Ibrahim. K

Colle de la Semaine 22

Ex 1 :

Exercice 1. *On définit deux parties E et F de $\mathbb{R}^4$ de la manière suivante :*

$$E = Vect(\ (-1,2,1,0),(-1,2,0,1)\ ) \qquad et \qquad F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, y = -2z + t\}$$

1. *Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*
   En déterminer la dimension ainsi qu'un système d'équations cartésiennes.
2. *Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*
   En déterminer une base et la dimension.
3. *Compléter la base de F trouvée à la question précédente en une base de $\mathbb{R}^4$.*
4. *On pose $G = E \cap F$. Déterminer une base de G et sa dimension.*

1) E est sev de $\mathbb{R}^4$ car il est engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

on a $(-1, 2, 1, 0)$ et $(-1, 2, 0, 1)$ qui sont non colinéaire donc $((-1, 2, 1, 0), (-1, 2, 0, 1))$ est base de

donc $\dim(E) = 2$

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \iff \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & x \\ 2 & 2 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$ a une sol

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & x \\ 0 & 0 & y+2x \\ 0 & -1 & z+x \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & x \\ 0 & -1 & z+x \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & y+2x \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & x \\ 0 & -1 & z+x \\ 0 & 0 & t+z+x \\ 0 & 0 & y+2x \end{array}\right) \iff t+z+x = y+2x = 0$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} t+z+x = 0 \\ y+2x = 0 \end{array} \right.$$

$F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = -2z + t \}$

$\Leftrightarrow \{ y + 2z - t = 0$

donc

$F = \{ (x, -2z+t, z, t) : (x, z, t) \in \mathbb{R} \}$

$= \mathrm{Vect}\left(\overbrace{(1, 0, 0, 0)}^{u_1}, \overbrace{(0, 2, 1, 0)}^{u_2}, \overbrace{(0, 1, 0, 1)}^{u_3} \right)$

Étudions la liberté de (u_1, u_2, u_3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-2} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ainsi la famille est libre donc

$\dim(F) = 3$.

3'- Vérifier que (u_1, u_2, u_3, e_2) est libre où $e_2 = (0, 1, 0, 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice est échelon à 4 pivots

la famille est libre et de cardinal

$4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ ainsi

(u_1, u_2, u_3, e_2) est base de $\mathbb{R}^4$.

4 car $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x + y = 0 \\ x + z + t = 0 \\ y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + 2z - t = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + 2z - t = 0 \\ y - 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y + 2z - t = 0 \\ -4z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}t - t = -\frac{5}{4}t \\ y = \frac{1}{2}t + t = \frac{3}{2}t \\ z = \frac{-1}{4}t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = \left(\frac{-5}{4}t, \frac{3}{2}t, \frac{-1}{4}t, t\right)$$

ainsi $G = \mathrm{Vect}\left(\frac{-5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{-1}{4}, 1\right) = \mathrm{Vect}(-5, 12, -1, 4)$

Or $(-5, 11, -1, 4) \neq (0, 0, 0, 0)$

donc $\dim(G) = 1$.

Tigüin, David — Colle de la semaine 22

2.7

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'application $u : (x, y, z) \mapsto (z - y, x - z, y - x)$.
0) Montrer que u est linéaire.
1) Déterminer $Im(u)$ et $Ker(u)$.
2) Montrer que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont supplémentaires dans E.
3) u est-il un projecteur ?

0) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $X \in M[x]$ tel que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X^T\right)^T = X \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Par distributivité matricielle u est linéaire

1) · On sait que les vecteurs $\overset{u_1}{(0,1,-1)}, \overset{u_2}{(-1,0,1)}, \overset{u_3}{(1,-1,0)}$ sont libres et appartiennent à $\mathbb{R}^3$ et à $Im(u)$. Comme $Im(u)$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ par minimalité $Vect(u_1, u_2, u_3) \subset Im(u)$.
L'inclusion réciproque étant claire

$Im(u) = Vect(u_1, u_2, u_3)$

· Par théorème du rang on déduit que la dimension de $Ker(u) = 0$ d'où $Ker(u) = \{(0,0,0)\}$.

2) La somme des dim des deux ensembles étant 3, montrons que

$Im(u) \cap Ker(u) = \{(0,0,0)\}$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose le système

$$\begin{cases} -\lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_1 - \lambda_3 = y \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = z \end{cases}$$ d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = y \\ \lambda_2 - \lambda_3 = z + y \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = x \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = y \\ \lambda_2 - \lambda_3 = z + y \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

L'unique solution est $(0,0,0)$ d'où
$\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

3) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, calculons $u^2((x,y,z))$

$$\begin{aligned} u(u(x,y,z)) &= u(z-y,\ x-z,\ y-x) \\ &= (y-x-x+z,\ z-y-y+x,\ x-z-z+y) \\ &= (-2x+y+z,\ x-2y+z,\ x+y-2z) \neq u(x,y,z) \end{aligned}$$

Ainsi u n'est pas un projecteur

MANGIACOMONI
Amélien

Colle semaine 22

Démontrer que pour tout $n \geq 0$: $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$
$\exists ! Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $P = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$

Cela revient à montrer que l'application

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \text{ (espaces vectoriels)} \\ Q \longmapsto \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} \end{array} \right. \quad \text{est bijective}$$

Mq f est linéaire ; Soit $\left| \begin{array}{l} (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$

Or $f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_1 P_1^{(k)} + \lambda_2 P_2^{(k)}$

$$= \lambda_1 \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P_1^{(k)}}_{f(P_1)} + \lambda_2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P_2^{(k)}}_{f(P_2)}$$

Comme f est linéaire et $\left((X^k)_{k \in [\![0;n]\!]} \right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (degré échelonnés)

donc f est bijective si $\left((f(X^k))_{k \in [\![0;n]\!]} \right)$

est aussi une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On a $\forall k \in [\![0;n]\!]$ $\deg(f(X^k))$

$$= \deg\left(\sum_{i=0}^{n} (X^k)^{(i)}\right)$$

$$= \deg X^k$$

$$= k$$

Donc on a une famille de $n+1$ polynomes de degré différents donc libre dans $\mathbb{R}_n[X]$ (degrés échelonnés) de plus :

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}_n[X])}_{n+1} = \underbrace{\dim\left(\left(f(X^k)\right)_{k\in[\![0;n]\!]}\right)}_{n+1}$$

donc $\left(f(X^k)\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et f est bien bijective.

Colle de la semaine 22

Adam M.

Exercice : Montrer que l'application $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, x - z)$ est linéaire, en donner aussi le noyau et le rang.

Solution :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \longrightarrow (x+y, x-z) \end{array} \right.$$

Soit $\underbrace{(x_1, y_1, z_1)}_{\underline{a_1}} \in \mathbb{R}^3$, $\underbrace{(x_2, y_2, z_2)}_{\underline{a_2}} \in \mathbb{R}^3$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\lambda \underline{a_1} + \mu \underline{a_2}) &= f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda x_1 + \mu x_2 - \lambda z_1 - \mu z_2) \\ &= \lambda (x_1 + y_1, x_1 - z_1) + \mu (x_2 + y_2, x_2 - z_2) \\ &= \lambda f(\underline{a_1}) + \mu f(\underline{a_2}) \end{aligned}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff (x+y, x-z) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{(z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1, -1, 1)$

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie

D'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$$

Léon Subout

Enoncé

Semaine 22.

