Billy.G

Colle de la semaine 20

La famille $\big((1;2;1);(2;1;-1);(1;-1;-2)\big)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Est-elle libre ?

Solution : $F = \big(\underbrace{(1,2,1)}_{u_1}, \underbrace{(2,1,-1)}_{u_2}, \underbrace{(1,-1,-2)}_{u_3}\big)$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (x,y,z)$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & x \\ 2 & 1 & -1 & y \\ 1 & -1 & -2 & z \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & x \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & y-2x \\ 0 & -3 & -3 & z-x \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & -3 & -3 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & x-y+z \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

Cette équation possède des solutions, seulement si $x - y + z = 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, } F \text{ n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^3.}$

. En spécialisant $x \leftarrow 0$, $y \leftarrow 0$, $z \leftarrow 0$

On a : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2$$

Il vient : (L_1) $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$\lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ convient.

$\boxed{\text{Donc } F \text{ n'est pas libre.}}$

Léon Sibout

Énoncé

Semaine 20.

Soit E le $\mathbb{K}$-ev des suites convergentes.
Soit F l'ensemble des suites de limite nulle.
Montrer que F est un sev de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Résolution.

- $(0)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

$\forall ((u_n),(v_n),\lambda,\mu) \in F\times F \times \mathbb{K}\times\mathbb{K}$.

$\lambda(u_n)+\mu(v_n) = (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers 0 par somme et produit de limite donc appartient à F.

F est donc un sev de E.

- Soit C l'ensemble des suites constantes.

$(0) \in C$.

$\forall ((a),(b),\lambda,\mu) \in C\times C \times \mathbb{K}\times\mathbb{K}$.

$\lambda(a)+\mu(b)$ est constant donc appartient à C

C est un sev de E.

Soit $(u_n) \in E$.

$\exists \ell \in \mathbb{K} \quad u_n \to \ell$.

donc $u_n - \ell \to 0$ donc $(u_n - \ell) \in F$

(ℓ) est constant donc $(\ell) \in C$.

$(u_n) = (u_n - \ell) + \ell$.

donc $F + C = E$

il est clair que $F \cap C = \{(0)\}$.

donc $F \oplus C = E$

Louis B. Khôlle de la semaine 20

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$.

Soit • $F = \{ f \in E \mid f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi) \}$

• G le sev de E engendré par sin et cos

Montrer que F est un sev de E, et que F et G sont supplémentaires dans E

<u>F sev</u> : • $0_{\mathbb{R}^{[0,\pi]}} \in F$ donc $F \neq \emptyset$

• Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(f_1, f_2) \in F^2$

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0) &= \lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0) \quad \text{(linéarité)} \\
&= \lambda_1 f(\tfrac{\pi}{2}) + \lambda_2 f(\tfrac{\pi}{2}) \\
&= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\tfrac{\pi}{2}) \quad \text{ok} \\
&= \lambda_1 f(\pi) + \lambda_2 f(\pi) \\
&= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\pi) \quad \text{ok}
\end{aligned}$$

Donc f est un sev de E.

<u>supplementaires</u> : Soit $h \in E$

Mq $\exists! (f, g) \in F \times G$ tq $h = f + g$.

i.e. $\exists! (f, \lambda_1, \lambda_2) \in F \times \mathbb{R}^2$ tq $h = f + \lambda_1 \sin + \lambda_2 \cos$

on note μ la valeur $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(0) = f(0) + \lambda_2 \\ h(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) + \lambda_1 \\ h(\pi) = f(\pi) - \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(0) = \mu + \lambda_2 \\ h(\frac{\pi}{2}) = \mu + \lambda_1 \\ h(\pi) = \mu - \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(0) + h(\pi) = 2\mu \quad L_1 + L_3 \\ h(\frac{\pi}{2}) = \mu + \lambda_1 \\ h(\pi) = \mu - \lambda_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{h(0) + h(\pi)}{2} \\ h(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{h(0) + h(\pi)}{2} + \lambda_1 \\ h(\pi) = \dfrac{h(0) + h(\pi)}{2} - \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{h(0) + h(\pi)}{2} \\ \lambda_1 = h(\frac{\pi}{2}) - \dfrac{h(0) + h(\pi)}{2} \\ \lambda_2 = -h(\pi) + \dfrac{h(0) + h(\pi)}{2} = \dfrac{h(0) - h(\pi)}{2} \end{cases}$$

Ainsi h s'écrit d'une manière $h = f + g \Rightarrow F$ et G supplémentaires

Youssef. B

Colle de la semaine 20

Exercice 1 : Soient F_1 et F_2, deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Montrer que ($F_1 \cup F_2$ est un espace vectoriel) équivaut à (F_1 inclus dans F_2 ou F_2 inclus dans F_1).

Solution :

Mq $F_1 \cup F_2$ est un espace vectoriel $\iff$ $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$

$\boxed{\Leftarrow}$ si $F_1 \subset F_2$, alors $F_1 \cup F_2 = F_2$
si $F_2 \subset F_1$, alors $F_1 \cup F_2 = F_1$

Or, F_1 et F_2 sont des sev de E, donc $F_1 \cup F_2$ est un espace vectoriel

$\boxed{\Rightarrow}$ Supp par contraposition que $F_1 \not\subset F_2$ et $F_2 \not\subset F_1$
Mq $F_1 \cup F_2$ n'est pas un espace vectoriel.

soit $x \in F_1$ tq $x \notin F_2$
soit $y \in F_2$ tq $y \notin F_1$

$x \in F_1 \cup F_2$ et $y \in F_1 \cup F_2$ mais,
$x+y \notin F_1 \cup F_2$ car,

si $F_1 \cup F_2$ est un espace vectoriel, alors $x+y \in F_1$ ou $x+y \in F_2$
Or,
$(x+y)+(-y) = x \notin F_2$ ↯ si $x+y \in F_2$
$(x+y)+(-x) = y \notin F_1$ ↯ si $x+y \in F_1$

Dino T. Colle de la semaine 20

Exercice : On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Montrer que la famille $(\ln(p))_{p\in\mathcal{P}}$ est libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

<u>Solution :</u>

Soit $(\lambda_p)_{p\in\mathcal{P}} \in \mathbb{Q}^{(\mathcal{P})}$ tq $\sum_{p\in\mathcal{P}} \lambda_p \ln(p) = 0$.

$\exists q \in \mathbb{N}^* \ \forall p \in \mathcal{P} \ q\lambda_p \in \mathbb{Z}$.

donc $\sum_{p\in\mathcal{P}} q\lambda_p \ln(p) = 0$

$\Rightarrow \sum_{p\in\mathcal{P}} \ln(p^{q\lambda_p}) = 0$

$\Rightarrow \ln\left(\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{q\lambda_p}\right) = 0$

$\Rightarrow \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{q\lambda_p} = 1$

Soit $\mathcal{P}_1 = \{p\in\mathcal{P} : \lambda_p > 0\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{p\in\mathcal{P} : \lambda_p < 0\}$.

$\Rightarrow \underbrace{\prod_{p\in\mathcal{P}_1} p^{q\lambda_p}}_{\in\mathbb{N}} = \underbrace{\prod_{p\in\mathcal{P}_2} p^{-q\lambda_p}}_{\in\mathbb{N}}$

$\underset{q\neq 0}{\Rightarrow} (\lambda_p)_{p\in\mathcal{P}} = 0_{\mathbb{Q}^{\mathcal{P}}}$ par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.

