Uta. B

Colle de la semaine 2

Énoncer les deux inégalités triangulaires. Donner une majoration du module d'une somme de n nombres complexes. Chercher également une minoration de ce module.

L'inégalités triangulaires :

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\big|\, |z_2| - |z_1| \,\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, z_2, \dots z_n) \in \mathbb{C}^n$

Conjecture majoration : $P(n)$ " $\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ "

On raisonne par récurrence,

Initialisation, $n = 1$:

$|z_1| \leq |z_1|$ donc $P(1)$ est vraie

Héredité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixe tq $P(n)$ est vraie, montrons alors que $P(n+1)$ l'est aussi.

H.R $\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

donc $\left| \sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$

(par l'inégalités triangulaires)

donc $\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$

Par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Conjecture minoration : $P(n)$: " $\left| |z_n| - \sum_{k=1}^{n-1} |z_k| \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right|$

On raisonne par récurence

Initialisation, $n = 1$:

$\left| |z_1| \right| \leqslant |z_1|$ (car $|z_1| \geqslant 0$)

donc $|z_1| \leqslant |z_1|$ donc $P(1)$ est vraie

Héredité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixe tel que $P(n)$ est vraie et montrons alors que $P(n+1)$ l'est aussi.

par l'inégalités triangulaires, on a :

$$\left| z_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} |z_k| \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} |z_k| + z_{n+1} \right|.$$

or $\left| |z_{n+1}| - \sum_{k=1}^{n} |z_k| \right| \leqslant \left| z_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} |z_k| \right|$

car $\sum_{k=1}^{n} |z_k| > 0$ et $|z_{n+1}| \geqslant z_{n+1}$

et $\left| \sum_{k=1}^{n} |z_k| + z_{n+1} \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$

car $\sum_{k=1}^{n+1} \geqslant 0$

donc $\left| |z_{n+1}| - \sum_{k=1}^{n} |z_k| \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$

Par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Léon. 5 Colle de la semaine 2

Soit $\theta \in]-\pi;0[\cup]0;\pi[$ déterminer le module et argument du nombre complexe : $z = 1 + i\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

Solution

Soit $\theta \in]-\pi;0[\cup]0;\pi[$

Soit $z \in \mathbb{C}$ telque $z = 1 + i\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

$$z = 1 + i\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

donc $z = \frac{\sin(\theta) + i\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

donc $z = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) + i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin(\theta)}$

donc $z = \frac{1}{\sin(\theta)} e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

cas 1 : $\theta \in]0;\pi[$

$z = \underbrace{\frac{1}{\sin(\theta)}}_{>0} e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ donc $|z| = \frac{1}{\sin(\theta)}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{2} - \theta$

cas 2 : $\theta \in]-\pi;0[$

$z = \frac{1}{-\sin(\theta)} e^{i\pi} e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$

donc $z = \underbrace{\frac{1}{-\sin(\theta)}}_{>0} e^{i(\frac{3\pi}{2}-\theta)}$

donc $|z| = \frac{1}{-\sin(\theta)}$ et $\arg(z) = \frac{3\pi}{2} - \theta$

Stanislas G Semaine de colle n°2

$\boxed{\text{Exercice 8 : Déterminer l'ensemble des entiers naturels tels que } (1+i)^n \text{ soit réel}}$

Solution : Je cherche une forme trigonométrique de $1+i$

Calcul du module : $|1+i| = \sqrt{2}$
Calcul de la forme trigonométrique :

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Donc on a d'après la formule de Moivre

$$(1+i)^n = \underbrace{\sqrt{2}^n}_{\in\mathbb{R}} \left(\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}_{\in\mathbb{R}} + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

Pour que $(1+i)^n$ soit réel il faut que

$$\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$$

$$\underset{\text{égalité des sinus}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{n\pi}{4} \equiv 0\ [\pi]$$

$$\underset{\times \frac{4}{\pi}}{\Longleftrightarrow} \quad \boxed{n \equiv 0\ [4]}$$

Pour que $(1+i)^n$ soit réel il faut que n soit multiple de 4.

Anaé. D

Colle semaine n° 2

Exercice : Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$

1. Determiner une CNS sur θ pour que $1+e^{i\theta}+e^{i2\theta} \neq 0$

2. Calculer le module et un argument de $1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}$ lorsque ce nombre est non nul.

Solution : Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$,

1. Nous raisonnons par analyse synthèse :

Analyse : Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$,

$$1+e^{i\theta}+e^{2i\theta} = \sum_{k=0}^{2} (e^{ik\theta}) = \sum_{k=0}^{2} (e^{i\theta})^k \qquad \text{(Moivre)}$$

D'où $1+e^{i\theta}+e^{2i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \text{ si } e^{i\theta} = 1 \\ \dfrac{1-(e^{i\theta})^3}{1-e^{i\theta}} \text{ si } e^{i\theta} \neq 1 \end{cases}$

Ainsi, on suppose $e^{i\theta} \neq 1$ soit $\theta \neq 0$, et on cherche

$$1-(e^{i\theta})^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow -e^{3i\theta} = -1 \qquad \text{(Moivre)}$$
$$\Leftrightarrow e^{i3\theta} = 1$$
$$\Leftrightarrow e^{i3\theta} = e^{i0}$$

D'après le cas d'égalité des formes trigométriques

$$\Leftrightarrow \{ 3\theta \equiv 0 \ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \{ \theta \equiv 0 \ [\tfrac{2\pi}{3}]$$

Or $\theta \in]-\pi ; \pi]$, d'où $1+e^{i\theta}+e^{i2\theta} = 0$ pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta = \frac{4\pi}{3}$

Or on cherchait la condition inverse. D'où $1+e^{i\theta}+e^{i2\theta} \neq 0$ pour $\theta \neq \frac{2\pi}{3}$, et $\theta \neq \frac{4\pi}{3}$.

Synthèse On raisonne par contraposée. On suppose $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta = \frac{4\pi}{3}$

Pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$, on a :

$1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i2\times\frac{2\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

Donc la condition est vérifiée pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Pour $\theta = \frac{4\pi}{3}$, on a :

$1 + e^{i\frac{4\pi}{3}} + e^{i2\times\frac{4\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

Donc la condition est vérifiée pour $\theta = \frac{4\pi}{3}$

Conclusion : Soit $\theta \in]-\pi ; \pi]$ $\quad 1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} \neq 0 \iff \theta \neq \frac{4\pi}{3}$ et $\theta \neq \frac{2\pi}{3}$

2. Soit $\theta \in]\pi ; \pi] \setminus \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$

Nous raisonnons par disjonction de cas

1er cas $\quad \theta = 0 \quad$ alors $\quad 1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} = 3 = 3e^{i0}$

D'où $|1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta}| = 3$ et un $\arg(1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta}) = 0$

2ème cas : soit $\theta \in]\pi ; \pi] \setminus \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$

$1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} = \frac{1 - e^{i3\theta}}{1 - e^{i\theta}}$

D'après la technique de l'angle moitié on a

$1 - e^{i3\theta} = -2\sin(\frac{3}{2}\theta)e^{i\frac{3}{2}\theta}$

et $1 - e^{i\theta} = -2\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$

Donc $\quad 1 + e^{i\theta} + e^{i3\theta} = \frac{-\cancel{2}\sin(\frac{3}{2}\theta)e^{i\frac{3}{2}\theta}}{-\cancel{2}\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin(\frac{3}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}e^{i\theta}$

Or on sait que le module est strictement positif. Donc on étudie le signe de $\frac{\sin(\frac{3}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.