On note dans $\mathbb{R}^3$: $u=(-1,2,0)$ $v=(3,-9,-1)$, $w=(0,1,-2)$, et $t=(1,-2,7)$

Montrer que $\mathcal{B}=(u,v,w)$ est une base dans $\mathbb{R}^3$ puis déterminer les coordonnées de t.

Solutions.

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w=(x,y,z)$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & x \\ 2 & -9 & 1 & y \\ 0 & -1 & -2 & z \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+2x \\ 0 & -1 & -2 & z \end{array}\right) \quad L_2\leftarrow L_2+2L_1$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+2x \\ 0 & 0 & -1 & z+y+2x \end{array}\right) \quad L_3\leftarrow L_3+L_2$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & z+2y+4x \\ 0 & 0 & -1 & z+y+2x \end{array}\right) \quad L_2\leftarrow L_3+L_2$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 0 & 0 & -11x-6y-3z \\ 0 & \boxed{1} & 0 & z+2y+4x \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & z+y+2x \end{array}\right)$$

en evaluant en $(0,0,0)$ on a $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ donc $\mathcal{B}$ est libre. $\dim(\mathcal{B})=3=\dim(\mathbb{R}^3)$ donc

Pour une base de $\mathbb{R}^3$
en évaluant en $(1, -2, 1)$ on a
$\lambda_1 = 2$.
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = -1$

Hugo D.

Semaine de colle n°22

Soient $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$

$e = (1, \dots, 1)$, $G = \mathrm{Vect}(e)$

1) Donner les dimensions de F et G

2) Montrer que F et G sont supplémentaires de $\mathbb{R}^n$

3) Soit p la projection de $\mathbb{R}^n$ sur F parallèlement à G.
Déterminer $p(u)$ pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

Solution :

1) $\left.\begin{array}{l} \cdot\ (e) \text{ engendre } G \\ (e) \text{ libre} \end{array}\right\} \Rightarrow \dim(G) = 1$

$\cdot$ $\boxed{C}$ Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in F$

Donc $x_1 = -x_2 - \dots - x_n$

Ainsi $\underline{x} = (-x_2 - \dots - x_n, x_2, \dots, x_n)$

D'où $\underline{x} = x_2 \underbrace{(-1, 1, \dots, 0)}_{u_2} + x_3 \underbrace{(-1, 0, 1, \dots, 0)}_{u_3} + x_n \underbrace{(-1, 0, \dots, 1)}_{u_n}$

Donc $\underline{x} \in \mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_n)$

$\boxed{D}$ $\left.\begin{array}{l} u_2 \in F \\ \vdots \\ u_n \in F \\ F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \overset{\text{Minimalité}}{\Rightarrow} \mathrm{Vect}(u_2, \dots, u_n) \subset F$

Comme $(u_2, \dots, u_n)$ libre, $(u_2, \dots, u_n)$ forme une base de F

Donc $\dim(F) = n - 1$

2) Montrons que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

$\boxed{\supset}$ ✓

$\boxed{\subset}$ Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in F \cap G$

Donc $x_1 + \dots + x_n = 0$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in [1, n]$ $x_i = \lambda$

Donc $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda = \lambda n$.

Donc $\lambda = 0$ et $\underline{x} = 0_{\mathbb{R}^n}$

Comme $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\dim(F) + \dim(G) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$

on a que $F \oplus G = E$

3) Soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

(A) Supposons qu'il existe $x_F = (x_1, \dots, x_n) \in F$, $x_G \in G$

tel que $u = x_F + x_G$ $\quad x_G = (\lambda, \dots, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Donc $\forall i \in [1, n]$ $x_i + \lambda = u_i$

Ainsi $\lambda n + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{0} = \sum_{i=1}^{n} u_i$

Donc $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i$ et $x_F = (u_1 - \lambda, \dots, u_n - \lambda)$

(S) Soit x_F et x_G comme en fin d'analyse

- $x_G \in G$
- $x_F + x_G = u$

- $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} u_i - \frac{n}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i = 0$ donc $x_F \in F$

On en déduit que $p(u) = \left(u_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i, \dots, u_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i\right.$

Maximilien T. Colle de la Semaine 27

Exercice 1 On note

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-3x+2y-4z, 2x+2z, 4x-2y+5z) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Calculer $\varphi \circ \varphi$.
3. Que peut-on en déduire sur φ.
4. Caractériser géométriquement φ.

Solution :

1) Soit $X = (x \ y \ z) \in \mathbb{R}^3$

Applique ϕ revient à multiplier X tel que $\phi(X) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A} X^T \right)^T$

$\Rightarrow \phi(X) = X \overset{B}{A^T}$

Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$\phi(\lambda X + \mu Y) = (\lambda X + \mu Y)B = \underbrace{\lambda X B}_{\phi(X)} + \mu \underbrace{Y B}_{\phi(Y)}$

Ainsi ϕ est linéaire

2) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\phi \circ \phi(x, y, z) = \phi(-3x + 2y - 4z, 2x + 2z, 4x - 2y + 5z)$

$= -3x + 2y - 4z, 2x + 2z, 4x - 2y + 5z$

Donc $\phi \circ \phi = \phi$

3) Ainsi ϕ est un projecteur

4) Donc $\mathbb{R}^3 = Ker(\phi) \oplus Im(\phi)$

Pour trouver $Ker(\phi)$ nous résolvons le système suivant

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons $Ker(\phi) = Vect(-1, \frac{1}{2}, 1)$ avec $\underbrace{(-1, \frac{1}{2}, 1)}_{U}$ base de $Ker(\phi)$.

Cherchons maintenant $Im(\phi)$ de $dim(Im(\phi)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Ker(\phi)) = 2$

Par le cours $Im(\phi) = Vect(\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3))$

$$= Vect(\underbrace{(-3, 2, 4)}_{v_1}, \underbrace{(2, 0, -2)}_{v_2}, \underbrace{(-4, 2, 5)}_{v_3})$$

Nous savons que la famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas libre

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$ On retombe sur le système précédent.

On en déduit $Im(\phi) = Vect(v_1, v_2)$ avec (v_1, v_2) libre

Donc (v_1, v_2) base de $Im(\phi)$

Antoine B. colle de la semaine 22.

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants.

$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$

et

$G = \mathrm{Vect}((1,2,1,1),(1,2,-3,1),(5,-3,-2,5))$

1. Calculer la dimension de F.
2. Montrer que $G \subset F$
3. Montrer que $G = F$.

Une solution :

1. soient $(x,y,z,t) \in F$.

$$S : \begin{cases} x+y+z = 0 & (L_1) \\ 2x+y+z-t = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$S \iff \begin{cases} x+y+z = 0 \\ 0-y-z-t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y-z = +z+t-z = t-z. \\ y = -z-t \end{cases}$$

$$F = \{(t-z, -z-t, z, t) : (z,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \mathrm{Vect}(\underbrace{(-1,-1,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(1,-1,0,1)}_{v_2})$$

$v_1 \not\parallel v_2$, la famille (v_1, v_2) libre dans F et gén de F donc c'est une base de F.

$\Rightarrow \dim(F) = 2.$

2. $G = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{(1,-2,1,1)}_{u_1}, \underbrace{(1,2,-3,1)}_{u_2}, \underbrace{(5,-3,-2,5)}_{u_3}\right)$

Est-ce que u_1, u_2 et u_3 vérifient les équations de F : $x+y+z=0$

$2x+y+z-t=0$

où $(x,y,z,t) = u_i$ $i \in [\![1,3]\!]$.

