Énoncé :

- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$
- Montrer que pour tout $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$ $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin(x)\leq x$
- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

Solution :

On a : $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$

où $a=0$ et $b=1$.

Par les sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\longrightarrow\int_0^1 \sin(t)\,dt = 1-\cos(1)$$

On sait que sin est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^+$, alors on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à sin en 0 à tout ordre.

Soit $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$, on a :

- $\displaystyle \sin(x)-x = \sin(x)-(\sin(0)+\sin'(0)x) = \int_0^x \frac{(x-t)}{1}\sin''(t)\,dt$
$\displaystyle = -\int_0^x \underbrace{(x-t)}_{\geq 0}\underbrace{\sin(t)}_{\geq 0}\,dt \leq 0$ car $0\leq t\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

- $\displaystyle \sin(x)-\left(x-\frac{x^3}{6}\right) = \sin(x)-\left(\sum_{k=0}^{3}\frac{\sin^{(k)}(x)}{k!}x^k\right)$
$\displaystyle = \int_0^x \underbrace{\frac{(x-t)^3}{3!}\sin^{(4)}(t)}\,dt \geq 0$

Soit $k\in[\![1;n]\!]$: $\frac{k}{n^2}\geq 0$ $\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}\leq\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\leq\frac{k}{n^2}$

on a : $\sin\left(\frac{k}{n}\right)\geq 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}\right)\leq\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\leq$ $\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}$

d'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6}\right) \leqslant U_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}$$

alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n} - \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k^3}{6n^6}}^{W_n} \leqslant U_n \leqslant \overbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n}}^{V_n}$$

$x \to x\sin(x)$ est continue sur $[0,1]$

alors : $V_n \to \int_0^1 x\sin(x)\,dx$

et $|W_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\left|\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| k^3}{6n^6} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6n^6} = \frac{1}{6n^2} \to 0$

d'où $W_n \to 0$ et donc $U_n \to \int_0^1 x\sin(x)\,dx$

Or : $\int_0^1 x\sin(x)\,dx \underset{IPP}{=} \left[-x\cos(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \cos(x)\,dx$

$= \sin(1) - \cos(1)$

d'où $\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(1) - \cos(1)$

Rayan 6

Colle de la semaine n°24

Exercice : On note pour tout $n \geq 1$

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

Soit $\alpha \in]0,1[$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n \leq 1$$

2. Démontrer que (I_n) croissante
3. Déterminer sa potentiel limite

En s'inspirant de cette méthode, étudier la suite (J_n) défini par

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin(t)} dt$$

Solution :

Soit $\alpha \in]0,1[$

1. Soit $n \geq 1$

Montrons que

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n \leq 1$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} = \int_0^\alpha \frac{1}{1+\alpha^n} dx$$

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \underset{\substack{\alpha \in]0,1[\\ \text{Chasles}}}{=} \int_0^\alpha \frac{1}{1+x^n} dx + \int_\alpha^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

Soit $x \in [0,\alpha]$

Montrons que $\frac{1}{1+x^n} \geq \frac{1}{1+\alpha^n}$

Si $x=0$;

$n \geq 1$ donc $x^n = 0$

$\alpha \in]0,1[$ donc $\alpha^n = e^{n\ln(\alpha)} \geq 0$
par exp

Donc $1+\alpha^n \geq 1$

Ce qui nous livre

$$\frac{1}{1+\alpha^n} \leq 1 = \frac{1}{1+x^n}$$

Sinon ;

$x \in]0,\alpha[$

$$x \leq \alpha$$

$$\underset{\ln \nearrow\nearrow \mathbb{R}_{>0}}{\Rightarrow} \ln(x) \leq \ln(\alpha)$$

$$\Rightarrow n\ln(x) \leq n\ln(\alpha)$$

$$\underset{\exp \nearrow\nearrow \mathbb{R}}{\Rightarrow} x^n \leq \alpha^n$$

$$\underset{\text{inv} \searrow\searrow \mathbb{R}_{>0}}{\Rightarrow} \frac{1}{1+x^n} \geq \frac{1}{1+\alpha^n}$$

Ainsi

$$\forall x \in [0,\alpha] \quad \frac{1}{1+x^n} \geq \frac{1}{1+\alpha^n}$$

$$\underset{\nearrow \int}{\Rightarrow} \int_0^\alpha \frac{1}{1+x^n}\,dx \geq \int_0^\alpha \frac{1}{1+\alpha^n}\,dx$$