Rémi Séchaud

Semaine de colle n°20

Exercice 8. *On considère* $E = \{(x+y, 2x-y, -3x+2y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ *muni des lois habituelles dans* $\mathbb{R}^3$. *Montrer que* E *est un espace vectoriel. En donner une base et une (les) équation(s).*

Solution :

$$E = \{ x(1;2;-3) + y(1;-1;2) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$$

- $(0;0) \in E$
- Soit $(u;v) \in E^2$, $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$

Montrons que $\lambda u + \mu v \in E$

$\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad u = x(1;2;-3) + y(1;-1;2)$

$\exists (x';y') \in \mathbb{R}^2 \quad v = x'(1;2;-3) + y'(1;-1;2)$

$$\lambda u + \mu v = \underbrace{(\lambda x + \mu x')}_{\in \mathbb{R}}(1;2;-3) + \underbrace{(\lambda y + \mu y')}_{\in \mathbb{R}}(1;-1;2)$$

Montrons que $((1;2;-3),(1;-1;2))$ est une base.

- génératrice :

$\boxed{\subset}$ $(1;2;-3) \in E$
$(1;-1;2) \in E$

E sev de $\mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{Vect}((1;2;-3);(1;-1;2)) \subset E$

$\boxed{\supset}$ $a \in E$, $\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$a = x(1;2;-3) + y(1;-1;2)$

$\subset \mathrm{Vect}(E)$

- libre : $((1;2;-3),(1;-1;2))$ ne sont pas colinéaire.

MANGIALORINI
Amélien

Rapport de Colle Semaine 20

2.10

Soient E un espace vectoriel, $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de E, $F = Vect(e_1, ..., e_p)$ et G un supplémentaire de F dans E. Pour $a \in G$, on définit $F_a = Vect(e_1 + a, ..., e_p + a)$.
Montrer que $F_a \oplus G = E$.
Montrer que si $a \neq 0$ alors $F_a \neq F$.

1

L_1 Soit $x \in E$ alors comme $F \oplus G = E$, $\exists! (u, v) \in F \times G$ tq $x = u + v$

$$\left(\begin{array}{l} u \in F \text{ donc } \exists (\lambda_i)_{i \in [\![1;p]\!]} \in \mathbb{K}^p \text{ tq} \\ u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \end{array} \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i + a)}_{\in F_a} + \underbrace{v - a \sum_{i=1}^{p} \lambda_i}_{\in G \text{ car } a \in G}$$

u' v'

Montrer que u' et v' sont uniques ie $F_a \oplus G$ sont en somme directe ie $F_a \cap G = \{0_E\}$.

$\boxed{\supset}$ $0_E \subset F_a \cap G$ clair.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in F_a \cap G$, comme $x \in F_a$ alors $\exists (\lambda_i)_{i \in [\![1;p]\!]} \in \mathbb{K}^p$ tq $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i + a)$

et $x \in G$ donc ;

$$\underbrace{x}_{\in G} - \underbrace{a\sum_{i=1}^{p}\lambda_i}_{\in G} = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i$$

$$\in G$$

Or comme $F \cap G = \{0_E\}$
alors $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i \in F \cap G = 0_E$

et comme $(e_1, \dots, e_p)$ est libre alors

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ et $x = 0_E$.

Donc $F_a \oplus G = E$.

2) Par contraposée ; $F_a = F \Rightarrow a = 0$.

Soit $\begin{cases} x \in F_a = F \\ x \neq 0_E \ (*) \end{cases}$ $\exists \begin{cases} (\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]} \text{ tq } x = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i \\ (\lambda'_i)_{i \in [\![1,p]\!]} \text{ tq } x = \sum_{i=1}^{p}\lambda'_i(e_i + a) \end{cases}$

Donc $\underbrace{\sum_{i=1}^{p}(\overbrace{\lambda_i - \lambda'_i}^{\in \mathbb{K}})e_i}_{\in F} = \underbrace{a\sum_{i=0}^{p}\lambda'_i}_{\in G}$ donc $= 0_E$

$(F \cap G = \{0_E\})$

or $\sum_{i=1}^{p}\lambda'_i \neq 0_E$ car $x \neq 0_E$ donc par intégrité ;

$a = 0$.

(*) existe car $F_a = F$ est distinct de $\{0_E\}$.

Colle de la semaine 18

Adam M.

Exercice 1. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid X\widetilde{P}(1) + (X^2 - 4)\widetilde{P}(0) = 0\}$.
Déterminer une base de F.

Solution :

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$

$\exists (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \quad P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$

$$
\begin{aligned}
P \in F &\iff X\widetilde{P}(1) + (X^2-4)\widetilde{P}(0) = 0 \\
&\iff X(a_0+a_1+a_2+a_3) + (X^2-4)a_0 = 0 \\
&\iff \begin{cases} a_0 - \qquad\qquad = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_0 \qquad\qquad = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -a_2 - a_3 \end{cases} \\
&\iff P = (-a_2 - a_3)X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \\
&\iff P = a_2(X^2 - X) + a_3(X^3 - X)
\end{aligned}
$$

Donc $((X^2-X), (X^3-X))$ est une famille génératrice de F

(X^2-X) et (X^3-X) ne sont pas colinéaire donc

$B = ((X^2-X), (X^3-X))$ est libre dans F

Donc B est une base de F

Jules R.

Colle de la semaine 20

Énoncé : Montrer que l'ensemble suivant est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

$$E = \{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f' - f \text{ est constante} \}$$

Solution :

À partir de l'ensemble de solutions d'une EDL 1, on a :

$$E = \mathrm{Vect}(e^x, 1)$$

Sachant que $\mathrm{Vect}(e^x, 1)$ est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ par définition, on a que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

Pierre V

Colle de la semaine 20

On note dans $\mathbb{R}_2[X]$: $A = 1+X+X^2$, $B = 1+2X+3X^2$, $C = 1+3X+5X^2$

a. Montrer que la famille (A,B,C) est liée

b. La famille (A,B,C) est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Solution

$A = 1+X+X^2$

$B = 1+2X+3X^2$

$C = 1+3X+5X^2$

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0$

ie $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + (\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)X + (\lambda_1+3\lambda_2+5\lambda_3)X^2 = 0$

(A,B,C) est liée $\Leftrightarrow (S) : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$ n'a pas une unique solution trivial

Résolvons (S) :

$$(S) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

Donc $Sol_{(S)} = \{(\lambda, -2\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Donc (A,B,C) est liée

Donc (A,B,C) ne peut pas être une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Louis D. Semaine de colles n° 20

Enoncé :

Soit E le $\mathbb{R}$ev des suites convergentes.
Soit F l'ensemble des suites de limite nulle.

Montrer que F est un sev de E et déterminer un supplémentaire de F dans E

Solution :

F sev :

- $F \neq \emptyset$ car la suite nulle est convergente de limite nulle

- Soit $(\lambda, \mu, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathbb{R}^2 \times F^2$

$$\lambda \underbrace{(u_n)}_{\downarrow\, 0} + \mu \underbrace{(v_n)}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow 0 \quad \left(\text{opérations sur les limites}\right)$$

$\in F$

F est bien un sous-espace vectoriel de E

Supplémentaire de F dans E

Ⓐ Supposons G supplémentaire de F dans E

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \quad \exists! ((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in F \times G$$

$$\underbrace{(u_n)}_{\downarrow\, l_1 \in \mathbb{R}} = \underbrace{(v_n)}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{(w_n)}_{\downarrow\, l_2 \in \mathbb{R}}$$

On pose $G := \{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \ w_n = w_0\}$
soit l'ensemble des suites constantes dans $\mathbb{R}$.