$u_1 = (1,-2,1,1)$

- $1-2+1=0$ ✓
- $2+(-2)+1-1=0$ ✓

$u_2 = (1,2,-3,1)$

- $1+2-3=0$
- $2+2-3-1=0$

$u_3 = (5,-3,-2,5)$

$5-3-2=0$

$10-3-2-5=0$ ✓

$\left.\begin{array}{l}(u_1,u_2,u_3) \in F^3 \\ F \text{ sev de } \mathbb{R}^4\end{array}\right\} \overset{\text{minimalité}}{\Longrightarrow} G = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) \subset F.$

3. $G \subset F$ et (u_1,u_2) libre $\left(\text{en effet : } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\right)$

donc $\dim(G) \geq 2$

(GCF) $\left.\begin{array}{l}\dim(G) \geq 2 \\ \dim(G) \leq 2\end{array}\right\} \Longrightarrow \dim(G) = 2$, $G = F$. (sev)

Célia A. Rapport de colle semaine 22.

énoncé :

Exercice 1. Soient

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0\}$$

$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 4z + 3t = 0\}$$

$$H = \mathrm{Vect}\left((-3,1,1,1),\ (6,2,-1,-2),\ (3,11,2,-1)\right).$$

1. Donner une base et la dimension de $F \cap G$.
2. En déduire que $H = F \cap G$.

Solution. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

1. $(x,y,z,t) \in F \cap G$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{2x} - y + 4z + 3t = 0 \\ \underline{y} - 4z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z,t) \in \{-3t,\ 4z - 3t,\ z,\ t \ :\ (z,t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}(u_1 = (-3,-3,0,1),\ u_2 = (0,4,1,0)).$$

Ainsi, $\underline{(u_1, u_2) \text{ est une base de } F \cap G \text{ et } \dim(F \cap G) = 2.}$

2. $\boxed{\subset}$ Montrons que $H \subset F \cap G$.

Par le calcul, nous déterminons que $(-3,1,1,1) \in F \cap G$.

En effet, $\cdot\ -3 \times 2 - 1 + 4 + 3 = -7 + 7 = 0$

$\cdot\ 1 - 4 + 3 = 0$.

De même, $(6,2,-1,-2)$ et $(3,11,2,-1) \in F \cap G$.

De plus, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

(ensemble de solutions d'un système linéaire homogène à inconnues dans $\mathbb{R}^4$).

Par minimalité, $H \subset F \cap G$.

$\boxed{\supset}$ Nous raisons par dimension.

Nous venons de démontrer que $H \subset F \cap G$. Or, $\dim(F \cap G) = 2$.
Donc $\dim(H) \leq 2$.

H n'est pas vide et ne contient pas uniquement le singleton vecteur nul : $(-3, 1, 1, 1) \in H$.
Donc $\dim(H) \neq 0$.

Prenons $(-3, 1, 1, 1)$ et $(6, 2, -1, -2)$.
$-3 \times (-2) = 6$, mais $1 \times \frac{1}{2} = 2$.
Donc $(-3, 1, 1, 1)$ et $(6, 2, -1, -2)$ ne sont pas colinéaires. Alors $\dim(H) \neq 1$.

Par conséquent, $\dim(H) = 2$ et $H \subset F \cap G$.
D'où

$$\boxed{H = F \cap G.}$$

Anaï D.

Rapport de colle S22

Exercice 1. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = 0 \text{ Et } y - 2z = 0\},$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + z = y + t\}.$$

On admet que V et W sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. Donner une base de V, une base de W et une base de $V \cap W$.
2. Montrer que $E = V + W$.

Solution :

1) • Base de V

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z \end{cases}$$

D'où $V = \{(4z, 2z, z, t),\ (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \mathrm{Vect}(\underbrace{(4, 2, 1, 0)}_{v_1}, \underbrace{(0, 0, 0, 1)}_{v_2})$

v_1 et v_2 sont non colinéaire donc (v_1, v_2) est libre et (v_1, v_2) base de V

• Base de W

Soit $(x, y, z, t) \in E$ tel que

$x + z = y + t$

$\Leftrightarrow \quad x = y - z + t$

D'où $W = \{(y - z + t, y, z, t) : (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\}$

$= \mathrm{Vect}(\underbrace{(1, 1, 0, 0)}_{w_1}, \underbrace{(-1, 0, 1, 0)}_{w_2}, \underbrace{(1, 0, 0, 1)}_{w_3})$

Montrons que (w_1, w_2, w_3) libre

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Donc (w_1, w_2, w_3) est libre et (w_1, w_2, w_3) est une base de W

• Base de $V \cap W$

Soit $u \in V \cap W$ Il existe $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $u = (x, y, z, t)$ et

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3z - t = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} t \\ y = \frac{2}{3} t \\ z = \frac{1}{3} t \end{cases}$$

D'où $V \cap W = \{(4t, 2t, t, 3t) \quad t \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}((4, 2, 1, 3))$ libre

Donc $(4, 2, 1, 3)$ base de $V \cap W$

Anaïs D

Rapport de colle S22 partie 2

2. Montrons que $E = V + W$

D'après la formule de Grassmann

$$\begin{aligned} \dim(V+W) &= \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) \\ &= 2 + 3 - 1 \\ &= 4 \\ &= \dim(E) \end{aligned}$$

Donc $E = V + W$

Alexandre M. Semaine de colle 23

9.
Nature et éléments caractéristiques de l'application linéaire
$f:(x;y;z)\mapsto(x-2y-2z;4x-5y-4z;-4x+4y+3z)$.
(On pourra commencer par calculer $f\circ f(x;y;z)$*)*

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$f\circ f(x,y,z)=f(f(x,y,z))$$

$$=f(x-2y-2z;4x-5y-4z;-4x+4y+3z)$$

$$=(x-2y-2z-2(4x-5y-4z)-2(-4x+4y+3z);$$
$$4(x-2y-2z)-5(4x-5y-4z)-4(-4x+4y+3z);$$
$$-4(x-2y-2z)+4(4x-5y-4z)+3(-4x+4y+3z))$$

$$=(x,y,z)$$

Donc f est linéaire et involutive, il s'agit d'une symétrie

Détermination des sev supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

Soit (x,y,z)

$$f(x,y,z)=(x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y-2z=x\\4x-5y-4z=y\\-4x+4y+3z=z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2z = 0 \\ 4x - 6y - 4z = 0 \\ -4x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y - 4z = 0 \\ -4x + 4y + 2z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$
$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y - 4z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
[on obtient donc fois la même ligne]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} z \\ y = -z \end{cases}$$

$G := \{(-\frac{1}{2}z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-\frac{1}{2}, -1, 1))$

libre

$f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = -x \\ 4x - 5y - 4z = -y \\ -4x + 4y + 3z = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ 4x - 4y - 4z = 0 \\ -4x + 4y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ 4x - 4y - 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\Leftrightarrow \{ x = y + z$$

$F := \{(y+z, y, z) : (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(\underbrace{(1,1,0), (1,0,1)}_{\text{non colinéaires donc libre}})$

on a $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim G + \dim F$ (cohérent)

donc $f \Big| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 = G \oplus F = \mathrm{Vect}((-\frac{1}{2}, -1, 1), (1,1,0), (1,0,1)) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x - 2y - 2z, 4x - 5y - 4z, -4x + 4y + 3z) \end{array}$

Jules R. Colle de la semaine 22

Énoncé : Soit f l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \longmapsto (x+y,\ x-y,\ x+y) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est linéaire.
2. L'application f est-elle surjective ?
3. Déterminer le noyau de f et son image.
4. L'application est-elle injective ?