Or

$$\forall x \in [\alpha,1] \quad \frac{1}{1+x^n} \geq 0$$

Donc par positivité de l'intégrale

$$\int_\alpha^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \geq 0$$

Ainsi

$$I_n = \int_0^\alpha \frac{1}{1+x^n}\,dx + \int_\alpha^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \geq \int_0^\alpha \frac{1}{1+x^n}\,dx \geq \frac{\alpha}{1+\alpha^n}$$

Or

$$\forall x \in [0,1] \quad x^n \geq 0 \implies \forall x \in [0,1] \quad \frac{1}{1+x^n} \leq 1$$

Donc
$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx = 1$$

Ainsi

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n \leq 1$$

2. Montrons que (I_n) croissante

Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n \leq m$

Montrons que $I_n \leq I_m$

Soit $x \in [0,1]$

Si $x = 0$ alors $I_n = I_m$ car $x^n = x^m = 0$

donc $I_n \leq I_m$

Sinon :

$$n \leq m$$

$$\underset{\ln(x) \leq 0}{\implies} \quad n\ln(x) \geq m\ln(x)$$

$$\underset{\exp \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}}{\implies} \quad x^n \geq x^m$$

$$\underset{\text{inv} \searrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}{\implies} \quad \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^m}$$

La croissance de l'intégrale nous livre que

$I_n \leq I_m$.

3. (I_n) est croissante et majorée par 1 donc (I_n) possède une limite

Puisque

$$\forall n \geq 1 \quad \forall \alpha \in]0,1[$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n \leq 1$$

et

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

car $\alpha^n = e^{n \overbrace{\ln(\alpha)}^{\leq 0}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Par passage à la limite dans une inégalité large

$$\alpha \leq I \leq 1 \text{ où } I = \lim_{n \to +\infty} (I_n)$$

Du fait que cela est vrai pour tout $\alpha \in]0,1[$, nous en déduisons que I est la borne supérieure de $]0,1[$ (car aussi minoré par 1) donc $I = 1$

On étudie le cas de (J_n) :

Soit $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

1. Montrons que

$$0 \underset{*}{\leq} J_n \leq \alpha e^{-n \sin(\alpha)}$$

$*$ est clair par positivité de exponentielle et de l'intégrale

Montrons que

$$\forall x \in [0,\alpha] \quad e^{-n \sin(x)} \leq e^{-n \sin(\alpha)}$$

Soit $x \in [0,\alpha]$

$$0 \leq x \leq \alpha$$

La croissance de sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et le fait que $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$ nous livre que

$$\sin(x) \leq \sin(\alpha)$$
$$\underset{-n \leq 0}{\Rightarrow} \quad -n\sin(x) \geq -n\sin(\alpha)$$
$$\underset{\exp \nearrow}{\Rightarrow} \quad e^{-n\sin(x)} \geq e^{-n\sin(\alpha)}$$

Par un raisonnement analogue à Q1, la croissance nous livre que

$$I_n \leq \alpha e^{-n\sin(\alpha)}$$

2. Montrons que (I_n) ~~croissante~~ décroissante

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n \leq m$

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$n \leq m$$
$$\underset{\sin(x) \geq 0}{\Rightarrow} \quad n\sin(x) \leq m\sin(x)$$
$$\underset{\exp \nearrow}{\Rightarrow} \quad e^{-n\sin(x)} \geq e^{-m\sin(x)}$$
$$\underset{\nearrow \int}{\Rightarrow} \quad I_n \geq I_m$$

3. (I_n) converge car minoré par 0 et décroissante

un passage à la limite et un raisonnement analogue à Q3 nous livre que $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Louis B Khôlle de la semaine 24

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2} dt$

1) Mq (I_n) est décroissante

2) Calculer $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}$

3) Mq : $\forall n \geq 2$ $\frac{1}{1+n} \leq 3I_n \leq \frac{1}{n-1}$

4) En déduire un équivalent de I_n en $+\infty$

---

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} - t^n}{1+t+t^2} dt = \int_0^1 \frac{t^n(t-1)}{1+t+t^2} dt$$

Comme $t \in [0,1]$ on a $t^n > 0$

$t - 1 < 0$

$1+t+t^2 > 0$

Donc par opération sur les inégalités

$\frac{t^n(t-1)}{1+t+t^2} < 0$ et par croissance de l'intégrale

$I_{n+1} - I_n < 0 \Rightarrow I_n$ décroissante

2) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1} + t^{n+2}}{1+t+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^n(1+t+t^2)}{1+t+t^2} dt = \int_0^1 t^n dt$$

$$= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

3) De même qu'en 2), $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_n + I_{n-1} + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

Ainsi comme (I_n) décroît :

$$\left.\begin{array}{l} I_n \leq I_n \leq I_n \\ I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1} \\ I_{n+2} \leq I_n \leq I_{n-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq 3\, I_n \leq \frac{1}{n-1}$$