On calcule pour cela on calcule les dérivés :

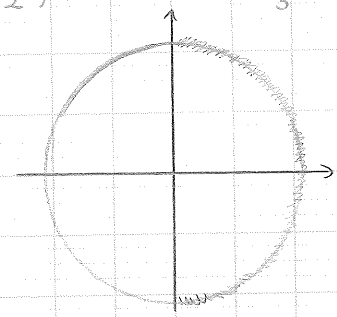
On pose $f(\theta) = \sin(\frac{3}{2}\theta) \qquad f'(\theta) = \frac{3}{2}\cos(\frac{3\theta}{2})$

Amoé . D

(suite colle semaine 2)

On pose $g(\theta) = \sin(\frac{\theta}{2})$ $\qquad g'(\theta) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\theta}{2})$

On cherche $\frac{3}{2}\cos(\frac{3\theta}{2}) \geq 0 \iff \cos(\frac{3\theta}{2}) \geq 0$ $\quad (\div \frac{2}{3} \neq 0)$



D'après le cercle, on trouve :

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{3\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$

$\iff -\pi \leq 3\theta \leq \pi$

$\iff -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

On raisonne de manière analogue pour $\frac{1}{2}\cos(\frac{\theta}{2}) \geq 0$, on trouve:

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2} \iff -\pi \leq \theta \leq \pi$

On dresse un tableau de signes.

θ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	π
$f(\theta)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	
$g(\theta)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	

Donc $|1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta}| = \frac{\sin(\frac{3\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$ pour $\theta \in]-\frac{\pi}{3}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{3}]$

et $|1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta}| = -\left(\frac{\sin(\frac{3\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right)$ pour $\theta \in]-\pi, -\frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[\cup]\frac{4\pi}{3}, \pi[$

Un argument de $1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta}$ est θ.

Exercice : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Montrer que $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$ si et seulement si $|z| = 1$.

Solution :

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, montrons que $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \iff |z| = 1$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $|z| = 1$

$$\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \iff \frac{z-i}{1-iz} = \overline{\left(\frac{z-i}{1-iz}\right)}$$

Donc montrons que $\frac{z-i}{1-iz} = \overline{\left(\frac{z-i}{1-iz}\right)}$

Procédons par équivalence : on multiplie chaques membres par $\frac{1-i\overline{z}}{\overline{z}+i} \neq 0$ car $z \neq -i$

$$\frac{z-i}{1-iz} = \frac{\overline{z}+i}{1-i\overline{z}} \iff \frac{(z-i)(1-i\overline{z})}{(1-iz)(\overline{z}+i)} = 1$$

$$\iff \frac{z - i + iz\overline{z} - i^2\overline{z}}{\overline{z} - iz\overline{z} + i - i^2 z} = 1$$

$$(|z|^2 = z\overline{z}) \longrightarrow \iff \frac{z - i + i + \overline{z}}{\overline{z} - i + i + z} = 1$$

$$\iff 1 = 1$$

$1 = 1$ est vraie donc par équivalence, on a pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $|z| = 1 \Rightarrow \frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$, montrons que $|z| = 1$

$$\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \iff (z-i) \times \frac{1}{1-iz} \in \mathbb{R}$$

$$\iff (z-i) \times \frac{(1+i\overline{z})}{\underbrace{|1-iz|}_{\in \mathbb{R}}} \in \mathbb{R}$$

$$\iff z - i + iz\overline{z} + \overline{z} \in \mathbb{R}$$

car $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

$$\iff i|z| - i \in \mathbb{R}$$

$$\iff i(|z| - 1) \in \mathbb{R}$$

$$\iff |z| = 1$$

$\boxed{\text{Ainsi on a pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus \{i\},\ \frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \iff |z| = 1}$

Tigwin

Colle de la semaine 2

Exercice 2
Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i)^n \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ $(1+i)^n$

On veut montrer que $(1+i)^n \in \mathbb{R}$

- On transforme $1+i$ sous sa forme algébrique :

$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$ ainsi

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on sait que $e^{i\theta} \in \mathbb{R}$ si $\theta \equiv 0 \,[2\pi]$ ou $\theta \equiv \pi \,[2\pi]$

Alors :

$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right)^n = \underbrace{\sqrt{2}^n}_{\in \mathbb{R}} e^{i\frac{n\pi}{4}}$ on doit avoir

$\frac{n\pi}{4} \equiv 0 \,[2\pi]$ ou $\frac{n\pi}{4} \equiv \pi \,[2\pi]$

$n\pi \equiv 0 \,[8\pi]$ ou $n\pi \equiv 4\pi \,[8\pi]$

$n \equiv 0 \,[8]$ ou $n \equiv 4 \,[8]$

- En conclusion $(1+i)^n \in \mathbb{R}$ quand $n \equiv 0 \,[8] \cup n \equiv 4 \,[8]$

Lina A

Colle de la semaine 2

Exercice 2. Quel est l'ensemble E des complexes z tels que z, z^2 et $1-z$ aient le même module ?

Solution :
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Afin de déterminer l'ensemble E, résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} |z| = |z^2|. \\ |1-z| = |z|. \end{cases}$$

En posant $z = a+ib$ avec a et b des réels, nous obtenons le système suivant :

$$(S) \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = a^2+b^2 \\ \sqrt{(1-a)^2+(-b^2)} = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

Raisonnons par analyse synthèse :

Analyse : Soit $z \in \mathbb{C}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a+ib$
Supposons qu'il existe z solution du système (S)

Ainsi, $\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = a^2+b^2 & (L_1) \\ \sqrt{(1-a)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2} & (L_2) \end{cases}$

L_2 : $\sqrt{(1-a)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow a^2+b^2+1-2a = a^2+b^2$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$

L_1 : $\sqrt{\frac{1}{4}+b^2} = \frac{1}{4}+b^2 \Rightarrow \frac{1}{4}+b^2 = (\underbrace{\frac{1}{4}+b^2}_{>0})^2$

$\Rightarrow \frac{1}{4}+b^2 = 1$

$\Rightarrow b^2 = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nous proposons alors deux candidats pour vérifier le système (S) :

$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Synthèse: Vérifions si les candidats obtenus en fin d'analyse sont solutions du système :

• Pour z_1 :

$$|z_1^2| = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

Donc $|z_1| = |z_1^2|$.

$$|1 - z_1| = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$$

Finalement : $|z_1| = |z_1^2| = |1 - z_1|$.

De même avec z_2.

Donc le système S possède deux solutions :

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Ainsi $\boxed{E = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \,;\, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\}}$

Robin G. Colle de la semaine 2

Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tels que $(\sqrt{3}+i)^n \in i\mathbb{R}$.

<u>Solution</u>

Soit $z = \sqrt{3} + i$.

$|z| = 2$ donc
$\exists \theta \in \mathbb{R}$ tq $z = 2e^{i\theta}$

$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

Ainsi, d'après la définition de la forme trigonométrique, on a :

$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

donc $e^{i\theta} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$
donc $\theta = \frac{\pi}{6}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$z^n = (\sqrt{3}+i)^n = 2^n\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2e^{in\frac{\pi}{6}} = 2^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (formule de Moivre)

On cherche les $n \in \mathbb{N}$ tq $z^n \in i\mathbb{R}$.
Par définition, $z^n \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z^n) = 0$,
soit $2^n\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) = 0$

D'après le cas d'égalité des cosinus, on a :

$$\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) = 0 \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \quad n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad n\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

or $n \in \mathbb{N}$ donc $k \in \mathbb{N}$.

soit : $\begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} \quad n = 3 + 12k \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{N}^* \quad n = -3 + 12k \end{cases}$

Ainsi, $(\sqrt{3}+i)^n \in i\mathbb{R}$ $\begin{cases} \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 3 + 12k \\ \text{ou} \\ \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = -3 + 12k \end{cases}$.

2/2

Youssef . B

Colle de la semaine 2

Exercice : Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

Résoudre $\frac{1-z}{1+z} = e^{i\theta}$

Solution :

Soit $(z,\theta) \in \mathbb{C}/\{-1\} \times \mathbb{R}$

$$\frac{1-z}{1+z} = e^{i\theta} \iff 1-z = e^{i\theta}(1+z)$$
$$\iff 1-z = e^{i\theta} + ze^{i\theta}$$
$$\iff ze^{i\theta} + z = 1-e^{i\theta}$$
$$\iff z(e^{i\theta}+1) = 1-e^{i\theta}$$
$$\iff z = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$$

Or, d'après la technique de l'angle moitié :

* $1-e^{i\theta} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$
* $1+e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

Donc $z = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = \frac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} = i\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\text{Sol} = \left\{ i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \ , \ \theta \not\equiv \pi [2\pi] \right\}$

Tibuan Exercice 2 Quel est l'ensemble E des complexes z tel que
D. z z^2 et $1-z$ aient le même module ?