Solution :

1. Soit $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$

$$f(\lambda.(x_1,y_1) + \mu(x_2,y_2)) = f((\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2))$$

$$= (\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2,\ \lambda x_1 + \mu x_2 - \lambda y_1 - \mu y_2,\ \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2)$$

$$= (\lambda(x_1+y_1) + \mu(x_2+y_2),\ \lambda(x_1-y_1) + \mu(x_2-y_2),\ \lambda(x_1+y_1) + \mu(x_2+y_2))$$

$$= \lambda.f(x_1,y_1) + \mu.f(x_2,y_2)$$

2. $((0,1),(1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$

or $(\underbrace{f(0,1)}_{(1,-1,1)}, \underbrace{f(1,0)}_{(1,1,1)})$ n'est pas une famille gén. de $\mathbb{R}^3$

donc f non surjective

3. Formule du rang :

$$\dim(\mathbb{R}^2) = rg(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^2)}_{=2} = \underbrace{rg(f)}_{\dim(Im(f))=2} + \dim(Ker(f))$$

donc $\dim(Ker(f)) = 0$

donc $Ker(f) = \{0_E\}$

donc f injective (Q4)

$$Im(f) = Vect(f(0,1), f(1,0))$$
$$= Vect((1,-1,1),(1,1,1))$$

Pierre T. Colle de la semaine 22

Exercice : Soient f et g des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.
Comparer $\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(f+g)$ ainsi que $\ker(f)$ et $\ker(f^2)$.

Solution :

Soit $y \in \mathrm{Im}(f+g)$.
$\exists x \in \mathbb{R}^n \quad f+g(x) = y$
$\exists x \in \mathbb{R}^n \quad \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)} + \underbrace{g(x)}_{\in \mathrm{Im}(g)} = y \quad \in \mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$
donc $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$.

Si $f = id_{\mathbb{R}^n}$ et $g = -id_{\mathbb{R}^n}$, $\mathrm{Im}(f+g) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^n$
donc $\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$ n'est pas nécessairement inclus dans $\mathrm{Im}(f+g)$ si $n \geq 1$.

Soit $x \in \ker(f)$.
$f(x) = 0 \Rightarrow f(f(x)) = f(0) = 0$
$\Rightarrow x \in \ker(f^2)$.
donc $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

Si $n=0$ ou $n=1$, $\ker(f) = \ker(f^2)$ (si $n=1$ f est nulle ou bijective).
Si $n \geq 2$ soit $f_1 \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \begin{cases} e_1 & \text{si } e_n^*(x) \neq 0 \\ 0_{\mathbb{R}^n} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$

$f_1(e_n) = e_1 \quad$ et $f_1^2(e_n) = f_1(e_1) = 0$
donc $\ker(f^2)$ n'est pas nécessairement inclus dans $\ker(f)$.

Nicolas.H

Colle de la semaine 22

Enoncé

Soit E un espace vectoriel et p un projecteur de E. On note $q = id - p$

a) Montrer que q est un projecteur

b) Montrer que $\ker q = \operatorname{Im} p$ et que $\ker p = \operatorname{Im} q$

c) Montrer que $p + q = Id$

d) Montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$

Solution

a) $q^2 = (id - p)^2 = id^2 - idp - pid + p^2$

$= id - 2p + p^2$

$\underset{p \text{ projecteur}}{=} id - p$

$= q$

Donc q est un projecteur

b) Montrons que $\ker q = \operatorname{Im} p$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \ker q$

$q(x) = id(x) - p(x) = 0_E$

$\Rightarrow id(x) - p(x) = 0_E$

$\Rightarrow x = p(x) \in \operatorname{Im}(p)$

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in \operatorname{Im} p$

$\exists x \in E \quad p(x) = y$.

$q(y) = id(y) - p(y)$

$= p(x) - p^2(x)$

$= p(x) - p(x)$

$= 0$

Montrons que $Ker(p) = Im(q)$

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in Im(q)$

$\exists x \in E$ tel que $q(x) = y$

$q(y) = y - p(y)$

$\Rightarrow q(q(x)) = q(x) - p(y)$

$\underset{q \text{ projecteur}}{\Rightarrow} \quad q(x) = q(x) - p(y)$

$\Rightarrow p(y) = 0_E \Rightarrow y \in Ker(p)$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in Ker(p)$

$q(x) = x - p(x)$

$\Rightarrow q(x) = x$

$\Rightarrow x \in Im(q)$

c) On a $q = id - p$

par opération sur les fonctions,

$q + p = id$

d) $p = id - q$ et $q = id - p$

$p \circ q = id \circ (q) - q \circ (q)$

$= q - q^2$

$= q - q$

$= 0_{\mathcal{L}(E,E)}$

$q \circ p = id \circ p - p \circ p = p - p^2 = 0_{\mathcal{L}(E,E)}$

Sauer
Léon

Colle de la semaine n°20

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi)$$

1) montrer que $\dim E$ est paire
2) montrer que $\varphi^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Solution :

1) D'après le théorème du rang :

comme f est de rang fini $(\mathrm{Im}\, f \subset E)$

$$\dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \underbrace{\dim \mathrm{Im}(\varphi)}_{\dim \mathrm{Ker}\, \varphi} = \dim(E)$$

On a $2\,\mathrm{Ker}(\varphi) = \dim(E)$

On a montré que $\dim E$ était pair.

2) Soit $x \in E$, $\varphi(x) \in \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}\, \varphi$

ainsi $\varphi(\underbrace{\varphi(x)}_{\in \mathrm{Ker}\, \varphi}) = 0$, comme $\varphi^2 \in \mathcal{L}(E)$ et $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{L}(E)$, on a montré $\varphi^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Moyen. 6

Colle de la semaine n° 22

Exercice : On note dans $\mathbb{C}^4$:

$x_1 = (1, i, 1, 0)$, $x_2 = (1, 0, 1, 1)$,

$x_3 = (i, i, i, 0)$, $x_4 = (1, 1, 2, 0)$ et

$x = (1, 1, 1, 1)$

a) Montrer que les x_i forment une base de $\mathbb{C}^4$

b) Donner les coordonnées de x dans cette base

Solution :

a) Montrons que les x_i sont générateurs de $\mathbb{C}^4$

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$

$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{C}^4$

$(a, b, c, d) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 + \lambda_4 = a \\ i\lambda_1 + i\lambda_3 + \lambda_4 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 + 2\lambda_4 = c \\ \lambda_2 = d \end{cases}$$

d'une $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{C}^4$

a une solution

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 + \lambda_4 = a \\ i\lambda_1 + i\lambda_3 + \lambda_4 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 + 2\lambda_4 = c \\ \lambda_2 = d \end{cases}$$

d'une — a une solution

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 + \lambda_4 = a \\ -i\lambda_2 + (1+i)\lambda_3 + (1-i)\lambda_4 = b - ia \quad L_2 \leftarrow L_2 - iL_1 \\ \lambda_4 = c \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \lambda_2 = d \end{cases}$$

d'une — a une solution

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 + \lambda_4 = a \\ -i\lambda_2 + (1+i)\lambda_3 + (1-i)\lambda_4 = b - ia \\ \lambda_4 = c \\ (1-i)\lambda_3 - (1+i)\lambda_4 = d + ib - a \quad L_4 \leftarrow L_4 - iL_2 \end{cases}$$

d'une — a une solution

On s'aperçoit qu'en échangeant deux lignes, le système est échelonné. On tire les solutions