4) D'après Q3, en ⊗ par $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\frac{n}{n+1} \leq 3n\, I_n \leq \frac{n}{n-1}$$

Par passage à la limite en $+\infty$ et par théorème d'encadrement on a

$$3n\, I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \quad \text{i.e.} \quad \frac{I_n}{\frac{1}{3n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

On en déduit donc que

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$$

Louis D. Semaine de colles n° 24

Enoncé :

Soit f $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$. Mq $x \mapsto \int_0^1 f(x+t)\cos(t)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Résolution :

Si $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que

(linéarité de $\int$)

$\forall y \in \mathbb{R} \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow \left| \int_0^1 (f(x+t)-f(y+t))\cos(t)\,dt \right| \leq \varepsilon$

Comme f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$:

$\exists \delta_0 > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x-y| \leq \delta$

ie $x - \delta \leq y \leq x + \delta$

ie $x + t - \delta \leq y + t \leq x + t + \delta$

(pour tout $t \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow |f(x+t) - f(y+t)| \underset{(*)}{\leq} \varepsilon \quad \left(\begin{matrix} x+t \in \mathbb{R} \\ y+t \in \mathbb{R}\end{matrix}\right)$

Donc pour $\delta = \delta_0$, si $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x-y| \leq \delta$

$\left| \int_0^1 (f(x+t) - f(y+t))\cos(t)\,dt \right|$

$\leq \int_0^1 |f(x+t) - f(y+t)|\,|1|\,dt$ (inégalité triangulaire pour $\int$)

$\leq \int_0^1 \varepsilon\,dt = \varepsilon$ $(*)$

On en déduit bien la continuité de $x \mapsto \int_0^1 f(x+t)\cos(t)\,dt$ sur $\mathbb{R}$.

Mehdi B

Colle de la semaine 24

Exercice 1. On définit

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{array}.$$

1. Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. A l'aide d'un changement de variable $u = \frac{1}{t}$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = F(1/x)$
3. Exprimer F à l'aide de

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ 0 & \mapsto & 1 \\ x \neq 0 & \mapsto & \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} \end{array}.$$

4. Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0

Solution : 1/ • Si $x = 1$, $F(x) = 0$

• Soit $x \in]0, 1[$

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt = -\int_x^1 \frac{\overbrace{\ln(t)}^{\leq 0}}{\underbrace{1+t^2}_{\geq 0}}\,dt \leq 0$$

De plus, si $x \in]0, 1[$, la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} [x, 1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\ln(t)}{1+t^2} \end{array} \right.$$

est continue et négative sur $[x, 1]$ et n'est pas la fonction nulle sur $[x, 1]$ car $f(x) \neq 0$ ($x \neq 1$).
La contraposée de la propriété de séparation entraîne alors $F(x) \neq 0$.

• De manière analogue, $F(x) > 0$ si $x \in]1 ; +\infty[$.

Nous déduisons des 3 points précédents

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) \begin{cases} <0 & \text{si } x \in]0,1[\\ =0 & \text{si } x = 1 \\ >0 & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}}$$

2/ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Nous calculons :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$$

$u = \frac{1}{t}$

$du = -\frac{1}{t^2}dt$

$t=1 \rightsquigarrow u=1$

$t=x \rightsquigarrow u=\frac{1}{x}$.

$$= -\int_1^x \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t^2}+1} \times \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\overbrace{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}^{-\ln(u)}}{1+u^2}\,du$$

$$= \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,du = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)}$$

3/ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$

$u : t \mapsto \ln(t)$ $\qquad$ $v : t \mapsto \operatorname{Arctan}(t)$

$u' : t \mapsto \frac{1}{t}$ $\qquad$ $v' : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$

e1

Mehdi B.

Par intégration par parties :

$$F(x) = [\ln(t)\,\mathrm{Arctan}(t)]_1^x - \int_1^x \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\,dt$$

$$= \ln(x)\,\mathrm{Arctan}(x) - \int_1^x g(t)\,dt$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) = \ln(x)\,\mathrm{Arctan}(x) - \int_1^x g(t)\,dt}$$

4/ • On remarque que comme $\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$,

g est le prolongement par continuité de $t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)/t$ à $\mathbb{R}_+^*$. <u>g est donc continue</u>

• Montrons que F possède une limite finie en 0^+
D'après 3/ :

$$F(x) = \ln(x)\,\mathrm{Arctan}(x) - \int_1^x g(t)\,dt$$

Comme $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} x$, $\ln(x)\,\mathrm{Arctan}(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \ln(x)\,x$

Par croissance comparée, on obtient :

$$\ln(x)\,\mathrm{Arctan}(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

• Il nous reste à montrer que $\int_1^x g(t)\,dt$ admet une limite finie en 0^+.