On procède par analyse-synthèse
analyse : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = |z^2| = |1-z|$
donc $|z|^2 = |z^2|^2 = |1-z|^2$
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}$ tel que $z = a + ib$
$z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$
$1 - z = 1 - a - ib$

ainsi $|z|^2 = a^2 + b^2$ (L_1)
$|z^2|^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2$ (L_2)
$|1-z|^2 = 1 - 2a + a^2 + b^2$ (L_3)
En faisant $L_3 - L_1$ on a :
$1 - 2a = 0$ $(L_1 = L_2 = L_3)$
donc $a = \frac{1}{2}$

En remplaçant a dans $L_1 = L_2$ on a :
$\frac{1}{4} + b^2 = \frac{1}{16} - 2 \times \frac{1}{4} b^2 + b^4 + 4 \times \frac{1}{4} b^2$

donc $\frac{1}{4} = \frac{1}{16} - \frac{1}{2} b^2 + b^4$

$b^4 - \frac{1}{2} b^2 - \frac{3}{16} = 0$

$b \in \mathbb{R}$ donc on calcule $\Delta = 1$
donc $b^2 = \frac{3}{4}$ ou $b^2 = \frac{-1}{4}$

or $b \in \mathbb{R}$ donc $b^2 \geqslant 0$

ainsi $b^2 = \frac{3}{4}$

donc $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

on a deux candidats : $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Synthèse . on appelle z_0 le candidat $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et z_1 le candidat $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on remarque que $z_0 = \overline{z_1}$

donc $|z_0| = |z_1|$

Si $z_0 \in E$ alors z_1 aussi

$$|z_0| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$|z_0^2| = \sqrt{\left(\frac{-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 1$$

$$|1 - z_0| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$z_0 \in E$

donc $\boxed{E = \left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$

Billy . G

Khôlle de la semaine 2

Exercice : Calculer $\sum_{k=0}^{2022} (\sqrt{3}-i)^k$

$$\sum_{k=0}^{2022} (\sqrt{3}-i)^k = \frac{1-(\sqrt{3}-i)^{2023}}{1-\sqrt{3}+i} \quad \text{(formule)}$$

$$= \frac{1-\left(2e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)^{2023}}{1-\sqrt{3}+i}$$

Or : $\left(2e^{-\frac{i\pi}{6}}\right)^{2023} = 2^{2023} e^{\frac{i5\pi}{6}}$

On a donc : $\sum_{k=0}^{2022} (\sqrt{3}-i)^k = \dfrac{1-2^{2023} e^{\frac{5i\pi}{6}}}{1-\sqrt{3}+i}$

Célia A. Colle semaine n° 2

<u>énoncé</u> Déterminer $|u|$ et $\arg(u)$

$$u = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

<u>solution</u> On détermine $|u|$.

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$ (propriétés des modules)

Or, $|1+i| = \sqrt{2}$ et $|1-i| = \sqrt{2}$.

D'où $|u| = \dfrac{(\sqrt{2})^9}{(\sqrt{2})^7} = 2$.

On détermine $\arg(u)$.

$$\arg\left(\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}\right) = \arg((1+i)^9) - \arg((1-i)^7)$$ (propriétés des arguments).

Or, $\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\arg(1-i) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

D'où $\arg(u) \equiv \dfrac{9\pi}{4} + \dfrac{7\pi}{4}\ [2\pi] \equiv \dfrac{16\pi}{4}\ [2\pi] \equiv 0\ [2\pi]$.

Nicolas.H

Colle de la semaine 2

Exercice 1
forme algébrique de $(3i-2)^3$.

Solution: Posons $z = 3i-2$

$z^3 = (3i-2)^3 = (3i-2)(3i-2)(3i-2)$

donc $z^3 = (4-9+i(-6+-6))(3i-2) = (-5-12i)(3i-2)$

donc $z^3 = (10+36+i(-15+24)) = 46+9i$

Conclusion : $\boxed{\text{la forme algébrique de } (3i-2)^3 \text{ est } 46+9i}$

Timothée . F

Calcul. Mettre sous forme algébrique $\dfrac{(1+2i)(3-i)}{(-3+4i)(1-5i)}$.

$$\frac{(1+2i)(3-i)}{(-3+4i)(1-5i)} = \frac{5+5i}{17+19i}$$

$$= \frac{(5+5i)(17-19i)}{(17+19i)(17-19i)}$$

$$= \frac{180-10i}{550}$$

$$= \frac{18}{55} - \frac{i}{55}$$

Colle de la semaine 2

Ibrahim .K

Déterminer l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie :

$$z+\bar{z}=|z|$$

<u>Solution :</u> Déterminons les solutions de l'équation, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E) : z+\bar{z}=|z|$$

On procède avec un raisonement par Analyse-Synthèse.

→ <u>Analyse :</u>

Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $z=a+ib$ et

$z+\bar{z}=|z|$ ainsi on a :

$$a+ib+a-ib=|a+ib|$$

donc $2a=|a+ib|$ et donc

on déduit dans un premier temps que

$a=\frac{|a+ib|}{2}$ ainsi $a>0$ car $\frac{|a+ib|}{2}>0$

Ainsi de ce qui précède on a :

$2a=|a+ib|$ et donc

$2a=\sqrt{a^2+(b^2)}$

ainsi en élevant les deux membres au carré on obtient

$4a^2=a^2+b^2$ ainsi

$3a^2=b^2$ et donc on a

$b=\sqrt{3}a$ ou $b=-\sqrt{3}a$ (puisque $a>0$ $\sqrt{a^2}=a$)

Ainsi on distingue deux cas possible

$z = a + i\sqrt{3}\, a$ ou $z = a - i\sqrt{3}\, a$

Ainsi $z = 2a\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{=\cos(\frac{\pi}{3})} + i \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{=\sin(\frac{\pi}{3})}\right)$ ou $z = 2a\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos(-\frac{\pi}{3})} - i \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{=\sin(-\frac{\pi}{3})}\right)$

donc $z = 2a\, e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $z = 2\, a e^{-i\frac{\pi}{3}}$

avec $a \in \mathbb{R}_{>0}$

Ainsi on a les deux candidat possible

Synthèse :

Vérifions si les deux candidat vérifient les conditions initiales : ainsi

→ Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $z = 2a e^{i\frac{\pi}{3}}$ avec $a \in \mathbb{R}_{>0}$

Ainsi $z + \overline{z} = 2a\, e^{i\frac{\pi}{3}} + \overline{2a\, e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$= 2ae^{i\frac{\pi}{3}} + 2a\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$ (Par propriétés algébriques du conjugué)

$=$

$= 2a\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$

$= 2a\,\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (Par formule d'Euler)

$= 2a\ 2 . \frac{1}{2}$

$z + \overline{z} = 2a$

Ainsi

$|z| = \left|2ae^{i\frac{\pi}{3}}\right| = |2a|\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 2a$ (car $2a > 0$)

par propriétés algébrique du module

et donc z vérifient les conditions Initiales.

→ On procède de même pour $z = 2a e^{-i\frac{\pi}{3}}$ où $a \in \mathbb{R}_{>0}$

Raphaël M.

Colle de la semaine 2

Exercice 2
Soit a, b deux nombres complexes non nuls. Montrer que $\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$.