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - \lambda_4 - i\lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_2 = (b - ia - (1-i)\lambda_4 - (1+i)\lambda_3) \\ \lambda_3 = (d + ib - a + (1+i)\lambda_4)\frac{1}{1-i} \\ \lambda_4 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - \frac{i}{1-i}(d+ib-a+c-ic) - b+ia-ic \\ \qquad + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)(d+ib-a+c+ic) \\ \lambda_1 = a-b+ia-ic + \frac{1}{1-i}(d+ib-a+ic-c) \\ \lambda_2 = b-ia-c+ic - \frac{1+i}{1-i}(d+ib-a+c+ic) \\ \lambda_3 = (d+ib-a+c+ic)\frac{1}{1-i} \\ \lambda_4 = c \end{cases}$$

Donc x_i gen de $\mathbb{C}^4$

En specialisant pour $(a,b,c,d) = (0,0,0,0)$

On obtient aussi que x_i libre dans $\mathbb{C}^4$

Donc x_i base de $\mathbb{C}^4$

b) Avec $(a,b,c,d) = u = (1,1,1,1)$

On obtient

$$\lambda_1 = 1 - \frac{i}{1-i}(1+i-1+1-i) - 1+i-i$$

$$\lambda_1 = \frac{-i}{1-i}$$

$$\lambda_2 = 1-i-1+i + \frac{1}{1-i}(1+i-1+i-1)$$

$$= \frac{1}{1-i}(-1+2i)$$

$$\lambda_3 = (1+i-1+1+i) = 1+2i$$

$$\lambda_4 = 1$$

Louis, D

Semaine de colle n° 22

Montrer que l'application suivante est linéaire puis déterminer une base de son noyau et une base de son image.

① ② ③

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+2y+z+t, 2x+4y+6t, x+2y+2z-t, x+2y-2z+5t) \end{cases}.$$

1) $\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) \mapsto \left(\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}^{X} \right)^T \end{array} \right.$

est linéaire par distributivité du produit matriciel.

2) On résout $AX = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^4$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$(S) \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = t = 0 \end{cases}, \ y \in \mathbb{R}$$

Donc $Sol_{(S)} = Vect((-2,1,0,0)) = Ker(\varphi)$

3) Etudions la liberté de la famille $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$ gén de $Im(\varphi)$

$\varphi(e_1) = (1,2,1,1)$ et $\varphi(e_2) = (2,4,2,2) = 2\varphi(e_1)$

Donc $Vect(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)) = Vect(\varphi(e_1), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$

Le théorème du rang donne :

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^4)}_{4} = \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))}_{1} + \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$$

Donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3$.

La famille $(\varphi(e_1), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$ à 3 vecteurs $= \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$.
C'est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$

Louis B

Khôlle de la semaine 22

On considère l'application définie par

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto (-3x-y+z,\ 8x+3y-2z,\ -4x-y+2z) \end{array} \right.$$

1) Dq f est linéaire
2) Déterminer une base du noyau de f
3) L'application f est-elle injective
4) Rang de f
5) f est-elle surjective
6) Déterminer une base de $Im(f)$

---

1) On considère la matrice associée à f :
Soit $X=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(X) = (x,y,z)\begin{pmatrix} -3 & 8 & -4 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{K}^2$, $(X_1, X_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$

$f(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 f(X_1) + \alpha_2 f(X_2)$ par linéarité du produit matriciel

Donc f est linéaire

2) On résout $f(x,y,z) = 0$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}((\frac{1}{4}, -1, 1))$

3) Comme $\ker(f) \neq \{0\}$, f non injective

4) Théorème du rang : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\ker(f)) + rg(f)$

$\Rightarrow 3 = 1 + rg(f)$

$\Rightarrow rg(f) = 2$

5) $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^3) \neq \dim(\mathrm{Im}(f))$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \neq \mathrm{Im}(f)$

$\Rightarrow f$ non surjective

6) D'après 2), on cherche $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$

tq $\alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \alpha_3 f(e_3) = 0$

et on obtient $\begin{cases} -\alpha_2 = \alpha_3 \\ \frac{1}{4}\alpha_1 = \alpha_3 \end{cases}$

donc $\frac{1}{4} f(e_1) - f(e_2) = -f(e_3)$

Donc $f(e_3) \in \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2))$

et comme $f(e_1) \not\parallel f(e_2)$ alors

$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2))$

NISS

Mathieu

Rapport de colle semaine 22

Exercice 1. Soient

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0\}$$

$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 4z + 3t = 0\}$$

$$H = \mathrm{Vect}\left((-3,1,1,1),\ (6,2,-1,-2),\ (3,11,2,-1)\right).$$

1. Donner une base et la dimension de $F \cap G$.
2. En déduire que $H = F \cap G$.

1. Solution :

1) Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tq $u \in F \cap G$

$u \in F \cap G$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2x} - y + 4z + 3t = 0 \\ \boxed{y} - 4z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6t = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ y - 4z + 3t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t \\ y = 4z - 3t \end{cases}$$

Ainsi : $F \cap G = \{(-3t ; 4z - 3t ; z ; t) : (z,t) \in \mathbb{R}^2\}$

$$= \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{(-3 ; -3 ; 0 ; 1)}_{u}, \underbrace{(0, 4, 1, 0)}_{v}\Big)$$

(u,v) non colinéaire, on a : $\dim(F \cap G) = 2$

2) Montrons que $H = F \cap G$.

Soit $H = \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{(-3,1,1,1)}_{u}, \underbrace{(6,2,-1,-2)}_{v}, \underbrace{(3,11,2,-1)}_{w}\Big)$

Montrons que u, v et w appartiennent à $F \cap G$.

$$u : \left.\begin{array}{l} -6 - 1 + 4 + 3 = 0 \Rightarrow u \in F \\ 1 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow u \in G \end{array}\right\} \Rightarrow u \in F \cap G$$

$$v : \left.\begin{array}{l} 12 - 2 - 4 - 6 = 0 \Rightarrow v \in F \\ 2 + 4 - 6 = 0 \Rightarrow v \in G \end{array}\right\} \Rightarrow v \in F \cap G.$$

$$w : \left.\begin{array}{l} 6 - 11 + 8 - 3 = 0 \Rightarrow w \in F \\ 11 - 8 - 3 = 0 \Rightarrow w \in G \end{array}\right\} \Rightarrow w \in F \cap G.$$

De plus on a : F et G sev car ensembles solutions d'équations homogènes

d'où : $F \cap G$ sev.

Aim : $\left.\begin{array}{l} (u, v, w) \in (F \cap G)^3 \\ F \cap G \text{ sev} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{minimalité}} \underset{F \cap G}{\underset{\cap}{\mathrm{Vect}(u, v, w)}} = H$

On a u et v non colinéaires donc

$\dim(H) \geq 2$

et $H \subset F \cap G \Rightarrow \dim(H) \leq 2 = \dim(F \cap G)$

Aim : $\dim(H) = \dim(F \cap G)$

Donc H étant sev ($0_{\mathbb{R}^4} \in H$ et $H \subset F \cap G$ sev)

on a : $H = F \cap G$.

Exercice 3 :

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3$,
$u(e_2) = 3e_2$,
$u(e_3) = -4e_1 + 4e_3$,

1. Determiner une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

Soit $x \in E$ tq $u(x) = 0$
$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tq $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$

$$u(x) \underset{u \text{ lin}}{=} \lambda_1 u(e_1) + \lambda_2 u(e_2) + \lambda_3 u(e_3)$$

$$= -2\lambda_1 e_1 + 2\lambda_1 e_3 + 3\lambda_2 e_2 - 4\lambda_3 e_1 + 4\lambda_3 e_3$$

$$= e_1(-2\lambda_1 - 4\lambda_3) + e_2 3\lambda_2 + e_3(2\lambda_1 + 4\lambda_3)$$

Comme (e_1, e_2, e_3) base et $u(x) \in E$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_3 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 2\mu_1 & = 0 \\ & 3\mu_2 = 0 \\ -\lambda - 2\mu_1 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 2\mu_1 & = 0 \\ \mu_2 & = 0 \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \\ -\mu_1 & = 0 \qquad L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu_2 = 0 \\ \mu_1 = 0 \end{cases}$$

Donc $x = 0_E$.