Nous avons établi que g était continue sur $\mathbb{R}_+^*$, nous considérons dès lors une primitive G de g. Puis:

$$\int_1^x g = G(x) - G(1)$$

G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue. Donc $G(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} G(0) \in \mathbb{R}$.

Ainsi avons-nous démontré:

$$\boxed{F \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$$

Lina. A. Colle 18 semaine 24.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
Calculer
$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx.$$
en posant $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(t)$.

Solution:
$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx.$$

Changement de variable effectué:
$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(t)$$
d'où $\cos(t) = \frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$

$dx = -\frac{b-a}{2}\sin(t)\, dt$

$x = a \rightsquigarrow \cos(t) = \frac{2}{b-a}\left(\frac{a-b}{2}\right) = -1.$

d'où $t = \pi + 2k\pi$

pour $k = 0$: $t = \pi$.

$x = b \rightsquigarrow \cos(t) = \frac{2}{b-a}\left(\frac{b-a}{2}\right) = 1.$

d'où $t = 0 + 2\ell\pi$.

pour $\ell = 0$: $t = 0$.

Donc
$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx$$
$$= \int_\pi^0 -\sqrt{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(t) - a\right)\left(b - \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos(t)\right)}$$
$\times \sin(t)\, dt.$
$$= \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos(t)\right)\left(\frac{b-a}{2} - \frac{b-a}{2}\cos(t)\right)}\sin(t)dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\cos(t)\right)^2} \sin(t)\, dt.$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{b-a}{2} \sqrt{1 - \cos(t)^2} \sin(t)\, dt \quad (b>a).$$

$$= \frac{b-a}{2} \int_0^{\pi} \sin^2(t)\, dt. \quad (\forall t \in [0,\pi], \sin(t) \geq 0)$$

$$= \frac{b-a}{2} \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt$$

$$= \frac{b-a}{4} \left[t - \frac{1}{2}\sin(2t) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{b-a}{4} \pi.$$

Sophie G

Colle de la semaine

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_1^{e} (\ln(t))^n dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Établir une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.
4. Déterminer la limite de I_n, puis à l'aide de la question 2, donner un équivalent de I_n.

Solution

1) $I_0 = \int_1^e \ln(t)^0 dt = e-1$

$I_1 = \int_1^e \ln(t) dt = 1$

2) $I_{n+1} = \int_1^e \underbrace{\ln(t)^{n+1}}_{\downarrow} \times \overset{\uparrow}{1} dt$

Soient $(u,v) \in \mathcal{C}^1([e,1], \mathbb{R})$ $t \in [e,1]$

$u(t) = \ln(t)^{n+1}$ $\quad v(t) = t$

$(\downarrow)$ $\quad (\uparrow)$

$u'(t) = (n+1)\frac{1}{t}\ln(t)^n$ $\quad v'(t) = 1$

$I_{n+1} = \left[t \ln(t)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)\ln(t)^n dt$

$= \boxed{e-(n+1)I_n = I_{n+1}}$

3) Montrons Soit $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

. $\forall t \in [1,e]$ $\ln(t) \geq 0 \Rightarrow \ln(t)^n \geq 0$

$\Rightarrow \underbrace{\int_1^e \ln(t)^n dt}_{I_n} \geq 0$ [positivité de $\int$] (*)

. $\frac{e}{n+1} - I_n = \frac{\overbrace{e-(n+1)I_n}^{=I_{n+1}\ (*)}}{n+1) > 0} \geq 0$

Donc $\frac{e}{n+1} - I_n \geq 0 \Rightarrow \boxed{I_n \leq \frac{e}{n+1}}$

4) Comme $\frac{e}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par théorème d'encadrement et 3)

$\boxed{I_n \to 0}$ et $(n+1)I_n = e - I_{n+1}$ (2)

$$\Rightarrow \frac{I_n(n+1)}{e} = 1 - \frac{I_{n+1}}{e}$$

$$\frac{I_{n+1}}{e} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$1 - \frac{I_{n+1}}{e} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Donc $\dfrac{I_n}{\frac{e}{n+1}} \longrightarrow 1$

alors $\boxed{(I_n) \sim \dfrac{e}{n+1}}$

NISS
MATHEO

Rapport de colle semaine 24.

2.11

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et $T>0$ tels que $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$ est constante. Montrer que f est périodique.