(S) Vérifions $F \oplus G = E$ par caractérisation.

- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F \cap G$

  Alors $v_n \to 0$
  et $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0$

Par passage à la limite pour les suites, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 0$.

Ainsi $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$

- Montrons que $F + G = E$

  [C] claire
  [D] (A) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$
  $\exists \ell \in \mathbb{R} \quad u_n \to \ell$

Supp $\exists! \ ((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in F \times G$ tq $(u_n) = (v_n) + (w_n)$
tq $v_n \to 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = w_0$

Alors par passage à la limite on a :
$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \ell = w_0$
Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \underbrace{u_n - \ell}_{\to 0}$ ($u_n \to \ell$)

(S) Nous avons donc candidats convient.

Ahmed
Amine

Rapport de colle

Énoncé :

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la loi externe suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x,y)) \longrightarrow (\lambda y, 0) \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2$ muni de l'addition usuelle et de cette loi est un $\mathbb{R}$-ev ?

Solution :

Soit $u \in \mathbb{R}^2$, $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $u = (x,y)$

On sait que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un ev s'il vérifie les 8 propriétés du cours.

Or, si on effectue : $1_{\mathbb{R}} \cdot u = 1_{\mathbb{R}} \cdot (x,y)$

$= (y, 0) \neq (x,y)$

Donc $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ n'est pas un espace vectoriel de $\mathbb{R}$

Sophie G.

Colle de semaine 20

Soient F et G les deux parties de $\mathbb{R}^4$ définies par

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array} \right\}$$

$$G = \mathrm{Vect}((1,1,1,0),(0,1,1,1))$$

1. Justifier F et G deux s-ev de $\mathbb{R}^4$
2. Montrer que F engendré par 2 vecteurs $\mathbb{R}^4$
3. Donner un système d'équations linéaires dont G est l'ensemble solution
4. Montrer $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$
5. Pour un vecteur quelconque $u=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ déterminer sa décomposition de x,y,z,t sur la somme $F \oplus G$.

1. Comme F est l'ensemble solution d'une équation linéaire homogène à 4 inconnues dans $\mathbb{R}^4$: F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Comme G est le plus petit sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ contenant $\begin{cases} (1,1,1,0) \\ (0,1,1,1) \end{cases}$ alors G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

2. Montrons

$\exists (u,v) \in \mathbb{R}^4, \mathrm{Vect}(u,v) = F$

ie

$\exists \mathrm{Vect}(u,v) = (x,y,z,t), \left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array} \right) *$

Resolvons $*$: $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -2y \quad -2t=0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-t \end{cases}$$

alors $F = \{(-z,-t,z,t) : (z,t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(\overbrace{(-1,0,1,0)}^{u}, \underbrace{(0,-1,0,1)}_{v})$

3. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$

$\lambda_1(1,1,1,0)+\lambda_2(0,1,1,1)=(x,y,z,t)$ a une sol

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = t \\ \lambda_1+\lambda_2 = y \\ \lambda_1+\lambda_2 = z \end{cases}$$ a une solution

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = t \\ \lambda_2 = y-x \\ \lambda_2 = z-x \end{cases}$$ a une solution $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2,\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = t \\ 0 = y-x-t \\ 0 = z-x-t \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2,\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = y-x-t \\ 0 = z-x-t \end{cases}$$

4. 5.

$\boxed{\supset}$ ✓

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathbb{R}^4$, $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $x=(a,b,c,d)$

Cherchons $(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^4$

$$(a,b,c,d) = \lambda_1(-1,0,1,0)+\lambda_2(0,-1,0,1) + \mu_1(1,1,1,0)+\mu_2(0,1,1,1)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 & 1 & b \\ -1 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -b \\ 0 & 0 & 2 & 1 & c+a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -b \\ 0 & 0 & 2 & 1 & c+a \\ 0 & 0 & 1 & 2 & d+b \end{array}\right) L_4 \leftarrow L_4 - L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & \frac{c+a}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & d+b \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 \times \frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & \frac{c+a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & \frac{2(d+b)-c-a}{2} \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$

$$\mu_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{2(d+b)-c-a}{2}\right)$$

$$\mu_1 = -\frac{d+b}{3} + \frac{2}{3}(c+a)$$

$$\lambda_2 = \frac{d+4b-c-a}{3} \qquad \lambda_1 = \frac{d+4b-c-a}{3}$$

Mehdi B. Colle de la semaine 20

EXERCICE 7 — Donner une base de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) := \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : M^\top = M\}$.

Solution $\boxed{C}$ Soit $M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

$\exists (a_1, a_2, a_3, a_{11}, a_{22}, a_{33}) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_{22} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}$$

M se décompose comme une combinaison linéaire de matrices élémentaires :

$$M = a_{11} E_{11} + a_1 (E_{12} + E_{21})$$
$$+ a_{22} E_{22} + a_2 (E_{13} + E_{31})$$
$$+ a_{33} E_{33} + a_3 (E_{23} + E_{32})$$

Donc $M \in \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12}+E_{21}, E_{22}, E_{13}+E_{31}, E_{33}, E_{23}+E_{32}) := F$.

Ainsi $\underline{\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \subset F}$

$\boxed{D}$ Soit $M \in F$. M se décompose comme avant. Comme pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $E_{ij}^T = E_{ji}$, la linéarité de la transposition donne $M^T = M$.

Donc $\underline{F \subset \mathcal{S}_3(\mathbb{R})}$.

La famille $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}+E_{21}, E_{22}, E_{13}+E_{31}, E_{33}, E_{23}+E_{32})$

est-elle libre ?

Soit $(\lambda_1 \dots \lambda_6) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$\lambda_1 E_{11} + \lambda_2 (E_{12}+E_{21}) + \lambda_3 E_{22} + \lambda_4 (E_{13}+E_{31})$$
$$+ \lambda_5 E_{33} + \lambda_6 (E_{23}+E_{32}) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

Cette égalité s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_4 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_6 \\ \lambda_4 & \lambda_6 & \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc clairement $\lambda_1 = \dots = \lambda_6 = 0$.

<u>Conclusion</u> : La famille $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et elle est libre. Ainsi avons-nous démontré :

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathcal{S}_3(\mathbb{R})}$$

Lina. A

Colle de la semaine 20

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère des vecteurs (x, y, z, t) qui vérifient l'équation $x+y+z+t=0$.
Donner une base de ce sous espace vectoriel.

Solution

Posons : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x+y+z+t=0\}$
F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car il est solution d'une équation linéaire homogène à inconnu dans $\mathbb{R}^4$.
Soit $u \in F$. $u = (x, y, z, t)$.
$u \in F \iff x = -y-z-t$
$\iff u = y(-1,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + t(-1,0,0,1)$
Donc les vecteurs $v_1 := (-1,1,0,0)$, $v_2 := (-1,0,1,0)$ et $v_3 := (-1,0,0,1)$ ~~sen~~ engendre F.

Montrons que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i = 0$.