Solution : Soit $(a,b) \in (\mathbb{C}^*)^2$

$$\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \left|\frac{1}{\overline{a}} - \frac{1}{\overline{b}}\right| \overset{①}{=} \left|\frac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{a}\overline{b}}\right| = \frac{|\overline{b}-\overline{a}|}{|\overline{a}\,\overline{b}|} ②$$

Donc $\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|\overline{(b-a)}|}{|\overline{a}||\overline{b}|} ③ ④ = \frac{|(b-a)|}{|a||b|}$ ⑤

et Donc $\left|\frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|-(a-b)|}{|a||b|} = \frac{|a-b|}{|a||b|}$ ⑥

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$:

① • $|z|^2 = z \times \overline{z}$

② • $\left|\frac{z}{z_2}\right| = \frac{|z|}{|z_2|}$

③ • $\overline{z} - \overline{z_2} = \overline{z_1 - z_2}$

④ • $|z z_2| = |z||z_2|$

⑤ • $|\overline{z}| = |z|$

⑥ • $|-z| = |z|$

Colle de la semaine 2:

Wassim M.

Exercice 1 : Mettre sous forme trigonométrique le nombre : $z = -\frac{4}{\sqrt{3}+i}$

$z = -\frac{4}{\sqrt{3}+i}$

$z = e^{i\pi} \times \frac{4e^{i0}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$

$z = 2e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}$

$\boxed{z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

Léa N.

Colle semaine n° 2

Énoncé : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Calculer : $\sum_{p=0}^{n} \cos^2(p\theta)$

Solution :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{p=0}^{n} \cos^2(p\theta) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\cos(2p\theta)+1}{2}$$ (formule de duplication de cosinus)

$$= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n} \cos(2p\theta) + 1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=0}^{n} \cos(2p\theta) + \sum_{p=0}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[n+1 + Re\left(\sum_{p=0}^{n} e^{i2p\theta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[n+1 + Re\left(\sum_{p=0}^{n} (e^{i2\theta})^p\right)\right]$$ (formule de Moivre)

$$= \frac{1}{2}\left[n+1 + Re\left(\frac{1-e^{i2\theta(p+1)}}{1-e^{i2\theta}}\right)\right]$$ (somme d'une suite géométrique)

$$= \frac{1}{2}\left[n+1 + Re\left(\frac{\cancel{-2i}\sin(\theta(p+1))\,e^{i\theta(p+1)}}{\cancel{-2i}\sin(\theta)\,e^{i\theta}}\right)\right]$$ (angle moitié)

$$= \frac{1}{2}\left[n+1 + Re\left(\frac{\sin(\theta(p+1))\,e^{i\theta p}}{\sin(\theta)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(n+1 + \frac{\sin(\theta(p+1))\cos(\theta p)}{\sin(\theta)}\right)$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\theta(p+1))\cos(\theta p)}{2\sin(\theta)}$$

Colle de la semaine 2

Louis Guillaume S.

a. Mettre sous forme trigonométrique et algébrique $\dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}{1-i}$.

b. En déduire $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$

Solution : a) On pose $A = \frac{1}{2} \times \frac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}{1-i}$

Exprimons la forme algébrique de A :

$$A = \frac{1}{2} \times (\sqrt{6}+i\sqrt{2})\left(\frac{1}{1-i}\right) = \frac{1}{2} \times (\sqrt{6}+i\sqrt{2})\left(\frac{1+i}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i}$$

Exprimons la forme trigonométrique de A : où (1) est son numérateur
(2) son dénominateur

$$(1) = \sqrt{6}+i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} + i\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \underline{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$(2) = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \underline{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

Finalement nous avons $A = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})} = \underline{e^{i\frac{5\pi}{12}}}$

b) Nous pouvons remarquer que $\frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$. Or comme $0 < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$:

$$\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

On en déduis que $\underline{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\underline{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Eliott SV

SEMAINE 2

Exercice 1. Soient α et β deux nombres réels. Déterminer pour quelles valeurs de α ou β le nombre $z = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}}$ est correctement défini puis calculer son module et en déterminer un argument.

SOLUTION :

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $z = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}}$

• z est correctement défini si : $1 + e^{i(\alpha+\beta)} \neq 0$, autrement dit si $e^{i(\alpha+\beta)} \neq -1$

Considérons l'équation $e^{i(\alpha+\beta)} = -1$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\iff e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\pi}$$

$$\underset{\text{cas d'égalité de 2 formes trigo}}{\iff} \alpha + \beta \equiv \pi \ [2\pi]$$

Ainsi, pour que z soit correctement défini, il faut :

$$\alpha + \beta \not\equiv \pi \ [2\pi].$$

• Calculons le module de z :

$$z = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}} = \frac{2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}} \quad \text{Formules de l'angle moitié}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \quad \text{Simplification.}$$

Ainsi, $z \in \mathbb{R}$, donc $|z| = \left| \dfrac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \right|$.

• Calculons un argument de z :

Comme $z \in \mathbb{R}$, on procède par disjonction de cas :

1^er^ cas : $z > 0$, alors $\arg(z) = 0 \ [2\pi]$.

2^ème^ cas : $z < 0$, alors $\arg(z) = \pi \ [2\pi]$

Exercice 6

a. Déterminer, dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|(1+i)z-2i| = 2$

Solution :

Soit $z \in \mathbb{C}$

On a $|(1+i)z-2i| = 2$

Divisons par $\underset{(>0)}{|1+i|}$ de chaque côté

•) $\dfrac{|(1+i)z-2i|}{|1+i|} = \left|\dfrac{(1+i)z-2i}{(1+i)}\right| = \left|z - \dfrac{2i}{1+i}\right| = \left|z - 2i \times \dfrac{1-i}{2}\right| = |z-(i+1)|$

•) $\dfrac{2}{|1+i|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Donc $|z-(1+i)| = \sqrt{2}$

On reconnaît alors une équation de cercle de centre $\Omega(1+i)$ et de rayon $r = \sqrt{2} \in \mathbb{R}_+$

$\boxed{\text{L'ensemble des points M est donc le cercle } \mathcal{C}(\Omega(1+i), \sqrt{2})}$

Adam M. Colle de la semaine 2

Soit $z \in \mathbb{C}$
$$z = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}} \quad \text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

1/ Pour quelles valeurs de α et β, z est bien défini
2/ Simplifier puis déterminer le module et un argument de z

<u>Solution</u>: 1/ On cherche le domaine de définition de $z \in \mathbb{C}$

$1 + e^{i(\alpha+\beta)} = 0$ {Soient α et β des réels

$\iff e^{i(\alpha+\beta)} = -1$

$\iff e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\pi}$

$\iff \alpha + \beta \equiv \pi [2\pi]$ (cas d'égalité de 2 formes trigonométriques)

Donc z est défini pour $\alpha + \beta \not\equiv \pi [2\pi]$

2/ Soit $z \in \mathbb{C}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} / \{\alpha + \beta \not\equiv \pi [2\pi]\}$

$$z = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}} = \frac{e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right)}{e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\right)}$$

$$z = \frac{2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \in \mathbb{R}$$

$$|z| = \left|\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right|$$

<u>* 1er cas</u>: $z > 0$

$$z = \left|\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right| e^{i0}$$

$\arg(z) = 0 [2\pi]$

<u>* 2ème cas</u>: $z < 0$

$$z = \left|\frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right| e^{i\pi}$$

$\arg(z) = \pi [2\pi]$

Piero T. Colle de la semaine 2

Déterminer $|u|$ et $\arg(u)$: $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Solution :

$$|u| = \sqrt{\sqrt{2-\sqrt{2}}^2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}^2} = \sqrt{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\begin{aligned}
u^2 &= \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= 2-\sqrt{2} - (2+\sqrt{2}) - 2i\left(\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}\right) \\
&= -2\sqrt{2} - 2i\left(\sqrt{4-2}\right) \\
&= -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \\
&= 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\
&= 4\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\
&= 4e^{-i\frac{3\pi}{4}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^2 = 4e^{-i\frac{3\pi}{4}} &\iff u^2 - 4e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 0 \\
&\iff u^2 - \left(2e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right)^2 = 0 \\
&\iff \left(u - 2e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right)\left(u + 2e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right) = 0 \\
&\iff \begin{cases} u = 2e^{i\frac{5\pi}{8}} \\ \text{ou} \\ u = 2e^{-i\frac{3\pi}{8}} \end{cases} \quad (\mathbb{C} \text{ intègre})
\end{aligned}$$

Or la partie réelle de u est positive donc on en conclu que $u = 2e^{-i\frac{3\pi}{8}}$.