Donc $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

ie $(2e_1 - e_3, u(e_1), u(e_2))$ est une base de $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Comme $\left| \begin{array}{l} (2e_1 - e_3, u(e_1), u(e_2)) \text{ libre} \\ \mathrm{Card}(2e_1 - e_3, u(e_1), u(e_2)) = 3 = \dim(E) \end{array} \right.$

$(2e_1 - e_3, u(e_1), u(e_2))$ est une base de E.

Au final, $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$.

$(= \mathrm{Vect}(2e_1 - e_3, u(e_1), u(e_2)))$

Stanislas G

Semaine de colle n° 21

Exercice 1 Montrer que l'application suivante est linéaire puis déterminer une base de son noyau et une base de son image.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x+3y+2z, 3x+y+2z) \end{array} \right. .$$

Solution :

$$\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto (x+y+z,\ x+3y+2z,\ 3x+y+2z) \end{array} \right.$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(y, x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ $\quad x = (x_1, y_1, z_1)$, $y = (x_2, y_2, z_2)$

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \varphi(\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)) = \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2)$$

$$= (\lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2 + \lambda z_1 + \mu z_2,\ \lambda x_1 + \mu x_2 + 3(\lambda y_1 + \mu y_2) + 2(\lambda z_1 + \mu z_2),\ 3(\lambda x_1 + \mu x_2) + \lambda y_1 + \mu y_2 + 2(\lambda z_1 + \mu z_2))$$

$$= \lambda(x_1 + y_1 + z_1,\ x_1 + 3y_1 + 2z_1,\ 3x_1 + y_1 + 2z_1) + \mu(x_2 + y_2 + z_2,\ x_2 + 3y_2 + 2z_2,\ 3x_2 + y_2 + 2z_2)$$

$$= \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$$

donc φ est linéaire

<u>Ker</u>(φ) Soit $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(u) = (0,0,0)$, $u = (x, y, z)$

$$(S) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

donc $\mathcal{S}ol_{(S)} = \{(-\frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}z, z) : z \in \mathbb{R}\}$
$= \mathrm{Vect}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

donc $((-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1))$ génératrice de Ker (φ)
libre dans $\mathbb{R}^3$

donc c'est une base de Ker (φ)

Im (φ) est de dimension 3 (thm du rang)

Raphaël Mouchonnet colle semaine n° 22

Énoncé :

Soit E un espace vectoriel de $\mathbb{K}$.
p un projecteur de E et on pose $q = Id_E - q$

Solution :

1) Montrer que q est un projecteur.

Soit $x \in E$.

$$q^2(x) = q(Id(x) - p(x))$$
$$= q(Id(x)) - q(p(x)) \quad \text{(q linéaire comme somme de fonction linéaire)}$$
$$= x - p(x) - p(x) + p^2(x)$$
$$= x - p(x) = q(x)$$

p projecteur

donc q est un projecteur.

2) Montrer que $\ker(q) = Im(p)$.

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in Im(p)$. $\exists x \in E$ tel que $p(x) = y$

donc $p^2(x) = p(y) \underset{p \text{ proj}}{=} p(x) = y$

$\Longrightarrow y - p(y) = y$ et $y \in \ker(q)$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \ker(q)$.

$$x - p(x) = 0_E \Longrightarrow p(x) = x$$
$$\Longrightarrow x \in Im(p)$$

Montrer que $\ker(p) = Im(q)$

$\boxed{\supset}$ Soit $y \in Im(q)$. $\exists x \in E$ tel que $x - p(x) = y$

donc $\underbrace{p(x) - p^2(x)}_{0_E} = p(y)$

et $y \in \ker(p)$

Comme p et q projecteurs.

$$E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \ker(q) \oplus \mathrm{Im}(q)$$

donc $\dim(E) = \dim(\ker(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p))$

$$= \underbrace{\dim(\ker(q))}_{=\dim(\mathrm{Im}(p))} + \dim(\mathrm{Im}(q))$$

donc $\dim(E) - \dim(\ker(q)) = \dim(\mathrm{Im}(q))$
$= \dim(\ker(p))$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Im}(q) \subset \ker(p) \\ \dim(\mathrm{Im}(q)) = \dim(\ker(p)) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\mathrm{Im}(q) = \ker(p)}$$

3) Montrer que $p + q = Id_E$

Les fonctions ont meda

$$p + q = p + Id_E - p = Id_E$$

4) Montrer que $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Les trois fonctions ont meda.

Soit $x \in E$.

$$p(q(x)) = p(x - p(x)) \underset{lin}{=} p(x) - p^2(x) \underset{prg}{=} 0$$

$$q(p(x)) = p(x) - p^2(x) \underset{prg}{=} 0$$

Donc $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Robin G. Colle de la semaine 22

Soit f endomorphisme de E $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Montrer que :
$$\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$$

Solution :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. • $\exists x \in E$, $f(x) = y$
• $f(y) = 0$

$f(f(x)) = f(y) = 0$
donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$

$x \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $\underbrace{f(x)}_{=y} = 0$

$\boxed{\supset}$ clairement car $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ sev. de E comme intersection de sev. de E.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$.
Alors $f(f(x)) = 0$
$\left.\begin{array}{l}\text{Donc } f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \\ \text{or, } f(x) \in \mathrm{Im}(f)\end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$

Donc $f(x) = 0$ ie. $\underline{x \in \mathrm{Ker}(f)}$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. $f(x) = 0$. $f(f(x)) = 0_E$ car f linéaire, donc $\underline{x \in \mathrm{Ker}(f^2)}$

Lina.A

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y+x = t+z = 0\} \\ &= \mathrm{Vect}((-1,1,0,0),(0,0,-1,1)). \end{aligned}}$$

3. $(0,0,-1,1) \in F$

$(-1,1,0,0) = (0,1,2,-2) + 2(0,0,-1,1) - (1,0,0,0) \in F$

F sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

Par minimalité : $\underline{E \subset F}$.

4. D'après (1)

(u_1, u_2) est une base de E et $\dim(E) = 2$.

Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4.

Il nous faut compléter (u_1, u_2) par 2 vecteurs pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

$\cdot\ e_1 = (1,0,0,0) \notin E \quad e_2 = (0,1,0,0) \notin E$

Vérifions si (u_1, u_2, e_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^4$

Comme $\dim(\mathbb{R}^4) = \mathrm{Card}(u_1, u_2, e_1, e_2)$

Il suffit de montrer que (u_1, u_2, e_1, e_2) est libre

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4 \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \mu_2 e_2 + \mu_1 e_1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = \mu_2 = \mu_1 = \lambda_1 = 0$$

Donc $\underline{(u_1, u_2, e_1, e_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$.

Lina. A

Colle de la semaine 22.