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc la famille (v_1, v_2, v_3) est libre et génératrice de F. Par conséquent c'est une base de F

Rapport de Colle, semaine 20

Wissim

n

Quels sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ en sont des sous espaces vectoriels :

1) $F = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$
2) $F = \{(x,y) \mid x=y\}$
3) $F = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$
4) $F = \{(x,y) \mid x^2-y^2=0\}$
5) $F = \{(x,y) \mid x \leq y\}$
6) $F = \{(x,y) \mid x^2+y^2=0\}$

Solution :

1) $F = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

$0 \notin F$ donc F n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$

2) $F = \{(x,y) \mid x=y\}$

F est un sev de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'ensemble solution d'une equation linéaire homogène d'inconnues dans $\mathbb{R}^2$

3) $F = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

$u_1 = (1,0) \in F \qquad u_2 = (0,1) \in F$

$u_1 + u_2 = (1,1) \notin F$ donc pas stable par somme

donc F n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$

4) $F = \{(x,y) \mid x^2 - y^2 = 0\}$

$u_1 = (1,1) \in F \quad u_2 = (1,-1) \in F$

$u_1 + u_2 = (2,0) \notin F$

donc F n'est pas stable par somme

F n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$

5) $F = \{(x,y) \mid x \leq y\}$

$u = (0,1) \in F$ car $0 \leq 1$

$-1 \cdot u = (0,-1) \notin F$

Donc F n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$

6) $F = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$

$F = \{(0,0)\}$

$0 \in F \quad , \quad 0 + 0 = 0 \in F \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot 0 = 0 \in F$

donc F est un sev de $\mathbb{R}^2$

Antoine B.

colle de la semaine 20.

$$\boxed{F := \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : f \text{ est bornée} \}, \text{ est-ce un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ?}$$

<u>Une solution:</u>

- F contient $u_0 \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto 0 \end{array} \right.$

$(u_0 n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée car : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{0n}| \leq 0$.

donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in F$.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(u_1, u_2) \in F^2$.

Mq $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$ bornée

Mq (u_1) bornée par M_1

(u_2) bornée par M_2.

- $\lambda_1 u_1 \leq |\lambda_1 u_1| = |\lambda_1| |u_1| \leq |\lambda_1| M_1$
- $\lambda_2 u_2 \leq |\lambda_2 u_2| = |\lambda_2| |u_2| \leq |\lambda_2| M_2$.

Ainsi $|\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2| \underset{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} |\lambda_1 u_1| + |\lambda_2 u_2| \leq \underbrace{|\lambda_1| M_1 + |\lambda_2| M_2}_{\in \mathbb{R}}$

Stanislas G

Semaine de colle n°

21.

Dans $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$: $e_1(x)=1, e_2(x)=\cos^2(x), e_3(x)=\sin^2(x), e_4(x)=\cos(2x), e_5(x)=\cos^2(2x), e_6(x)=\cos(4x)$.

Déterminer la dimension du sous – ev $F = Vect(e_k)$ $k \in [\![1,6]\!]$.

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}$

$e_1(x) = 1$, $e_2(x) = \cos^2(x)$, $e_3 = \sin^2(x)$, $e_4 = \cos(2x)$,

$e_5(x) = \cos^2(2x)$, $e_6(x) = \cos(4x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$

1) $e_6(x) = 2\underbrace{\cos^2(2x)}_{e_5(x)} - \underbrace{1}_{e_1(x)} = \cos(4x)$

2) $e_4(x) = \underbrace{2\cos(2x)}_{e_2(x)} - \underbrace{1}_{e_1(x)} = \cos^2(2x)$ $\quad (2\cos^2(x) - 1 = \cos(2x))$

3) $e_1(x) = \underbrace{\cos^2(x)}_{e_2(x)} + \underbrace{\sin^2(x)}_{e_3(x)} = 1$

D'après 1, 2, 3 e_1, e_6 et e_4 sont combinaison linéaire de e_2, e_3 et e_5 donc comme

$$F = Vect((e_k)_{k\in[\![1,6]\!]})$$

on a $F = Vect(e_2, e_3, e_5)$ et (e_2, e_3, e_5) est génératrice de F

Supposons pour tout $x \in \mathbb{R}$ soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\lambda_1 \cos^2(x) + \lambda_2 \sin^2(x) + \lambda_3 \cos^2(2x) = 0$$

1) $x \leftarrow 0$

$\lambda_1 = -\lambda_3$

2) $x \leftarrow \frac{\pi}{2}$

$\lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda_1$

3) $x \leftarrow \pi$

$\lambda_1 = -\lambda_3$

Par absurde, supposons qu'il existe $(g,h) \in F \times G$ tq $f = g+h$.

Comme f 2-périodique, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) + h(x) = g(x+2) + h(x+2)$$

$$\Rightarrow \quad h(x) = h(x+2)$$

g 1-periodique
donc $g(x) = g(x+2)$

Donc h est 2-périodique, or $\lim_{+\infty} h = 0$

Donc $h = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.

Alors, $f = g$

Comme $f(0) \neq f(1)$ alors contradiction car g est 1-périodique

Donc $f \notin F \oplus G$.

NISS
MATHEO

Rapport de colle semaine 20.

Solution.

Exercice 1

La famille $(1;1;1;1);(1;2;2;1);(3;1;1;3);(1;2;3;4)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$? Est-elle libre ?

Soient $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$

On pose $u_1 = (1,1,1,1)$

$u_2 = (1,2,2,1)$

$u_3 = (3,1,1,3)$

$u_4 = (1,2,3,4)$

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tq :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = (x,y,z,t)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & 2 & y \\ 1 & 2 & 1 & 3 & z \\ 1 & 1 & 3 & 4 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & -2 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & -2 & 2 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & 3 & t-x \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 & x \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & 3 & t-x \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 & x \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-x\ 3z+3y \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \end{array}$$

Ainsi ce système a une solution que si $x = t - 3z + 3y$ (L_3)

donc $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$.

En spécialisant à 0 on a le système

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 & 0 \\ & \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ & & & \boxed{1} & 0 \\ & & & & 0 \end{array}\right)$$

Ce système possède 2 pivot : comme la matrice d'adjacence possède 4 colonne on en déduit par la proposition fondamentale du noyau que $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\}$

Ainsi, (u_1, u_2, u_3, u_4) n'est pas libre.

Mauchonnet Raphaël colle semaine n° 20

Enoncés :

Quels sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ est sous-espaces vectoriels de ce dernier.

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$

$(1,2) \in F$ or $-1 \times (1,2) = (-1,-2) \notin F$
donc F n'est pas un sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$

$(0,1) \in G$ et $(1,0) \in G$ or $(0,1)+(1,0) = (1,1) \notin G$
donc G n'est pas un sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$

est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car ensemble solution d'une equation linéaire homogène.

$I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$

$(-1,1) \in I$ et $(2,2) \in I$ or $(-1,1)+(2,2) = (1,3) \notin I$
Donc I n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

$J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = -y^2\}$.

Un carré réel étant toujours positif. Seul $(0,0) \in J$
donc $J = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ sous espaces vectoriel trivial de $\mathbb{R}^2$

$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$(0,0) \notin L$ qui n'est donc pas sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Hugo D.