On a donc : $\arg(u) \equiv -\frac{3\pi}{8} \; [2\pi]$

Paul C. Colle de la semaine 2

> Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$ et $z_1 z_2 \neq -1$. Démontrer que $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel et préciser son module

<u>Solution:</u> Un nombre complexe est réel si et seulement si il est égal à son conjugué.
Montrons que pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$ tels que $z_1 z_2 \neq -1$,

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)}$$

Soient $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = \frac{e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}}{1+e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}} = \frac{e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}}{1+e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$ (exponentielle d'une somme

$$\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}}$$ (propriétés algébriques de la conjugaison)

$$= \frac{e^{-i\theta_1}+e^{-i\theta_2}}{1+e^{-i\theta_1}e^{-i\theta_2}}$$ (conjugué d'une forme trigonométrique)

$$= \frac{e^{-i\theta_1}+e^{-i\theta_2}}{1+e^{-i(\theta_1+\theta_2)}} \times \frac{e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$ (exponentielle d'une somme)

$$= \frac{e^{i(\theta_1-\theta_1+\theta_2)}+e^{i(\theta_1+\theta_2-\theta_2)}}{e^{i(\theta_1+\theta_2)}+e^{i(\theta_1-\theta_1+\theta_2-\theta_2)}}$$ (exponentielle d'une somme)

$$= \frac{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}}{1 + e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}}$$

$$= \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$$

Ainsi $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right)}$

$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est donc réel pour tout $(z_1 ; z_2) \in \mathbb{U}^2$ tels que $z_1 z_2 \neq -1$

Comme $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right) = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \\ \mathrm{Im}\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\left|\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right) + \mathrm{Im}^2\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right)^2}$$

- 1er cas : $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \geq 0$

  Alors $\left|\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right| = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$

- 2nd cas : $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} < 0$

  Alors $\left|\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right| = -\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right)$

LÉON. N Colle de la semaine 2

Exercice 5 — Soient $(u, v, w) \in \mathbb{U}^3$.

Démontrer $\left| \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \right| = |u+v+w|$ et en déduire $|uv + uw + vw| = |u+v+w|$

Solution : soit $(u, v, w) \in \mathbb{U}^3$

$$\left| \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \right| = \left| \frac{\bar{u}}{\underbrace{|u|^2}_{1}} + \frac{\bar{v}}{\underbrace{|v|^2}_{1}} + \frac{\bar{w}}{\underbrace{|w|^2}_{1}} \right|$$ (propriété de l'inverse et de la conjugaison)

car $(u, v, w) \in \mathbb{U}^3$ et par définition $|u| = |v| = |w| = 1$

Or $|\bar{u}| = |u|$, $|\bar{v}| = |v|$, $|\bar{w}| = |w|$ (propriété du module du conjugué)

Alors, $\boxed{\left| \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \right| = |u+v+w|}$

De plus $$\left| \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \right| = \left| \frac{vw + uw + uv}{uvw} \right|$$

$$= \frac{|vw + uw + uv|}{\underbrace{|u||v||w|}_{=1}}$$ (propriétés algébriques du module)

Alors,

$$\boxed{|uv + uw + vw| = |u+v+w|}$$

Martin K.-L. Colle semaine 2.

Résoudre l'équation (E): $\frac{|z-1|}{|z+2|} = \sqrt{2}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

Solution :

Trouvons les $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ tels que $\frac{|z-1|}{|z+2|} = \sqrt{2}$.

On a :

$$\frac{|z-1|}{|z+2|} = \sqrt{2} \iff \frac{Re(z-1)^2 + Im(z-1)^2}{Re(z+2)^2 + Im(z+2)^2} = 2$$

L'équivalence est vraie car un module est toujours positif. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = \underbrace{x}_{Re(z)} + i\underbrace{y}_{Im(z)}$. Ainsi, l'équation devient :

$$\frac{(x-1)^2 + y^2}{\underbrace{(x+2)^2 + y^2}_{\neq 0}} = 2 \iff x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x^2 + 8x + 8 + 2y^2$$

$$\iff x^2 + 10x + 7 + y^2 = 0$$

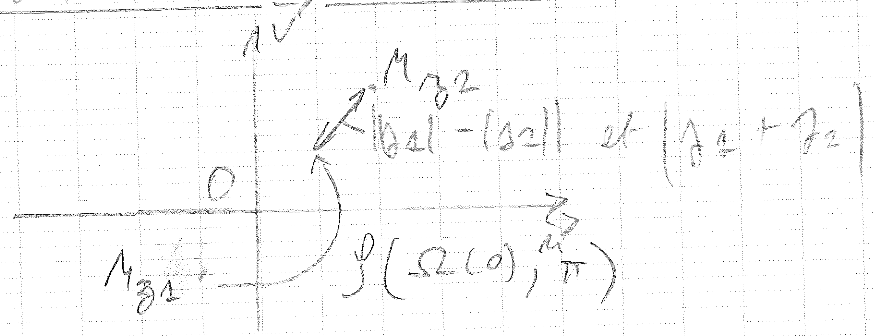
$$\iff (x+5)^2 + y^2 = 18$$

Or, $(x+5)^2 + y^2 = 18$ correspond à l'équation du cercle de centre $(-5,0)$ et de rayon $\sqrt{18}$. On conclut donc que l'ensemble des $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ solutions à (E) sont les nombres complexes vérifiant $(Re(z)+5)^2 + Im(z)^2 = 18$, l'équation du cercle de centre $(-5,0)$ et de rayon $\sqrt{18}$.

Aurélien M. Colle semaine 2

① C.N.S pour : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2$; $\big||z_1| - |z_2|\big| = |z_1 + z_2|$

Intuition :



Lorsque M_{z_1}, O, M_{z_2} sont alignés et que $\overrightarrow{OM}_{z_1} = -\overrightarrow{OM}_{z_2}$ on $\arg(z_1) = \arg(z_2) + \pi \ [2\pi]$

Alors on se retrouve dans une situation où ① est vrai. On conjecture comme C.N.S. de ① ; ① $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^-$ $\left| \begin{array}{l} z_1 = \lambda z_2 \\ \text{ou} \\ z_2 = \lambda z_1 \end{array} \right.$

On raisonne par équivalence ;

$(z_1, z_2) = (0,0)$ Alors on a bien $|0| = |0|$.

Par la suite on suppose que $(z_1, z_2) \neq (0,0)$;

$$\underbrace{\big||z_1| - |z_2|\big|}_{\in \mathbb{R}^+} = \underbrace{|z_1 + z_2|}_{\in \mathbb{R}^+}$$

$$\Leftrightarrow \big||z_1| - |z_2|\big|^2 = |z_1 + z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \underbrace{z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}}_{\boxed{2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \text{ ou } 2\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -|z_1||z_2| = \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \text{ donc } z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}^- \\ \text{ou} \\ -|z_1||z_2| = \mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2) \text{ donc } \overline{z_1}z_2 \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \underline{\text{si } z_2 \neq 0 :} \\ z_1 = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{\overline{z_2} z_2} z_2 = \dfrac{\overbrace{z_1 \overline{z_2}}^{\in \mathbb{R}^-}}{\underbrace{|z_1|^2}_{\in \mathbb{R}^+}} z_2 = \underline{\overbrace{\lambda}^{\in \mathbb{R}^-} z_2} \\ \underline{\text{si } z_1 \neq 0 :} \\ z_2 = \dfrac{z_2 \overline{z_1}}{\overline{z_1} z_1} z_1 = \dfrac{\overbrace{z_2 \overline{z_1}}^{\in \mathbb{R}^-}}{\underbrace{|z_1|^2}_{\in \mathbb{R}^+}} z_1 = \underline{\overbrace{\lambda'}^{\in \mathbb{R}^-} z_1} \end{cases}$$

Thibault N. Colle semaine 2.

Calcul à faire avant l'exercice : Une forme trigonométrique de $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

Exercice : Énoncer les deux inégalités triangulaires. Donner une majoration du module d'une somme de n nombres complexes. Chercher également une minoration de ce module.