Solution :

On pose l'application suivante

$$\Delta \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - f(x+T) \end{array} \right.$$

Montrons que $\Delta = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$

Δ est continue sur $\mathbb{R}$ intervalle donc le théorème fondamental de l'analyse nous livre

$$D \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_0^x f(t) - f(t+T)\,dt \end{array} \right.$$ unique primitive de Δ s'annulant en 0

Soit $x \in \mathbb{R}$: montrons que D est constante.

$$D(x) = \int_0^x f(t) - f(t+T)\,dt$$

$$\underset{[\text{linéarité}]}{=} \int_0^x f(t)\,dt - \underbrace{\int_0^x f(t+T)\,dt}_{I(x)}$$

On effectue le changement de variable sur $I(x)$ suivant,

$u = t - T$
$du = dt$
en x : $u = x - T$
en 0 : $u = -T$

Ainsi : $I(x) = \int_{-T}^{x-T} f(u)\,du$

~~Ainsi $D(x) = \int_0^x$~~

Ainsi, $D(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_{-T}^{x-T} f(u)\,du$

On a : $D(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_{-T}^{x-T} f(u)\,du$

$$= \int_0^x f(t)\,dt - \left(\int_{-T}^{0} f(u)\,du + \int_0^x f(u)\,du + \int_x^{x-T} f(u)\,du \right)$$

[Relation de Chasles]

$$= \cancel{\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f(u)\,du}^{\,0} - \int_{-T}^{0} f(u)\,du + \int_{x-T}^{x} f(u)\,du$$

Or on sait que : $x \longmapsto \int_x^{x+T} f(t)\,dt$ constante

en spécialisant x à $-T$ puis à $x-T$ on a :

$$\int_{-T}^{0} f(u)\,du = \int_{x-T}^{x} f(u)\,du$$

Ainsi : $D(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc : $D = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$

Ainsi : Comme $\underset{\Delta}{\underset{\|}{D'}} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) - f(x+T) = 0$

c'est à dire, <u>f est T-périodique</u>.

MANGIACOMINI
Amélien

Rapport de Colle Semaine 24

Soit $f \in \mathcal{C}^0(]0;1[, \mathbb{R})$ uniformément continue

Montrer que f est bornée.

On pose $\varepsilon = 1$.

Pour $n+1 = \lceil \frac{1}{\delta} \rceil$ on a

$$\underbrace{\left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil}_{n+1} \geq \frac{1}{\delta} > \underbrace{\left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil - 1}_{n}$$

donc $(n+1)\delta \geq 1 > n\delta$

On pose $\forall t \in [\![0;n]\!]$

$I_t = [t\delta ; (t+1)\delta] \cap]0;1[$

Soit $x_t \in I_t$ dans pour tout x dans I_t

on a $|x - x_t| \leq |(t-(t+1))\delta| \leq \delta$

donc $|f(x) - f(x_t)| \leq \varepsilon = 1$ (Uniforme continuité)

donc $|f(x)| \leq 1 + |f(x_t)|$

On pose $M = \max\limits_{\substack{j \in [\![0;n]\!] \\ x_j \in I_j}} (1 + |f(x_j)|)$

On a $\forall x \in \bigcup\limits_{j=0}^{n} I_j =]0;1[\; |f(x)| \leq M$ $\square$.

Rémi. S

Semaine de colles n°18

Déterminer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n\, n!}\right)^{1/n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{\frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)}$

$= e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n}\right)}$

(Somme de Riemann) $\longrightarrow e^{\int_0^1 \ln(1+x)\,dx}$

$x \mapsto \ln(1+x)$ $\mathcal{C}^0$ sur $[0;1]$.

$= e^{[(1+x)\ln(1+x) - (x+1)]_0^1}$

$= e^{2\ln(2) - 1}$

$= e^{\ln(4) - 1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_0^n \lfloor t \rfloor \, dt$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\int_0^x \lfloor t \rfloor \, dt$

SOLUTION.

1

1| Soit $n \in \mathbb{N}$.

si $n=0$, $\int_0^0 \lfloor t \rfloor \, dt = 0$

si $n=1$ $\int_0^1 \lfloor t \rfloor \, dt = 0$

si $n \geq 2$.

$\sigma = (0, 1, \_\_\_, n)$ est une subdivision adaptée à $t \longmapsto \lfloor t \rfloor$.

et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\forall x \in [k, k+1[$ $\lfloor x \rfloor = k$.