Colle de la semaine 20

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}$ et $F_a := \{P \in \mathbb{K}_n[X] : \widetilde{P}(a) = \widetilde{P'}(a)\} \subset \mathbb{K}_n[X]$

1) Montrer que F_a est un sev de $\mathbb{K}_n[X]$

2) Montrer que $\mathrm{Vect}(X)$ est un supplémentaire de F_a dans $\mathbb{K}_n[X]$ si et seulement si $a \neq 1$

Une solution :

1) • $0_{\mathbb{K}[X]} \in F_a$ car $0'_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]}$ donc $\widetilde{0_{\mathbb{K}[X]}}(a) = \widetilde{0'_{\mathbb{K}[X]}}$

Donc $F_a \neq \emptyset$

• Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(P, Q) \in F_a^2$

$$\widetilde{(\lambda P + \mu Q)'}(a) = \widetilde{\lambda P' + \mu Q'}(a) \quad \text{(Linéarité de la dérivation)}$$

$$= \lambda \widetilde{P'}(a) + \mu \widetilde{Q'}(a) \quad \text{(Linéarité de l'évaluation)}$$

$$= \lambda \widetilde{P}(a) + \mu \widetilde{Q}(a) \quad (P \text{ et } Q \in F_a)$$

$$= \widetilde{\lambda P + \mu Q}(a) \quad \text{Donc } \lambda P + \mu Q \in F_a$$

Comme F_a non vide et stable par combinaison linéaire, F_a est un sev de $\mathbb{K}_n[X]$

2) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathrm{Vect}(X)$ est un supplémentaire de F_a dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Par l'absurde, on suppose que $a = 1$

On pose $P = X$. $\left.\begin{array}{l} P \in \mathrm{Vect}(X) \\ P \in F_1 \text{ car } \widetilde{P}(1) = 1 \text{ et } \widetilde{P'}(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P \in \mathrm{Vect}(X) \cap F_1$

Maximilien T. Colle de la Semaine 20

$E = \mathbb{R}_n[X]$, Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ tq $\deg(A) \overset{=k}{\in} [1, n]$

a. Mq $F = \{P \in E : A \mid P\}$ est un sous espace vectoriel de E

b. Déterminer un supplémentaire de F dans E

a. • $F \subset E$

• $F \neq \emptyset$ car $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$

• Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ Soit $(P_1, P_2) \in F^2$ Montrons que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in F$

• $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in E$

• $(P_1, P_2) \in F^2 \Rightarrow \exists (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ tq $\begin{cases} P_1 = AQ_1 \\ \text{et} \\ P_2 = AQ_2 \end{cases}$

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \lambda_1 A Q_1 + \lambda_2 A Q_2 = \underbrace{(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)}_{\in \mathbb{R}[X]} A$$

Donc $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in F$.

Ainsi F est un sous-espace vectoriel

b. (A) Soit G un sev tel que $F \oplus G = E$

Ainsi $\forall P \in E \ \exists! (f, g) \in F \times G$ tq $P = f + g$

$f \in F \Rightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tq $f = AQ$

On a donc $P = AQ + g$

Or en divisant P par A nous avons $\exists! (Q_2, R_2) \in \mathbb{R}[X]$

$P = AQ_2 + R_2$, $\deg(R_2) < k = \deg(A)$

Ainsi nous avons comme ensemble candidat $G = \{P \in R[X] : \deg(P) < k\}$
$= R_{k-1}[X]$

(5) ~~G~~ Soit G comme en fin d'analyse
G est un sev usuel.

Mq $F \oplus G = E$

<u>Somme directe</u> : Mq $F \cap G = \{0_{R[X]}\}$

$\boxed{\supset}$ ✓ $\boxed{\subset}$ Soit $P \in F \cap G \Rightarrow \exists Q \in R[X]$ $P = AQ$

Donc $\deg(P) = \deg(A) + \deg(Q) \Rightarrow \deg(Q) = \underbrace{\deg(P) - \deg(A)}_{<0 \text{ car } P \in G}$

$\Rightarrow Q = 0_{R[X]}$ et donc $P = 0_{R[X]}$

Montrons maintenant $F + G = E$

$\boxed{\subset}$ clair

$\boxed{\supset}$ Soit $P \in E$ alors avec la division euclidienne nous avons $\exists (Q, R) \in R[X] \times R_{k-1}[X]$ tq $P = \underbrace{AQ}_{\in F} + \underbrace{R}_{\in G}$.

donc $P \in F + G$.

Tigiin
David

Colle de la semaine 20

Exercice : Soient F, G et H des sous-espaces d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$. Montrer aussi que $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F \cap (G + H)$ et $F + (G \cap H) \subseteq (F + G) \cap (F + H)$ et discuter des inclusions réciproques.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $F \cap G = F + G$

Soit $u \in F + G$, alors $\exists (a, b) \in F \times G$ tel que $u = a + b$, comme $F + G = F \cap G$ alors $u \in F \cap G$ et a et b appartiennent à $F \cap G$. d'où $a \in G$, $b \in F$ et donc $F = G$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Clair

Soit $u \in (F \cap G) + (F \cap H)$ donc $\exists (a, b) \in (F \cap G) \times (F \cap H)$ tel que $u = a + b$. Comme a et b appartiennent à F

$u \in F$. Comme $a \in G$ et $b \in H$

$u \in (G + H)$ d'où $u \in F \cap (G + H)$

Soit $u \in F + (G \cap H)$ donc $\exists (a, b) \in F \times (G \cap H)$ tel que $u = a + b$. Comme $a \in F$ et $b \in G$ $u \in (F + G)$

comme $a \in F$ et $b \in H$ $u \in (F + H)$ d'où $u \in (F + G) \cap (F + H)$.

Soit trois sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ $\overset{F}{\mathrm{Vect}((1,0))}$, $\overset{G}{\mathrm{Vect}((0,0))}$, $\overset{H}{\mathrm{Vect}((0,1))}$

1. $G + H = \mathrm{Vect}((0,1))$ et $F \cap (G + H) = \mathrm{Vect}((0,1), (1,0))$

$(F \cap G) = \{(0,0)\}$, $F \cap H = \{(0,0)\}$ donc $(F \cap G) + (F \cap H) = \{(0,0)\}$

Ainsi la première inclusion réciproque est absurde.

2. Considérons maintenant les sev de $\mathbb{R}^2$ $F = \mathrm{Vect}((1,0))$
$G = \mathrm{Vect}((0,1))$ $H = \mathrm{Vect}((1,1))$
Ainsi $(F+G)\cap(F+H) = \mathrm{Vect}((1,1))$ et
$F+(G\cap H) = \mathrm{Vect}((1,0))$ donc l'inclusion
réciproque est absurde

Robin G. Colle de la semaine 20

Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels de E.
a) Montrer que $F \cap G = F + G \iff F = G$
b) Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$
c) Montrer que $F + (G \cap H) \subset (F+G) \cap (F+H)$

Solution :

a) $\boxed{\Leftarrow}$ Supp. $F = G$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in F \cap G = F$. $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in F + G$. $\exists (x_1, x_2) \in F \times G$ tq $x = \underbrace{x_1}_{\in F} + \underbrace{x_2}_{\in G = F}$

F est un sev de E stable par somme, donc $x \in F = F \cap G$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supp. $F \cap G = F + G$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in F$.

$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G = F \cap G \subset G$ ✓

$\boxed{\supset}$ Analogue.

b) Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$. $\exists (u, v) \in F \cap G \times F \cap H$ tq $x = u + v$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ u, v \in F \text{ donc } x \in F. \\ \cdot\ u \in G \text{ et } v \in H \text{ donc } x \in G + H. \end{array}\right\} \Rightarrow x \in F \cap (G + H)$

1/2

c) Soit $x \in F+(G\cap H)$, $\exists (u,v) \in F\times(G\cap H)$ tq $x = u+v$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ u \in F \\ \cdot\ v \in G\cap H \subset G \end{array}\right\} \Rightarrow x \in F+G$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ u \in F \\ \cdot\ v \in G\cap H \subset H \end{array}\right\} \Rightarrow x \in F+H$$

Donc $x \in (F+G)\cap(F+H)$.