Solution:

On calcule $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{5\pi}{12}}}$$

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

On cherche à majorer : $\left|\sum_{\ell=1}^{n} z_\ell\right|$.

On raisonne par récurrence simple. On pose :

$\forall n$, $P(n)$ = " $\left|\sum_{\ell=1}^{n} z_\ell\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |z_\ell|$ "

Initialisation: $\left|\sum_{\ell=1}^{1} z_\ell\right| = |z_1|$

$\sum_{\ell=1}^{1} |z_\ell| = |z_1|$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité: On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vrai. On montre $P(n+1)$ vrai.

$\left|\sum_{\ell=1}^{n+1} z_\ell\right| = \left|z_{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} z_\ell\right| \leqslant |z_{n+1}| + \left|\sum_{\ell=1}^{n} z_\ell\right|$ d'après l'inégalité triangulaire.

Or d'après l'hypothèse de récurrence : $\left|\sum_{\ell=1}^{n} z_\ell\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} |z_\ell|$ donc :

$\left|\sum_{l=1}^{n+1} z_l\right| \leqslant |z_{n+1}| + \sum_{l=1}^{n} |z_l|$ ~~d'où~~

d'où $\left|\sum_{l=1}^{n+1} z_l\right| \leqslant \sum_{l=1}^{n+1} |z_l|$. On a bien montrer $P(n+1)$ vrai.

On a initialisation au rang $n=1$ et hérédité donc $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

~~Par définition, $\left|\sum_{l=1}^{n} z_l\right| \geqslant 0$~~ On cherche un minorant de $\left|\sum_{l=1}^{n} z_l\right|$.

$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant 0$.

Or $\sum_{l=1}^{n} z_l \in \mathbb{C}$ donc $\left|\sum_{l=1}^{n} z_l\right| \geqslant 0$.

Jules R. Colle de la semaine 2

Exercice : Soient a et b des complexes de module 1.
Montrer que $\frac{a+b}{1+ab}$, avec $ab \neq -1$, est un réel.

Solution : a et b étant des complexes de modules 1, on peut donc les écrire sous la forme :

$$a = e^{it_1} \quad b = e^{it_2} \quad \text{où } (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi, on a :

$$\frac{a+b}{1+ab} = \frac{e^{it_1} + e^{it_2}}{1 + e^{i(t_1+t_2)}}$$

$$\text{donc} = \frac{2\, e^{i\frac{t_1+t_2}{2}} \cos\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)}{2\, e^{i\frac{t_1+t_2}{2}} \cos\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} \quad \text{(technique de l'angle moitié)}$$

$$\text{donc} = \frac{\cos\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}$$

Or $\cos\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right) \in \mathbb{R}$ et $\cos\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \in \mathbb{R}$ donc $\frac{\cos\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} \in \mathbb{R}$

ainsi $\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.

Louis. D — Semaine n°2

EXERCICE 2 — Déterminer l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ tels que $\left|\frac{z+1}{z-2}\right| = \sqrt{2}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tq $\left|\frac{z+1}{z-2}\right| = \sqrt{2}$

$\left|\frac{z+1}{z-2}\right| > 0$, $\sqrt{2} > 0$

$\left|\frac{z+1}{z-2}\right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z+1}{z-2}\right|^2 = 2$ — $|z|^2 = z\bar{z}$ Propriété du module

$\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2} \times \overline{\left(\frac{z+1}{z-2}\right)} = 2$ — additivité de la conjugaison

$\Leftrightarrow \frac{(z+1)(\bar{z}+1)}{(z-2)(\bar{z}-2)} = 2$

$\Leftrightarrow (z+1)(\bar{z}+1) = 2(z-2)(\bar{z}-2)$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 2z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 8$

$\Leftrightarrow 0 = z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} + 7$

Soit $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$\left|\frac{z+1}{z-2}\right| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 0 = a^2 + b^2 - 10a + 7$

$\Leftrightarrow 0 = (a-5)^2 - 25 + b^2 + 7$

$\Leftrightarrow (a-5)^2 + b^2 = 18$

$\Leftrightarrow |z-5|^2 = 18$ — On obtient une équation de cercle $\mathcal{E}(5, \sqrt{18})$

$|z-5| > 0$ et $18 > 0$

$\Leftrightarrow |z-5| = \sqrt{18}$

Ainsi l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ tq $\left|\frac{z+1}{z-2}\right| = \sqrt{2}$ sont les points du cercle de centre $M(5, 0)$ et de rayon $\sqrt{18}$.

Hugo J

Colle de la semaine 2.

Exercice 1.

Mettre sous forme algébrique $\dfrac{(2-3i)^2}{1-i}$

Mettre sous forme exponentielle $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}$

Exercice 3 : Soient a et b des complexes de module 1.

Montrer que $\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ est réel.

Solution. Exercice 1

- $$\frac{(2-3i)^2}{1-i} = \frac{4-9-12i}{1-i} = \frac{(-5-12i)(1+i)}{2}$$
$$= \frac{-5+12+i(-5-12)}{2}$$
$$= \frac{7}{2} - \frac{17}{2}i$$

- $$\frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{2i}{1-i} = \frac{-2+2i}{2}$$
$$= -1+i.$$

Or $|-1+i| = \sqrt{2}$

Alors $$\frac{(1+i)^2}{1-i} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Exercice 3:

Soient a et b des complexes de module 1.

Soient p et q des réels tels que :

$$\begin{cases} a = e^{ip} \\ b = e^{iq} \end{cases}$$

Nous allons montrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est réel.

$$\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{\left(e^{ip} + e^{iq}\right)^2}{e^{ip}\,e^{iq}} = \frac{\left(e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}}\right)\right)^2}{e^{ip}\,e^{iq}}$$

$$= \frac{\left(e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}\left(2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)\right)^2}{e^{i(p+q)}} \text{ (angle moitié)}$$

$$= \frac{e^{i(p+q)}\left(2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)^2}{e^{i(p+q)}}$$

$$= \left(2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)^2$$

Or $2 \in \mathbb{R}$ et $\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}\right)$

Donc $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est bien un réel

Ahmed
Amine S.

Semaine 2

Déterminer l'ensemble des entiers naturels tels que $(1+i)^n$ soit réel.

Solution:

$(1+i)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}((1+i)^n) = 0$

Posons $z = 1+1$.

On a : $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
et cherchons un argument de z : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un arg de z tq

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{et} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Ainsi $\theta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$. On obtient alors la forme suivante de z

$$z = |z| e^{i\theta} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Or: $\operatorname{Im}(z^n) = \operatorname{Im}\left(\left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n\right) = \operatorname{Im}\left(\sqrt{2}^n e^{i\frac{\pi n}{4}}\right)$ (Moivre)

Or: $\sqrt{2}^n e^{i\frac{\pi n}{4}} = \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$
donc $\operatorname{Im}\left(\sqrt{2}^n e^{i\frac{\pi n}{4}}\right) = \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

Cherchons pour quels n $Im(z^n) = 0$:

$(E) : Im(z^n) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2}^n}_{>0} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$

Or $\sin(2\pi) = 0$

Alors :

$(E) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sin(2\pi)$

$\underset{\text{égalité sinus}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \frac{n\pi}{4} = 2\pi + 2k\pi \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \frac{n\pi}{4} = (\pi - 2\pi) + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } n = 8 + 8k \\ \text{et} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } n = -4 + 8k \end{cases}$

L'ensemble des entiers naturels vérifiant (E) est :

$S = \{ 8 + 8k \, ; -4 + 8k \, : k \in \mathbb{Z} \}$

L'ensemble des entiers naturels tel que,

$n = 8 + 8k$ et $n = -4 + 8k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Sophie G.

Soient $(u, v, w) \in \mathbb{U}$

Démontrer $\left|\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right| = |u+v+w|$ et en déduire $|uv+uw+vw| = |u+v+w|$.