Donc $\displaystyle\int_0^n \lfloor t \rfloor \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1-k) k = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

2| Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Par Chasles, $\displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor \, dt = \int_0^{\lfloor x \rfloor} \lfloor t \rfloor \, dt + \int_{\lfloor x \rfloor}^x \lfloor t \rfloor \, dt$

Posons $\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{N}$

Alors $\displaystyle\int_0^{\lfloor x \rfloor} \lfloor t \rfloor \, dt = \int_0^n \lfloor t \rfloor \, dt = \frac{n(n-1)}{2}$.

et $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^x \lfloor t \rfloor \, dt = \int_n^x \lfloor t \rfloor \, dt$

si $x = n$, $\displaystyle\int_n^x \lfloor t \rfloor \, dt = 0$,

sinon $\displaystyle\int_n^x \lfloor t \rfloor \, dt = \int_n^x n \, dt = n(x-n) = nx - n^2$

$(\forall t \in [n, x[, \lfloor t \rfloor = n)$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor \, dt = \frac{n(n-1)}{2} + nx - n^2$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 3. *Une limite classique.*

1. *Questions préliminaires.*
   (a) *Déterminer deux constantes a et b telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ , \quad \int_0^\pi \left(at + bt^2\right)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$$

   (b) *Montrer que la fonction*

$$\varphi : \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}\ , \quad t \mapsto \frac{t\cos(t)}{\sin(t)}$$

   admet un prolongement de classe C^1 *sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (c) *(lemme de Lebesgue) objet de l'exercice 1.*

2. *Déterminer*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

<u>Solution:</u>

1.a. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_0^\pi (bt^2+at)\cos(nt)\,dt = \left[\frac{1}{n}(bt^2+at)\sin(nt)\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi (2bt+a)\sin(nt)\,dt$$

$$= -\frac{1}{n}\left(\left[-\frac{1}{n}(2bt+a)\cos(nt)\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi 2b\cos(nt)\,dt\right)$$

$$= \frac{(2b\pi+a)(-1)^n - a}{n^2} + \frac{2b}{n}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{(2b\pi+a)(-1)^n - a}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} \quad \text{pour } b = \frac{1}{2\pi} \text{ et } a = -1.$$

b. $\varphi(t) \underset{t\to0}{=} \dfrac{t(1+o(t))}{t+o(t^2)} \underset{t\to0}{=} \dfrac{1+o(t)}{1+o(t)} \underset{t\to0}{=} (1+o(t))(1+o(t)) \underset{t\to0}{=} 1+o(t)$

donc φ admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

c. Voir correction DL 16 partie 3.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \cos(kt)\, dt \qquad (a)$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\, dt \qquad \text{(linéarité)}$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 \right) dt \qquad \left(\begin{array}{l}\text{somme géométrique}\\ \text{avec passage dans}\\ \text{complexes et angle moitié}\end{array}\right)$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \left(\frac{\left(\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 \right) dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right) \left(\frac{\sin(nt)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{\cos(nt)}{2} - \frac{1}{2} \right) dt \qquad \text{(formules de trigo)}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\left(\frac{1}{2\pi} t^2 - t\right)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \sin(nt)\, dt + \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{4\pi} t^2 - \frac{t}{2}\right) \cos(nt)\, dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi} t^2 - t\, dt$$

(prolongeable par $\mathcal{C}^0$ en 0 d'après (b))

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{(c)} -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{6\pi} t^3 - \frac{1}{2} t^2\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Paul C. Semaine de colle 24

Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4+2x+5}}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n := \int_n^{2n} f(x)\,dx$.

déterminer la limite de I_n

Solution:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$f \geq 0$. donc $I_n > 0$

$\forall x \in [n;2n]$, $x^4 + 2x + 5 \geq n^4 + 2n + 5 \geq n^4$

$\Rightarrow \forall x \in [n, 2n]$, $\sqrt{x^4+2x+5} \geq n^2$ [$\sqrt{\cdot}$ croissante sur $\mathbb{R}_+$]

$\Rightarrow \forall x \in [n, 2n]$, $f(x) \leq \dfrac{1}{n^2}$ [fonction inverse décroissante sur $\mathbb{R}_+$]

$\Rightarrow I_n \leq \int_n^{2n} \frac{1}{n^2}\,dx = \frac{1}{n}$ [croissance de l'intégrale

on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.