2/2

ELIOTT.S.V. ÉNONCÉ : SEMAINE 20

Soient $F := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ et $G := \mathrm{Vect}(\{1,1,1\})$. Montrer que F et G sont des sous espaces de $\mathbb{R}^3$. Que vaut leur intersection ? Que vaut leur somme ?

1| F est un sev de $\mathbb{R}^3$ comme ensemble solution d'une equation linéaire homogène à inconnues dans $\mathbb{R}^3$.

G est un sev de $\mathbb{R}^3$ comme sev engendré par la famille $((1,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

2| Determinons $F \cap G$.

Soit $a \in F \cap G$.

$a \in F \Rightarrow \exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ a = (x_1, x_2, x_3)$ et $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$a \in G \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ a = (\lambda, \lambda, \lambda) = \lambda(1,1,1)$.

Ainsi, $(\lambda, \lambda, \lambda) = (x_1, x_2, x_3)$

$(\lambda, \lambda, \lambda) - (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0) \Rightarrow 3\lambda - x_1 - x_2 - x_3\ 0$

donc $3\lambda - (x_1 + x_2 + x_3) = 0$ i.e $3\lambda = 0 \iff \lambda = 0$.

Ainsi, $F \cap G = \{0\}$

3| Determinons $F + G$.

Soit $a \in F + G$.

alors $\exists (x_1, x_2, x_3, \lambda) \in \mathbb{R}^4,\ a = (x_1, x_2, x_3) + (\lambda, \lambda, \lambda),\ x_1 + x_2 + x_3 = 0$

donc $a = (x_1 + \lambda, x_2 + \lambda, x_3 + \lambda)$

$= (x_1 + \lambda)(1,0,0) + (x_2 + \lambda)(0,1,0) + (x_3 + \lambda)(0,0,1)$

donc $a \in \mathrm{vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3$, i.e $F + G = \mathbb{R}^3$.

Leers Guillaume S. Khelle de la semaine 20

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit F l'ensemble des fonctions de E périodiques de période 1 et G l'ensemble des des fonctions de E qui convergent vers 0 en $+\infty$.

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels.
2. Montrer qu'ils sont en somme directe.
3. Sont-ils supplémentaires ?

Solution :

1.

a) F est un espace vectoriel.

- Posons la fonction $a \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array} \right.$ qui appartient à F car 1 périodique.
- Soit $(f_1; f_2) \in F^2$, $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$. Mq $\lambda f_1 + \mu f_2 \in F$.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda f_1 \text{ est 1 périodique} \\ \mu f_2 \text{ est 1 périodique} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda f_1 + \mu f_2 \in F$$

Donc F est un espace vectoriel

b) G est un espace vectoriel.

- De même, remarquons que $a(x) \xrightarrow[x \mapsto +\infty]{} 0$ donc $a \in G$
- Soit $(g_1; g_2) \in G^2$, $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$. Mq $\lambda g_1 + \mu g_2 \in G$.

Par opérations sur les limites :

$$\forall (x) \in \mathbb{R} \qquad \lambda \underbrace{g_1(x)}_{\xrightarrow{x \mapsto +\infty} 0} + \mu \underbrace{g_2(x)}_{\xrightarrow{x \mapsto +\infty} 0} \in G$$

Donc G est un espace vectoriel.

2. Montrons que $F \oplus G$.

Nous savons que par critère :

$$F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{a\} \quad \text{où } a \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array} \right.$$

Ainsi montrons que $F \cap G = \{a\}$.

$\boxed{\supset}$ Claire d'après Q1.

$\boxed{\subset}$ Supposons que $f \in F \cap G = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : (\forall x \in \mathbb{R}\ f(x+1) = f(x)) \text{ et } (f(x) \xrightarrow[x \mapsto +\infty]{} 0) \}$

Par l'absurde, supposons que $f \neq a$.

ie, $\exists c_1 \in \mathbb{R}\ f(c_1) \neq 0$.

Or comme f est 1 périodique, $\exists c_2 \in \mathbb{R}\ f(c_2) \neq 0$ et $c_2 = c_1 + 1$.

Ainsi nous pouvons démontrer par récurrence qu'il existe une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ c_n = c_1 + n - 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\ f(c_n) = f(c_1) \neq 0$$

Par opération sur les limites nous obtenons :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \mapsto +\infty]{} +\infty \\ f(x) \xrightarrow[x \mapsto +\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(c_n) \xrightarrow[n \mapsto +\infty]{} 0} \quad (b)$$

Ainsi la seule fonction qui convient est a, on en déduit $F \cap G = \{a\}$

3. Par critère, F et G sont supplémentaires si $F \oplus G = \mathcal{E}$.

$\Leftrightarrow \underbrace{F \cap G = \{a\}}_{(1)}$ et $\underbrace{F + G = \mathcal{E}}_{(2)}$. (1) est claire par Q2.

Nous pouvons trouver un contre exemple à (2). Supposons (2) vraie.

On pose $e \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array} \right.$. donc $\exists (f, g) \in F \times G$ tq $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) + g(x) = e^x$.

Remarquons que : f est 1 périodique donc n'a pas forcément de limite en $+\infty$.

$$g(x) \xrightarrow[x \mapsto +\infty]{} 0$$
$$e^x \xrightarrow[x \mapsto +\infty]{} +\infty$$

Par opération sur les limites : $f(x) + g(x) \underset{x \mapsto +\infty}{\not\to} +\infty$. (4)

F et G ne sont donc pas supplémentaires.

Léa N.

Colle de la semaine n° 20

Énoncé :

Exercice 1. 1. On note E l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$
Déterminer une base de E.

2. Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ f'' - f' + f = 0\}$.
Déterminer une base de F.

Solution :

1/ $E = \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n \}$

On pose E_{car} : $r^2 - 4r + 3 = 0$, $r \in \mathbb{R}$

$\Delta := (-4)^2 - 3 \times 4 = 4 > 0$

Donc E_{car} a deux solution réelles distinctes qui sont 1 et 3.

Alors l'ensemble de solution de E est $\mathrm{Vect}\left((1^n), (3^n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

et la famille $(1, 3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est génératrice de E.

Montrons qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_1 . 1 + \lambda_2 3^n = 0$

Pour $n = 0$, on a $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

Pour $n = 1$, on a $\lambda_2 + 3\lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on a montré que la famille est libre.

Donc elle est une base de E.

2) $F = \{ f \in C^2(\mathbb{R}),\ f'' - f' + f = 0 \}$

On pose E_{car} : $z^2 - z + 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$

$\Delta := 1 - 4 = -3 < 0$

Donc E_{car} possède deux solutions complexes distinctes qui sont

$z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}\,i}{2}$ et $z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2}$

Alors $Sol_{(F)} = Vect\left(y_1 \middle| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \end{array}, y_2 \middle| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \end{array} \right)$

- La famille $\left(e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right),\ e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \right)$ est génératrice de E.

- Montrons que cette famille est libre.

  Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

  $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \lambda_2 e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) = 0$

Pour $x = 0$, $\lambda_1 = 0$

Pour $x = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, $\lambda_2 e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = 0$

$\underset{\times e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \neq 0}{\Rightarrow} \lambda_2 = 0$

On en déduit que la famille est libre.

Donc c'est une base de F.

Celia A. Colle de la semaine 20

énoncé :

Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ et $v_n = n2^n$.
Nous appellerons u et v les suites associées.
   (a) Montrer que (u, v) est une famille libre.
   (b) Montrer que (u, v) est une famille génératrice de F.