Solution

Soit $(u, v, w) \in \mathbb{U}^3$

Alors

$$\exists (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3, \quad u = e^{it_1} \quad v = e^{it_2} \quad w = e^{it_3}$$

1. $\overline{u} = \frac{1}{u} \quad = e^{-it_1}$

$\overline{v} = \frac{1}{v} \quad = e^{-t_2}$

$\overline{w} = \frac{1}{w} \quad = e^{-t_3}$

donc $\left|\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right| = \left|\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}\right|$

$= \left|\overline{u+v+w}\right|$ (additivité des conjugués)

$= |u+v+w|$ (car $|\overline{z}| = |z|$ avec $z \in \mathbb{C}$)

2. $|u+v+w| = |uvw| \times |u+v+w|$ ($|uvw| = 1$ car $(u,v,w) \in \mathbb{U}^3$)

$= |uvw| \left|\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right|$ (d'après 1.)

$= \left|\cancel{u}vw \times \frac{1}{\cancel{u}} + u\cancel{v}w \times \frac{1}{\cancel{v}} + uv\cancel{w} \times \frac{1}{\cancel{w}}\right|$ (par multiplicité des modules)

$|vw + uw + uv|$

Alexandre M. Colle semaine du 26/09/2022

Exercice 1 : Mettre sous forme algébrique $\dfrac{(2-3i)^2}{1-i}$.

Mettre sous forme exponentielle $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}$

Exercice 2 : Soient a et b des complexes de module 1. Montrer que $\dfrac{a+b}{1+ab}$, avec $ab \neq -1$, est un réel.

Solution Exercice 1 : $\dfrac{(2-3i)^2}{1-i} = (2-3i)^2 \times \dfrac{1}{1-i}$

$= (4 - 2\times 2\times 3i + (3i)^2) \times \dfrac{1}{1-i}$ [identité remarquable]

$= (-5-12i) \times \dfrac{1+i}{1^2+(-1)^2}$ [par inverse d'un complexe non nul]

$= \dfrac{(-5+12) + i(-5+-12)}{2}$ [multiplication de deux complexes]

$$\boxed{\frac{2-3i^2}{1-i} = \frac{7}{2} - \frac{17i}{2}}$$

On cherche le module de $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}$

$\left|\dfrac{(1+i)^2}{1-i}\right| = \dfrac{|(1+i)^2|}{|1-i|}$ [module d'un quotient]

$= \dfrac{|1^2+2i+i^2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$ [identité remarquable et def du module]

$= \dfrac{|2i|}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2}}$

$\left|\dfrac{(1+i)^2}{1-i}\right| = \sqrt{2}$

On cherche une forme algébrique de $\dfrac{(1+i)^2}{1-i}$

$$\frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{2i}{1-i}$$ [développement déjà effectué]

$$= \frac{2i \times (1+i)}{2}$$

$$= \frac{-2+2i}{2}$$

$$= -1+i$$

On factorise $-1+i$ par $|-1+i|$

$$-1+i = \sqrt{2}\underbrace{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}_{\in \mathbb{U}}$$

D'où $\boxed{\frac{(1+i)^2}{1-i} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

Exercice 2.

Soit $(a,b) \in \mathbb{U}^2$ avec $ab \neq -1$

comme $a \in \mathbb{U}$, il existe $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^{i\theta_1}$

comme $b \in \mathbb{U}$, il existe $\theta_2 \in \mathbb{R}$ tel que $b = e^{i\theta_2}$

Ainsi, $$\frac{a+b}{1+ab} = \frac{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}}{1+e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}}$$

$$= \frac{e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{-i\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}\right)}{1+e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$$ [technique de l'angle moitié] [propriété de multiplication de forme exponentielle]

$$= \frac{e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \times 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(e^{-i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}\right)}$$ [formule d'Euler] [angle moitié]

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$$ [simplification par $e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$] [formule d'Euler]

$$\boxed{\frac{a+b}{1+ab} = \frac{\overbrace{\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}^{\in \mathbb{R}}}{\underbrace{\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}_{\in \mathbb{R}}}}$$

CQFD.

Rayan G.   Colle de la semaine 2

Exercice n°7 :

Déterminer l'ensemble des points M du plan dont les affixes vérifient :

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Solution : On résout :

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi]$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{1 ; -1\}$

On exclut 1 car $z-1=0$ et on ne peut pas diviser par 0.
On exclut -1 car $\frac{z+1}{z-1} = 0$ et $\arg(0)$ n'existe pas.

En se basant sur le cours, on voit que :

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(Z) \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi]$$
avec $Z \neq 0$

Ainsi $\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi] \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$

On voit que :
$\forall Z \in \mathbb{C}$
$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{Z} = -Z$$

Ainsi $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = -\frac{z+1}{z-1}$

Soit $r>0$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$z = re^{i\theta} \quad \text{et} \quad \bar{z} = re^{-i\theta}$$

$$\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = -\frac{z+1}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{z+1}}{\overline{z-1}} = -\frac{z+1}{z-1} \qquad \text{(Conjugué du quotient)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = \frac{-z-1}{z-1} \qquad \text{(Conjugué d'une somme)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{re^{-i\theta}+1}{re^{-i\theta}-1} = \frac{-re^{i\theta}-1}{re^{i\theta}-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (re^{-i\theta}+1)(re^{i\theta}-1) = (-re^{i\theta}-1)(re^{-i\theta}-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 \times e^{i(\theta-\theta)} - re^{-i\theta} + re^{i\theta} - 1 = -r^2 e^{i(\theta-\theta)} - re^{-i\theta} + re^{i\theta} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 + r^2 - re^{-i\theta} + re^{-i\theta} + re^{i\theta} - re^{i\theta} = 1+1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2r^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = 1$$

On ~~$r = |z|$ donc~~ $r > 0$ donc $r \neq (-1)$

$$\Leftrightarrow \quad r = 1$$

Ainsi, $\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ (\pi) \Leftrightarrow |z| = 1$

Ainsi, $S = \mathbb{U} \setminus \{-1, 1\}$

Antoine B. Colle de la semaine 2

Exercice 14. *Déterminer les nombres complexes tels que* $z, 1-z$ *et* $\frac{1}{z}$ *aient même module.*

Solution : Procédons par analyse-synthèse.

<u>Analyse</u> : Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| = |1-z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ $(*)$

$z = a+ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

. $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

. $|1-z| = |(1-a)-ib| = \sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}$

$= \sqrt{1-2a+a^2+b^2}$

. $\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}\right|$

$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}}$

On sait que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ (D'après $(*)$)

donc $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{\frac{1}{(a^2+b^2)^2}}$ (multiplicité de la racine carré)

donc $1 = \sqrt{\frac{1}{(a^2+b^2)^2}}$

soit $1 = (a^2+b^2)^2$

donc $\underline{a^2+b^2 = 1}$

On sait que $|z| = |1-z|$ (D'après $(*)$)

donc $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1-2a+a^2+b^2}$

soit $\sqrt{1} = \sqrt{2-2a}$

ainsi $2-2a = 1$

donc $a = \frac{1}{2}$

Enfin $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+b^2}$
$= 1.$

donc $\left(\frac{1}{2}\right)^2+b^2 = 1$

donc $b^2 = \frac{3}{4}$

subséquemment $b_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ou $b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a deux couples candidats: $z_1 = a+b_1 i$
$z_2 = a+b_2 i$

Synthèse: vérifions que les candidats trouvés en fin d'analyse satisfont les conditions nécessaires.

- $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$

$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

- $|1-z_1| = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$|1-z_2| = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

- $\left|\frac{1}{z_1}\right| = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2}+\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{1^2}+\frac{\frac{3}{4}}{1^2}} = \sqrt{1} = 1$

$\left|\frac{1}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2}} = \sqrt{1} = 1$

Les candidats trouvés en fin d'analyse correspondent.
Ils sont solutions de (*)

Hugo D. Colle de la semaine 2

Exercice : Soit z un nombre complexe de module 1.
A quelle condition a-t-on $|1+z| \leq 1$?