$\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

par théorème d'encadrement, $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

Maximilien T. Colle de la Semaine

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue
Montrez que $g \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^1 \cos(x) f(x) \end{vmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Solution :

Soit $\varepsilon > 0$ Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

Montrons que $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$|g(x_0) - g(x)| \leq \varepsilon$

$$|g(x_0) - g(x)| = \left| \int_0^1 \cos(x_0) f(x_0) - \cos(x) f(x) \right| \quad \text{(linéarité de } \textstyle\int\text{)}$$

$$\leq \int_0^1 |\cos(x_0) f(x_0) - \cos(x) f(x)| \quad \left(\begin{array}{c}\text{inégalité triangulaire} \\ \text{de l'intégrale}\end{array}\right)$$

Or $t \mapsto \cos(t) f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme multiplication de fonctions continues sur $\mathbb{R}$

Ainsi $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad |\cos(x_0) f(x_0) - \cos(x) f(x)| \leq \varepsilon$

Soit $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$$\int_0^1 |\cos(x_0) f(x_0) - \cos(x) f(x)| \leq \int_0^1 \varepsilon \leq \varepsilon \; \square \quad \left(\begin{array}{c}\text{croissance} \\ \text{de l'intégrale}\end{array}\right)$$

Mouchonnet Raphaël — colle de la semaine n°24

Solution :

$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$

1) limite éventuel de I_n en $+\infty$.

$\forall t \in [0,1]\quad \frac{t^n}{1+t^2} \geq 0$ et $1+t^2 \geqslant 1$

Par croissance et positivité de l'intégrale

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$$

Par lemme d'encadrement $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$. Calculer $I_n + I_{n+2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_n + I_{n+2} \overset{\text{lin}}{=} \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+2}}{t^2+1}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1}(1+t^2)$$

$$\boxed{= \frac{1}{n+1}}$$

3) limite éventuelle de $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}}_{\circledast}$ en $+\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\circledast \overset{Q2)}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (I_{2k} + I_{2k+2}) = I_0 + (-1)^n I_{2n+2}$$

Hors $I_0 = \frac{\pi}{4}$ et $(-1)^n$ est bornée

Donc par Q1)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n I_{2n+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Jules R. Colle de la semaine 24

> Énoncé :
> Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Solution :

Posons :

$$f \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos^2(\pi x) \end{array} \right.$$

On remarque que $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

Avec les sommes de Rieman, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$$

Or :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \cos^2(\pi x)\,dx$$

$$\text{donc} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+\cos(2\pi x))\,dx$$

$$\text{donc} = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

et :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$

Exercice : Montrer que pour tout x réel, $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \to e^x$.

Solution :

$x>0$

$\forall\, y \in [0,x]$

$|\exp^{(n+1)}(y)| \leqslant e^x \qquad (\exp \nearrow \text{ et } \geqslant 0)$

Avec l'inégalité de Taylor Lagrange on obtient

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant e^x \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} = e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

comme $x^{n+1} = o((n+1)!)$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{par théorème d'encadrement}$$

Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x}$

Pierre V. Colle de la semaine 24

> Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \longrightarrow \ln(2)$

Solution

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$
- Ainsi $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-t)^k}{\cancel{t+1}} dt = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

$$= [\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

$$= \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

Donc $\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right|$

$$\leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

$$\leq \int_0^1 t^n dt$$

$$\leq \frac{1}{n+1}$$

Par théorème d'encadrement, comme $\frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \longrightarrow \ln(2)$

Colle de la semaine 24

Adam M.

EXERCICE 6 — Donner un équivalent de $u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+2\frac{k}{n})^3}$$

$$= \frac{1}{n^2} v_n \quad \text{où } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+2\frac{k}{n})^3}$$

$f \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{(1+2x)^3} \end{array} \right.$ continue sur $[0,1]$ intervalle

$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

D'après le théorème des sommes de Riemann

$$v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{(1+2x)^3} dx = \left[- \frac{1}{(1+2x)^2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Donc $n^2 u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{8}{9}$

Donc $u_n \sim \frac{8}{9n^2}$

Célia A. Semaine de colle n° 24

énoncé :

$$\boxed{\text{Calculer } \int_2^3 \frac{x^3}{1+x^8}\,dx.}$$

Solution : Posons $u = x^4$.

Alors $du = 4x^3\,dx$.

D'où, selon un changement de variable,

$$\int_2^3 \frac{x^3}{1+x^8}\,dx = \int_{2^3}^{3^3} \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+u^2}\,du$$

(linéarité de l'intégrale) $$= \frac{1}{4}\,\left[\operatorname{Arctan}(u)\right]_{2^3}^{3^3}$$

Ainsi

$$\boxed{\int_2^3 \frac{x^3}{1+x^8}\,dx = \frac{1}{4}\left(\operatorname{Arctan}(3^3) - \operatorname{Arctan}(2^3)\right)}$$

Léa N.

Colle de la semaine 24

Énoncé

Déterminer un équivalent de la suite dont le terme général est : $U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2+k^2}$

Solution

$$U_n = n \times \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k^2}{n^2}}{1+\frac{k^2}{n^2}}}_{=: V_n}$$

On pose $f \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$

une fonction continue sur $[0,1]$.