Solution. 1. * La suite nulle appartient à F.
En effet, $0 = 4.0 - 4.0$.
Donc <u>F n'est pas vide</u>.

* Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $((z_n), (w_n)) \in F^2$.
Montrons que $(\lambda(z_n) + \mu(w_n)) \in F$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} z_{n+2} = 4z_{n+1} - 4z_n & (L_1) \\ w_{n+2} = 4w_{n+1} - 4w_n & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda z_{n+2} + \mu w_{n+2} = \lambda 4z_{n+1} - \lambda 4z_n + \mu 4w_{n+1} - \mu 4w_n \quad (\lambda L_1 + \mu L_2)$$

$$\Leftrightarrow \lambda z_{n+2} + \mu w_{n+2} = 4(\lambda z_{n+1} + \mu w_{n+1}) - 4(\lambda z_n + \mu w_n)$$

Donc $(\lambda(z_n) + \mu(w_n)) \in F$.
<u>F est stable par combinaison linéaire</u>.

F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ selon les critères pour être un sous-espace vectoriel.

2. (a) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$\lambda(u) + \mu(v) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

Montrons que $\lambda = \mu = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\lambda(2^n) + \mu(n2^n) = 0$.

Pour $n = 0$, $\lambda = 0$.

Pour $n = 1$, $2\lambda + 2\mu = 0$. D'où $\lambda = -\mu = 0$.

La famille (u, v) est libre.

(b) (E_{car}) : $z^2 = 4z - 4$, $z \in \mathbb{C}$.

Nous résolvons l'équation (E_{car}).

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 - 4z + 4 = 0$.

* $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 0$

L'équation possède donc une solution $z = 2$.

Alors, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n = \lambda \underbrace{2^n}_{u} + \mu \underbrace{n2^n}_{v} \in F$.

Ainsi, la famille (u, v) est une famille génératrice de F.

$$\boxed{\text{La famille } (u, v) \text{ est donc une base de } F.}$$

Nicolas.H

Colle de la semaine 20

Énoncé

Soient $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\{(1,1,1)\})$. Montrer que F et G sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$. Quelle est leur intersection? Quelle est leur somme?

Solution:

- F est un sev de $\mathbb{R}^3$ car solution d'une équation linéaire homogène
- G est un sev de $\mathbb{R}^3$ car c'est un sev engendré

- Montrons que $F_1 \cap F_2 = \{(0,0,0)\}$

$\boxed{\supset}$ $(0,0,0) \in \mathrm{Vect}(\{(1,1,1)\})$ et $(0,0,0) \in F$

$\boxed{\subset}$ Soit $v \in F_1 \cap F_2$. Comme $v \in G$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $v = (a,a,a)$. Comme $v \in F$, $3a = 0$, donc $v = (0,0,0)$.

- Montrons que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$

$\boxed{\subset}$ clair

$\boxed{\supset}$ Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

(A) Supposons $\exists (v_1, v_2) \in F \times G$ $(x_1, x_2, x_3) = v_1 + v_2$

$v_1 = (t_1, t_2, t_3)$, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$, $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$

$v_2 = (a, a, a)$ $a \in \mathbb{R}$

$t_1 = x_1 - a$, $t_2 = x_2 - a$, $t_3 = x_3 - a$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3a$, donc $a = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

$$\Rightarrow t_1 = x_1 - a$$
$$= \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}$$
$$t_2 = \frac{-x_1 + 2x_2 - x_3}{3}$$
$$t_3 = \frac{-x_1 - x_2 + 2x_3}{3}$$

ainsi, les deux candidats sont :

$$v_1 = \left(\frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 + 2x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 - x_2 + 2x_3}{3} \right)$$

$$v_2 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} (1, 1, 1)$$

<u>Synthèse</u> : $v_1 \in F$, $v_2 \in G$

$$v_1 + v_2 = (x_1, x_2, x_3)$$

Donc $F + G = \mathbb{R}^3$

Colle de la semaine 20

Ibrahim K.

dans $\mathbb{R}^3$ on considère les 2 vecteur $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$: Trouver une condition sur x, y, z pour que le vecteur $(x, y, z) \in \mathrm{Vect}(u, v)$.

(A) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tq $(x, y, z) \in \mathrm{Vect}(u, v)$

donc $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tq $\lambda_1 u, \lambda_2 v = (x, y, z)$

donc
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 2 & y \\ 3 & 1 & z \end{array}\right)$$

donc
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -4 & y - 2x \\ 0 & -8 & z - 3x \end{array}\right)$$

donc

$$-4\lambda_2 = y - 2x \quad \text{et} \quad -8\lambda_2 = z - 3x$$

donc

$$\frac{y - 2x}{-4} = \frac{z - 3x}{-8}$$

donc

$$y - 2x = \frac{z - 3x}{2}$$

donc

$$2y - 4x = z - 3x$$

donc $2y - x - z = 0$.

(5) - En prenant $\lambda_1 = \frac{2x-y}{4}$

$$\lambda_2 = x - \frac{3}{4}(2x-y)$$

on a

$$\lambda_1 u - \lambda_2 v = \left(x - \frac{3}{4}(2x-y) + \frac{3}{4}(2x-y),\ 2x - \frac{3}{2}(2x-y) + \frac{2x-y}{2},\ 3x - \frac{9}{4}(2x-y) + \frac{2x-y}{4} \right)$$

$$= (x,\ y,\ 3x - 4x + 2y)$$

or $-4x + 2y = z - 3x$ donc

$$= (x, y, z)$$

ainsi $(x, y, z) \in \mathrm{Vect}(u, v)$.

Titouan
D

Rapport de colle semaine 20

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1; a_2; \dots; a_n$ des réels tel que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on pose $f_i : x \mapsto e^{a_i x}$
Soit la famille $\mathcal{F} = (f_1; f_2; \dots; f_n)$
Déterminer si cette famille est libre ou liée.

Supposons $\mathcal{F}$ liée $\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$

On peut donc poser $r = \max (i \in [\![1; n]\!] : \lambda_i \neq 0)$

On a donc $\lambda_r f_r = \sum_{j=0}^{r-1} - \lambda_j f_j$ ⊛

$\forall x \in \mathbb{R} \ \lambda_r e^{a_r x} \neq 0$ donc

⊛ $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{j=0}^{r-1} \frac{-\lambda_j}{\lambda_r} e^{x \underbrace{(a_j - a_r)}_{<0}} = 1$

En faisant tendre x vers $+\infty$

on a $0 = 1$ ce qui est une contradiction.