Solution : Soit $z \in \mathbb{C}$, z peut s'écrire sous la forme e^{it} avec $t \in]-\pi;\pi]$

$$|1+z| \leq 1 \iff |1+e^{it}| \leq 1$$

$$\iff |\underbrace{2\cos(\tfrac{t}{2})}_{\text{module}} e^{i\frac{t}{2}}| \leq 1 \quad \text{(Technique de l'angle moitié)}$$

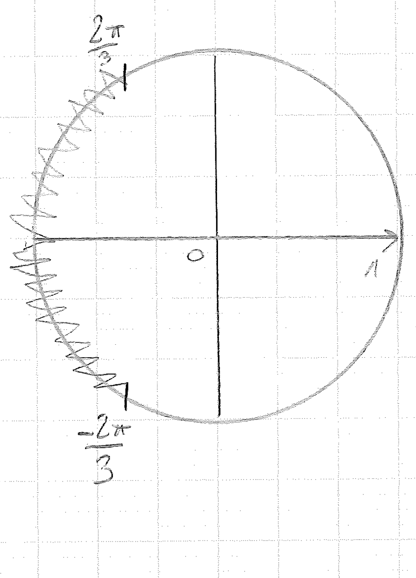
$$\iff 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) \leq 1$$

$$\iff \cos\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\iff \cos\left(\frac{t}{2}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\underset{\text{Cas "d'inégalité" des cosinus}}{\iff} \begin{cases} \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ \frac{t}{2} \leq \frac{-\pi}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} t \leq \frac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ t \leq \frac{-2\pi}{3} \end{cases}$$

D'où $Sol = \left]-\pi;-\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$



Mathéo.N

Correction d'exercice de colle

Exercice 1 : Mettre sous forme algébrique $\frac{(2-3i)^2}{1-i}$.

Mettre sous forme exponentielle $\frac{(1+i)^2}{1-i}$

Mettre sous forme algébrique. $\frac{(2-3i)^2}{1-i}$ et $\frac{(1+i)^2}{1-i}$

Solution :

$$\frac{(2-3i)^2}{1-i} = \frac{-5-12i}{1-i}$$

$$= \frac{(-5-12i)(1+i)}{1^2+1^2}$$: on multiplie par le conjugué $(1+i \neq 0)$

$$= \frac{7-17i}{2}$$

$$= \boxed{\frac{7}{2} - i\frac{17}{2}}$$

$$\frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^2}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}$$

$$= \frac{2\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}$$: on retrouve $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
On en déduit les formes exponentielles des complexes.

$$= \sqrt{2}\,\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$: on utilise Moivre on a donc : $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = e^{i2\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$$= \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\frac{(1+i)^2}{1-i} = \boxed{\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

Mathéo N. Colle de la semaine 2.

Exercice 2 : Déterminer les nombres complexes z tels que les points M, N et L d'affixes respectives z, i et iz soient alignés.

Solution.

Soient les points M, N et L d'abscisses respectives z, i et iz.
Etant alignés on a :

$$\vec{NM} = \lambda \vec{NL} \text{ , avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z_M - z_N = \lambda (z_L - z_N)$$

$$\Leftrightarrow z - i = \lambda (iz - i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-i}{iz-i} = \lambda$$

On pose $z = a+ib$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$A = \frac{z-i}{i(z-1)} = \frac{a+ib-i}{i(a+ib-1)} = \frac{a+i(b-1)}{-b+i(a-1)}$$

Exprimons A sous forme algébrique :

$$A = \frac{(a+i(b-1))(-b-i(a-1))}{(-b)^2+(a-1)^2} = \frac{(-ab+ab-b-a+1)+i(-a^2+a-b^2+b)}{b^2+a^2-2a+1}$$

$$= \frac{(-b-a+1)}{b^2+a^2-2a+1} - i\frac{(a^2-a+b^2-b)}{b^2+a^2-2a+1}$$

Or : $A = \lambda \in \mathbb{R}$, ainsi on a : $\mathrm{Im}(A) = 0$

$$\Leftrightarrow a^2 - a + b^2 - b = 0$$

Q1 : $a^2 - a + b^2 - b = 0$

$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

On en déduit que les complexes $z = a + bi$ correspondent au points du Cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \frac{1}{2}$

Ainsi z est l'affixe de tous les points vérifiant :

$$\mathcal{C}(\Omega, r) = \left\{ M_z \in P : \left| z - z_\Omega \right| = r \right\}$$

$$= \boxed{\left\{ M_z \in P : \left| z - \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}}$$

Semaine 2

Elian A.

Exercice 3 : Soient a et b des complexes de module 1. Montrer que $\frac{a+b}{1+ab}$, avec $ab \neq -1$, est un réel.

Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a, b) \in \mathbb{U}^2$ et $a \times b \neq -1$

On a alors $\frac{a+b}{1+ab} = \frac{e^{it_1} + e^{it_2}}{1 + e^{it_1} e^{it_2}}$

(angle moitié)

$$= \frac{2e^{i\frac{t_1+t_2}{2}} \cos\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)}{2e^{i\frac{t_1+t_2}{2}} \cos\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}$$

Or $\frac{\cos\left(\frac{t_1-t_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} \in \mathbb{R}$

Donc pour tout $(a, b) \in \mathbb{U}^2$ tel que $a \times b \neq 1$

$\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$

Maximilien T. Colle de la Semaine 2

Exercice 9) Montrer que pour tout t réel et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

<u>Solution</u>: Soit $t \in \mathbb{R}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt) \quad \text{(Développement)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{t}{2}+kt\right) + \sin\left(\frac{t}{2}-kt\right)\right) \quad \left(\begin{array}{l}\text{Formule de transformation}\\ \text{produit en somme}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{t}{2}+kt\right) - \sum_{k=1}^{n}\sin\left(-\frac{t}{2}+kt\right) \quad \left(\begin{array}{l}\text{Sinus impaire}\\ \text{Séparation des sommes}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{t}{2}+kt\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{t}{2}+kt\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{t}{2}+kt\right) + \sin\left(\frac{t}{2}+nt\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{t}{2}+kt\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \quad \text{(Compensation)}$$

$$= \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{(Annulation des sommes)}$$

Louis B. Khôlle de la semaine 2

- Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$
Montrer que $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$ si et seulement si $|z| = 1$

Solution : $\frac{z-i}{1-zi} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$

Raisonnement par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$ $\frac{z-i}{1-zi} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-i}{1-iz} = \frac{\bar{z}+i}{1+i\bar{z}}$

$\Leftrightarrow (z-i)(1+i\bar{z}) = (1-iz)(\bar{z}+i)$

$\Leftrightarrow z + |z|^2 i - i + \bar{z} = \bar{z} + i - |z|^2 i + z$

$\Leftrightarrow |z|^2 i - i = i - |z|^2 i$

$\Leftrightarrow 2|z|^2 i = 2i$

$\Leftrightarrow |z|^2 i = i$

$\Leftrightarrow |z|^2 = 1$

On a donc $|z| = 1$

$\boxed{\Leftarrow}$ $|z| = 1$, on peut donc écrire

$z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} (2\pi)\}$

Ainsi on a : $\frac{z-i}{1-iz} = \frac{e^{it}-i}{1-ie^{it}}$

$= \frac{\cos(t) + i\sin(t) - i}{1 - i(\cos(t) + i\sin(t))}$

TSVP

(multiplication par le conjugué du dénominateur)

$$= \frac{(\cos(t)+i\sin(t)-i)(1+\sin(t)+i\cos(t))}{|1+\sin(t)-i\cos(t)|^2}$$

$$= \frac{\cos(t)+\cos(t)\sin(t)+i\cos^2(t)+i\sin(t)+i\sin^2(t)-\cos(t)\sin(t)-i-i\sin(t)+\cos(t)}{2+2\sin(t)}$$

$$= \frac{2\cos(t)}{2+2\sin(t)}$$

$$= \frac{\cos(t)}{1+\sin(t)} \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $|z| = 1 \Rightarrow \frac{z-i}{1+iz} \in \mathbb{R}$

Conclusion : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$

$$\frac{z-i}{1+iz} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$$