Exercice 6. *On définit deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ par*

$$E = Vect(\ (1,-1,3,-3),(2,-2,4,-4),(3,-3,7,-7),(1,-1,1,-1)\ )$$

$$\text{et} \qquad F = Vect(\ (1,0,1,-1),(0,1,2,-2),(1,0,0,0),(0,0,-1,1)\ ).$$

1. *Donner une base et la dimension de E.*
2. *Déterminer un système d'équations cartésiennes de E.*
3. *Montrer que $E \subset F$.*
4. *Compléter la base de E précédemment trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.*

Solution :

1. Comme E est engendré par les vecteurs $u_1=(1,-1,3,-3)$, $u_2=(2,-2,4,-4)$, $u_3=(3,-3,7,-7)$, $u_4=(1,-1,1,-1)$.
alors (u_1,u_2,u_3,u_4) est une famille génératrice de E
Vérifions si elle est libre.
Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{K}^4$ $\quad \sum_{i=1}^{4} \lambda_i u_i = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -7 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+3L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_2 - 3\lambda_3 - \lambda_4 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 - \lambda_4 \end{cases} \qquad (\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_4 - \lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_4 - \lambda_3 \end{cases} \qquad (\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2$$

$$Sol(S) = \{ (\lambda_4 - \lambda_3, -\lambda_4 - \lambda_3, \lambda_3, \lambda_4) : (\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

Pour $\lambda_4 = 0$ et $\lambda_3 = 1$

$-u_1 - u_2 + u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = u_1 + u_2$

$\Rightarrow u_3 \in Vect(u_2, u_1)$

Pour $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = 1$

$u_1 - u_2 + u_4 = 0 \Rightarrow u_4 = u_2 - u_1 \in Vect(u_2, u_1)$

Comme u_2 et u_1 ne sont pas colinéaires

Donc <u>(u_2, u_1) est une base de E</u>

et <u>$\dim(E) = 2$</u>

2. Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$

$(x, y, z, t) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & x \\ -1 & -2 & -3 & -1 & y \\ 3 & 4 & 7 & 1 & z \\ -3 & -4 & -7 & -1 & t \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y+x \\ 0 & -2 & -2 & -2 & z-3x \\ 0 & 2 & 2 & 2 & t+3x \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y+x \\ 0 & -2 & -2 & -2 & z-3x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+z \end{array}\right)$$

Rapport de colle, Semaine 22

Wassim M.

Exercice :

Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$

$G = \text{Vect}\{\underbrace{(1,-2,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,2,-3,1)}_{v_2}, \underbrace{(5,-3,-2,5)}_{v_3}\} \subset \mathbb{R}^4$

1) Calculer la dimension de F
2) Montrer que $G \subset F$ et conclure que $G = F$
3) Determiner un supplementaire de F

Solution :

1) On cherche une base de F

$$(x,y,z,t) \in F \iff \begin{cases} x+y+z = 0 \\ 2x+y+z-t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z = 0 \\ -y-z-t = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\iff \begin{cases} x = t \\ y = -z-t \end{cases}$$

donc $F = \text{Vect}\left(\underbrace{(0,-1,1,0)}_{u_1}, \underbrace{(1,-1,0,1)}_{u_2}\right)$

Ainsi $\dim(F) = 2$

2) Verifions si v_1, v_2 et v_3 appartiennent à F

$v_1 = (1, -2, 1, 1)$

$1 - 2 + 1 = 0$
$2 - 2 + 1 - 1 = 0$

donc $v_1 \in F$ De même pour v_2 et v_3

Par consequent $G \subset F$

Montrons que $G = F$ ie $\dim(G) = \dim(F)$

$v_1 \not\parallel v_2$ donc $\dim(G) \geq 2$ et $G \subset F$ donc $\dim(G) \leq 2$

donc $\dim(G) = 2 = \dim(F)$

3) Verifions si (u_1, u_2, e_1, e_3) base de $\mathbb{R}^4$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow -L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow -L_3 + L_2 \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} L_4 \leftarrow -L_4 + L_3$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ donc (u_1, u_2, e_1, e_3) base de $\mathbb{R}^4$

Par consequent, $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ est un supplementaire de F dans $\mathbb{R}^4$

Mehdi B. Colle de la semaine

9.
Nature et éléments caractéristiques de l'application linéaire
$f:(x;y;z)\mapsto(x-2y-2z;4x-5y-4z;-4x+4y+3z)$.
(*On pourra commencer par calculer* $f\circ f(x;y;z)$)

<u>Solution:</u> Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Nous calculons :

$$f\circ f(x,y,z)=f(x-2y-2z,\ 4x-5y-4z,\ -4x+4y+3z)$$
$$=\big((x-2y-2z)-2(4x-5y-4z)-2(-4x+4y+3z),$$
$$4(x-2y-2z)-5(4x-5y-4z)-4(-4x+4z+3z),$$
$$-4(x-2y-2z)+4(4x-5y-4z)+3(-4x+4y+3z)\big)$$
$$=(x,y,z).$$

$f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $f^2=id_E$, <u>f est donc une symétrie sur $\mathbb{R}^3$</u>. Nous savons alors :

$$\mathbb{R}^3=\mathrm{Ker}(f-id_E)\oplus\mathrm{Ker}(f+id_E)$$

• Déterminons $\mathrm{Ker}(f-id_E)$.
Soit $(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f-id_E)$. Alors $f(x,y,z)=(x,y,z)$ i.e

$$\begin{cases}x-2y-2z=x\\4x-5y-4z=y\\-4x+4y+3z=z\end{cases}\iff\begin{pmatrix}0&-2&-2\\4&-6&-4\\-4&4&2\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}4&-6&-4\\0&-2&-2\\-4&4&2\end{pmatrix}\ L_1\leftrightarrow L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} y - z = 0 & L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1 \\ y + z = 0 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} z \\ y = -z \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - id_E) = \{(-\tfrac{1}{2}z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(-1, -2, 2)}$$

- Déterminons $\mathrm{Ker}(f + id_E)$. Soit $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f + id_E)$.

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = -x \\ 4x - 5y - 4z = -y \\ -4x + 4y + 3z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ \cancel{4x - 4y - 4z = 0} \\ \cancel{-4x + 4z + 4z = 0} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y + z.$$

Il vient :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f + id_E) = \{(y+z, y, z) : (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,1,0), (1,0,1))}$$

<u>Conclusion</u> : f est la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à la droite engendrée par le vecteur $(-1, -2, 2)$, parallèlement au plan engendré par les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$

2.10

Soit E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie, et $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F)^2$.
Montrer que $rg(u+v) \leq rg(u) + rg(v)$.
En déduire $|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u+v)$.

SOLUTION

1) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dim finie, $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F)^2$

Montrons que $rg(u+v) \leq rg(u) + rg(v)$,

i.e Mq $\dim(\mathrm{Im}(u+v)) \leq \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(v))$.

Comme $\mathrm{Im}(u+v), \mathrm{Im}(u), \mathrm{Im}(v)$ sont des sev de F qui est de dimension finie, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(u+v)$.

Alors $\exists x \in E$ tq $y = (u+v)(x) = u(x) + v(x)$

Or $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et $v(x) \in \mathrm{Im}(v)$

donc $u(x) \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ et $v(x) \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$

$\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ sev $\Rightarrow u(x) + v(x) \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$

$\Rightarrow y \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$

Donc $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$, ce qui livre

$rg(u+v) \leq rg(u) + rg(v)$.

2) On sait que $rg(u) = rg(u+v-v) \leq rg(u+v) + rg(-v)$ par Q1

Or $rg(-v) := \dim(\mathrm{Im}(-v)) = \dim(\mathrm{Im}(v)) = rg(v)$

Donc on a que $rg(u) \leq rg(u+v) + rg(v) \Rightarrow rg(u) - rg(v) \leq rg(u+v)$

De même, on a que $rg(v) - rg(u) \leq rg(u+v)$

Ainsi $|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u+v)$ (supérieur à un nombre et son inverse)

Lours Guillaume S. Colle de la semaine 22

Exercice : Montrer que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $(x, y) \mapsto (x+y, x-y)$ est linéaire et bijective, déterminer également sa réciproque.