$\boxed{\text{Donc, la famille } \mathcal{F} \text{ est libre}}$

Alexandre M. Colle semaine 20

Démontrer que $F : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto A \cdot \sin(t+\varphi) \end{array} : (A,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et on donne une base

Montrons pour cela que $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ (*)

$\boxed{\subset}$ Soit $f \in F$

$\exists (A,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = A \cdot \sin(t+\varphi)$

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(t) &= A \sin(t+\varphi) \\ &= A(\sin(t)\cos(\varphi) + \cos(t)\sin(\varphi)) \quad \text{[formule d'addition pour sin]} \\ &= \underbrace{A\sin(\varphi)}_{\in \mathbb{R}} \cos(t) + \underbrace{A\cos(\varphi)}_{\in \mathbb{R}} \sin(t) \end{aligned}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $v \in \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad v(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$

Disjonction de cas :

1er cas : $\lambda = \mu = 0$

On a $\forall t \in \mathbb{R}$ $v(t) = 0$

$$= 0 \cdot \sin(t+0)$$

2e cas : $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$v(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \left(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t) \right) \qquad \left[\sqrt{\lambda^2+\mu^2} \neq 0\right]$$

$$= \sqrt{\lambda^2+\mu^2} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \cos(t) + \mu \sin(t) \right)$$

Or $\lambda + i\mu \neq 0$ donc

$\exists \varphi \in \mathbb{R}$ $\lambda + i\mu = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\, e^{i\varphi}$ [$\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ est le module de $\lambda + i\mu$]

$$= \underbrace{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\cos(\varphi)}_{\lambda} + i \underbrace{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\sin(\varphi)}_{\mu}$$

par ! de la forme algébrique

donc $v(t) = \sqrt{\lambda^2+\mu^2} \left(\cos(\varphi)\cos(t) + \sin(\varphi)\sin(t) \right)$

$$= \sqrt{\lambda^2+\mu^2} \left(\cos(\varphi - t) \right)$$

$$= \underbrace{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \sin\left(t + \underbrace{\frac{\pi}{2} - \varphi}_{\in \mathbb{R}} \right) \qquad \square$$

Montrons $(\cos, \sin)$ est une fam de F.

caractère générateur OK d'après (*)

Alexandre M. Liberté : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \cos + \mu \sin = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$

En spécialisant à $t = 0$ on a

$$\underbrace{\lambda \cos(0)}_{\lambda} + \underbrace{\mu \sin(0)}_{0} = 0$$

donc $\lambda = 0$

à $t = \frac{\pi}{2}$ on a

$$\underbrace{\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + \underbrace{\mu \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\mu} = 0$$

donc $\mu = 0$

Donc $(\cos, \sin)$ est une base de F.

Royon. G

Colle de la semaine n°20

Exercice n°5 : Soient F et G les deux parties de $\mathbb{R}^4$ définies par :

$$F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array} \right\}$$

$$G = \mathrm{Vect}((1,1,1,0),(0,1,1,1))$$

1. Justifier que F et G sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrons que F est engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
3. Donner un système d'équations linéaires dont G est l'ensemble solution.
4. Montrons que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$
5. Pour un vecteur quelconque $u=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, déterminer sa décomposition en fonction de x, y, z, t sur la somme $F \oplus G$.

Solution :

1. F est l'ensemble solution d'un système homogène d'inconnue dans $\mathbb{R}^4$, c'est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. G est un sous espace vectoriel engendré par 2 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donc G sev de $\mathbb{R}^4$.

2. Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$

$$u\in F \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ -2y-2t=0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2-L_1$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+t=0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$$

$$\iff \begin{cases} x+z=0 \\ y+t=0 \end{cases}$$

Ainsi

$$u\in F \iff \begin{array}{l} x+z=0 \\ \text{et } y+t=0 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{l} x=-z \\ \text{et } y=-t \end{array}$$

On en déduit

$$(x,y,z,t)\in F \iff$$

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) &= (x,y,-x,-y) \\ &= x(1,0,-1,0) \\ &\quad + y(0,1,0,-1)\end{aligned}$$

$$u\in F \iff u\in \mathrm{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$$

Donc $F=\mathrm{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$

3. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$u \in G \iff \begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y \\ \lambda_1 + \lambda_2 = z \\ \lambda_2 = t \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 = z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \lambda_2 = t \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = y - x \\ 0 = z - y & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ 0 = t + x - y & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

On en déduit

$$G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} z - y = 0 \\ t + x - y = 0 \end{array} \right\}$$

4. Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$

Premièrement, montrons que $F + G = \mathbb{R}^4$:

On remarque que :

$$F + G = \mathrm{Vect}((1,0,-1,0), (0,1,0,-1)) + \mathrm{Vect}((1,1,1,0), (0,1,1,1))$$

$F+G = \mathrm{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1),(1,1,1,0),(0,1,1,1))$

$\boxed{C}$ $F+G$ est un sous espace vectoriel engendré par des vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$\boxed{D}$ Soit $u=(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$

Montrons que $u \in F+G$

$$u \in F+G \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = y \\ -\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = z \\ -\lambda_2 + \lambda_4 = t \end{cases} \quad (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = y \\ 2\lambda_3 + \lambda_4 = z+x \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ -\lambda_2 + \lambda_4 = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = y \\ 2\lambda_3 + \lambda_4 = z+x \\ \lambda_2 + 2\lambda_4 = t+y \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = y \\ 2\lambda_3 + \lambda_4 = z+x \\ +\frac{3}{4}\lambda_4 = t+y - \frac{z+x}{2} \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = y \\ 2\lambda_3 + \lambda_4 = y + x \\ \lambda_4 = \frac{4}{3}\left(k + y - \frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right) \quad L_4 \leftarrow \frac{4}{3} L_4 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_4$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y - \frac{4}{3}\left(k + y - \frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right) \\ 2\lambda_3 = y + x - \frac{4}{3}\left(k + y - \frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right) \\ \lambda_4 = \frac{4}{3}\left(k + y - \frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right) \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{1}{3} y - \frac{4}{3}\left(k - \frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right) \\ \lambda_3 = \frac{5}{6} y + \frac{5}{6} x - \frac{4}{6}(k + y) \\ \lambda_4 = \frac{4}{3}\left(k + y - \frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right) \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{6} x - \frac{5}{6} y + \frac{2}{3}(k + y) \\ \lambda_2 = -\frac{1}{3} y - \frac{4}{3}\left(k - \frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right) - \frac{5}{6} y - \frac{5}{6} x + \frac{2}{3}(k + y) \\ \lambda_3 = \frac{5}{6} y + \frac{5}{6} x - \frac{2}{3}(k + y) \\ \lambda_4 = \frac{4}{3}\left(k + y - \frac{y}{2} - \frac{x}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}z + \frac{2}{3}(t+y) \\ \lambda_2 = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}t - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}x \\ \lambda_3 = \frac{1}{6}z + \frac{1}{6}x - \frac{2}{3}(t+y) \\ \lambda_4 = \frac{4}{3}(t+y - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}) \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) = \lambda_1(1,0,-1,0) \\ +\lambda_2(0,1,0,-1) \\ +\lambda_3(1,1,1,0) \\ +\lambda_4(0,1,1,1)\end{aligned}$$

Donc $x \in F+G$

Ainsi $F+G = \mathbb{R}^4$

Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$ (Critère pour $F \oplus G$)

$\boxed{1}$ Clair car F et G sev de $\mathbb{R}^4$

$\boxed{2}$ Soit $x = (x,y,z,t) \in F \cap G$

$x \in F$ donc $x+y+z+t=0$
et $x-y+z-t=0$

et $x \in G$ donc $z=-y$
et $t=z-x$ (q2)

$x+y+z+t=0$

$\Rightarrow x+y-y+y-x=0$

$\Rightarrow y=0$

Or $z=-y$ donc $z=0$

Et $x+y+z+t=0$

et $x-y+z-t=0$

On obtient

$x+t=0$

et $x-t=0$

Donc $2x=0 \Rightarrow x=0$

Donc puisque $x+t=0$ alors $x=0$

Ainsi $(x,y,z,t)=(0,0,0,0)$

Ainsi $F\oplus G=\mathbb{R}^4$

5. De la question 4, plus précisément de la preuve de $\mathbb{R}^4 \subset F+G$, on en déduit les coordonnées de (x,y,z,t) dans $F\oplus G$