Par théorème sur les sommes de Riemann :

$$V_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$$

Or $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$= \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ linéarité de l'intégrale

$= 1 - \left[\operatorname{Arctan}(x)\right]_0^1$

$= 1 - \frac{\pi}{4}$

Donc $V_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \underbrace{1 - \frac{\pi}{4}}_{\neq 0}$

$$\boxed{\text{Alors } U_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Rapport de colle, semaine 25

MAKNI
W.

$$\boxed{\text{Calculer } \int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}\,dt \text{ en posant } u = 1+e^t}$$

Solution :

$u = 1+e^t$ donc $du = e^t\,dt$

$t = 1 \leadsto u = e+1$
$t = 0 \leadsto u = 2$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}\,dt = \int_2^{e+1} \frac{\ln(u)}{\frac{\cancel{1+e^t}}{u}}\,du$ ($u' \times u$ avec $u : x \mapsto \ln(x)$)

$$= \left[\frac{1}{2}\ln^2(u)\right]_2^{e+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln^2(e+1) - \cancel{\tfrac{1}{2}}\ln^2(2)\right)$$

Hugo D. Colle de la semaine n°24

Exercice 1. Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\left[\forall x, y, \in \mathbb{R}, \qquad 2yf(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t.\right] \quad (*)$$

Solution : Procédons par analyse - synthèse

(A) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $(*)$

Soit $a \in \mathbb{R}$, par le TFA $F \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{array} \right.$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$(*) \Rightarrow 2y\,f(x) = F(x+y) - F(x-y)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} 2yf(x) = \frac{d}{dy}\left(F(x+y) - F(x-y)\right)$$

$$\Rightarrow 2f(x) = F'(x+y) + F'(x-y)$$
$$= f(x+y) + f(x-y)$$

Or avec $y = \frac{1}{2}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a par $(*)$ $f(x) = F(x+\frac{1}{2}) - F(x-\frac{1}{2})$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Donc $2f(x) = f(x+y) + f(x-y) \Rightarrow \frac{d}{dy} 2f(x) = \frac{d}{dy}\left(f(x+y) + f(x-y)\right)$

$$\Rightarrow 0 = f'(x+y) - f'(x-y)$$

Soit $z \in \mathbb{R}$, pour $x = y = \frac{z}{2}$ on a $f'(z) = f'(0)$ donc f' est constante sur $\mathbb{R}$.

Donc f est de la forme $f : x \mapsto ax+b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

(S) Soit $f \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax+b \end{vmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

- f est continue
- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)dt = \int_{x-y}^{x+y} at+b \, dt$

$$= a\int_{x-y}^{x+y} t\,dt + 2yb \quad \text{(linéarité de l'}\textstyle\int\text{)}$$

$$= a\left[\frac{t^2}{2}\right]_{x-y}^{x+y} + 2yb$$

$$= \frac{a}{2}\left(x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2\right)+2yb$$

$$= 2axy+2yb$$

Et $2yf(x) = 2axy+2yb$

Donc l'ensemble des fonctions continues vérifiant $\circledast$ sont les fonctions affines.

Antoine B.

$n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \longrightarrow \ln(2)$.

Une Solution: $\ln$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(Formule de Taylor avec reste intégral:)

$a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\ln^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)}{n!} \ln^{(n+1)}(t)\,dt.$$

$x \leftarrow 2$

$a \leftarrow 1$

$$\ln(2) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!}}_{S} + \underbrace{\int_1^2 \frac{(2-t)}{n!} \ln(t)\,dt}_{I}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \ln^{(k)}(1) = (k-1)! \times (-1)^{k+1}$$

d'où $\displaystyle S = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ✓

$$I = \int_1^2 \frac{(2-t)}{n!} \ln(t)\,dt \overset{\text{linéarité de }\int\text{'s}}{=} \frac{1}{n!}\int_1^2 2\ln(t)\,dt - \frac{1}{n!}\int_1^2 t\ln(t)\,dt$$

IPP: $t \mapsto \ln(t)$, $t \mapsto \frac{1}{2}t^2$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$= \frac{2}{n!}\left[\frac{1}{2}\ln(x)^2\right]_1^2 - \frac{1}{n!}\left(\left[\frac{1}{2}t^2\ln(t)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 t^2 \times \frac{1}{t}\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{n!} \times \left[\frac{1}{2}\ln(x)^2\right]_1^2 - \frac{1}{n!}\left(2\ln(2) - 1 + 1/4\right)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $S + I \longrightarrow \ln(2)$. ✓