Solution : Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \mapsto (x+y\,;\, x-y) \end{array} \right.$

① Linéarité : Soit $X = (x;y) \in \mathbb{R}^2$

Remarquons que $f(X) = X \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}$

Soit $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$, $(X;Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$f(\lambda X + \mu Y) = (\lambda X + \mu Y)A = \underbrace{\lambda XA}_{f(X)} + \mu \underbrace{YA}_{f(Y)}$ (Distributivité et mult. par scalaire pour les matrices)

Donc f est linéaire

② Bijectivité :

• Injectivité Soit $(\lambda_1;\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ $\lambda_1 x + \lambda_2 y = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Ainsi $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Alors on déduisons que $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et donc que f est injective

• Surjectivité : Par la formule du rang nous avons

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\ker(f)) + rg(f)$$

$$\Rightarrow rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \dim(\mathbb{R}^2)$$

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ nous en déduisons que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. f est donc surjective

L'application f est donc bijective. Etudions son application réciproque.
Cela revient à résoudre la matrice augmentée suivante :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2 \quad \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

Ainsi nous en déduisons :

$$\boxed{f^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y ; \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \end{array} \right.}$$

Sophie G

Colle de la semaine 22

On note dans $\mathbb{C}^4$: $x_1 = (1; i; 1; 0)$

$x_2 = (1; 0; 1; 1)$

$x_3 = (i; i; i\ 0)$ et $x = (1; 1; 1;)$

$x_4 = (1; 1; 2; 0)$

a) Montrer que les x_i forment une base de $\mathbb{C}^4$

b) Donner les coordonnées de x dans cette base.

Solution

a) $\mathrm{Card}(\underbrace{x_1, x_2, x_3, x_4}_{\underline{x}}) = 4 = \dim(\mathbb{C}^4)$

Il suffit de montrer $\underline{x}$ libre

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$,

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x_i = 0$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & i & 1 \\ i & 0 & i & 1 \\ 1 & 1 & i & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & i & 1 \\ 0 & -i & (i+1) & (1-i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - iL_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{Donc } \underline{x} \text{ libre}$$

b) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$, $x = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i x_i$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & i & 1 & 1 \\ i & 0 & i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & i & 1 & 1 \\ 0 & -i & (i+1) & (1-i) & 1-i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - iL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_4 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow (i+1)\lambda_3 = 1 - i + i$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{i+1} = -\frac{1}{2}(i-1)$$

$$\lambda_1 = -1 + i\frac{1}{2}(i-1) = -1 - \frac{1}{2}(i+1) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

Donc $x = \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right)x_1 + x_2 - \frac{1}{2}(i-1)x_3 + 0$.

Pierre V. Colle de la semaine 22

On note

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y+3z, 3x-6y+9z, 2x-4y+6z) \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Calculer $\varphi \circ \varphi$.
3. Que peut-on en déduire sur φ.
4. Caractériser géométriquement φ.

Solution

1. Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

On a $\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x-2y+3z, 3x-6z+9z, 2x-4z+6z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} X^T \right)^T = X \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & -4 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}}_{:= A} \end{array} \right.$

Ainsi $\varphi(X) = XA$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)A = \lambda PA + \mu QA = \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q)$$

Donc φ est une application linéaire

2. $\varphi \circ \varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto ((x-2y+3z) - 2(3x-6y+9z) + 3(2x-4y+6z), \\ \quad 3(x-2y+3z) - 6(3x-6y+9z) + 9(2x-4y+6z), \\ \quad 2(x-2y+3z) - 4(3x-6y+9z) + 6(2x-4y+6z)) \end{array} \right. = (x-2y+3z, 3x-6y+9z, 2x-4y+6z)$

3. D'après 2., on a $\varphi \circ \varphi = \varphi$ donc φ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$

4. Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On en déduit ce système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - 6y + 9z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y + 3z = 0 & \\ 0 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \right.$$

Donc $Sol_{(S)} = \{ (2y-3z, y, z) : (y,z) \in \mathbb{R}^2 \}$

Ainsi $Ker(\varphi) = Vect(\underbrace{(2,1,0)}_{=u_1}, \underbrace{(-3,0,1)}_{=u_2})$

u_1 et u_2 sont non colinéaire donc (u_1, u_2) est une base de $Ker(\varphi)$

•) $(e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

donc $(f(e_1) = (1,3,2), f(e_2) = (-2,-6,-4), f(e_3) = (3,9,6)$ est une famille génératrice de $Im(\varphi)$

Ainsi $Im(\varphi) = Vect((1,3,2), (-2,-6,-4), (3,9,6))$

Or $f(e_2) = -2f(e_1) + 0f(e_3)$ et $f(e_3) = 3f(e_1)$

Donc $Im(\varphi) = Vect((1,3,2))$

•) Donc <u>φ est la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $Vect((1,3,2))$ parallèlement à $Vect((2,1,0),(-3,0,1))$</u>

Léa N.

Colle de la semaine n°. 22

Énoncé :

Exercice : Montrer que Ker $u \subseteq$ Ker $(v \circ u)$ et Im $(v \circ u) \subseteq$ Im v. Discuter des réciproques. Trouver aussi un cas où v est non bijective et Ker $u =$ Ker $(v \circ u)$, et un cas où u est non bijective et Im $v =$ Im $(v \circ u)$.

Solution :

Soient E, F, G $\mathbb{K}$-ev tel que $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$

- Montrons que $\mathrm{Ker}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(v \circ u)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$

i.e $u(x) = 0$

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0) = 0 \quad (v \text{ est linéaire})$$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$

- Étudions la réciproque.

Supposons $x \in \mathrm{Ker}(v \circ u)$

i.e $v(u(x)) = 0$

Pour que $x \in \mathrm{Ker}(u)$ i.e $u(x) = 0$

il suffit que v soit injective.

- Montrons que $\mathrm{Im}(v \circ u) \subseteq \mathrm{Im}(v)$

Soit $z \in \mathrm{Im}(v \circ u)$

i.e $\exists x \in E \quad z = v(\underbrace{u(x)}_{\in F})$

$\Rightarrow z \in \mathrm{Im}(v)$

- Étudions la réciproque.

Supposons que $z \in Im(v)$

ie $\exists y \in F \quad z = v(y)$

Pour que z appartienne à $Im(v(u(x)))$

il suffit que u soit surjective.

- Si $u = v$ un projecteur, on ~~on~~ obtient le cas d'égalité des noyaux $(Ker(u) = Ker(v \circ u))$ où v est non bijective.

- Si $u = v$ une symétrie, on obtient le cas d'égalité des images $(Im(v) = Im(v \circ u))$ où u est non bijective.

Tibuan
D

Rapport de colle

Montrer que l'application $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x, x-y, x+y) \end{array} \right.$ est linéaire, en donner aussi le noyau et le rang

Soit $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$
$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)) &= (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda x_1 + \mu x_2 - (\lambda y_1 + \mu y_2), \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= \lambda (x_1, x_1 - y_1, x_1 + y_1) + \mu (x_2, x_2 - y_2, x_2 + y_2) \\ &= \lambda f(x_1, y_1) + \mu f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est linéaire}}$

Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = (0,0)}$

De plus, par la formule du rang, on a

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}^2) &= \dim(\mathrm{Ker}(f)) + rg(f) \\ 2 &= 0 + rg(f) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{rg(f) = 2}$