NISS
MATHEO

Exercice de colle, semaine 19

Exercice 5 — Donner le $DL_3\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $f : x \longmapsto \ln(\sin(x))$.

Solution :

On travaille sur $x = h + \frac{\pi}{3}$ $\quad h \in \mathbb{R}$

Ainsi. $\sin(x) = \sin\left(h + \frac{\pi}{3}\right)$

$$= \sin(h)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(h)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin(h) \times \frac{1}{2} + \cos(h)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Or : $x \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{3}$

sin et cos ont comme $DL_3(0)$:

$$\sin(h) \underset{0}{=} h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)$$

$$\cos(h) \underset{0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)$$

On a alors : $\sin(x) \underset{0}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}h - \frac{\sqrt{3}}{4}h^2 - \frac{1}{12}h^3 + o(h^3)$

Ainsi : $\ln(\sin(x)) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}h - \frac{\sqrt{3}}{4}h^2 - \frac{1}{12}h^3 + o(h^3)\right)$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6\sqrt{3}}h^3 + o(h^3)}_{u(h)}\Big)$$

On a : $u(0) = 0$

Ainsi : $\ln(1 + u(h)) \underset{0}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6\sqrt{3}}h^3 + o(h^3))$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6\sqrt{3}}h^3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6\sqrt{3}}h^3\right)$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}h - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6\sqrt{3}}h^3\right)^3 + o(h^3)$$

Ainsi :

$$\ln(1+u(h)) = \frac{1h}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6\sqrt{3}}h^3 - \frac{1}{6}h^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}h^3 + \frac{1}{9\sqrt{3}}h^3 + o(h^3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}h - \frac{2}{3}h^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}h^3 + o(h^3)$$

Ainsi : $\ln(\sin(x)) \underset{0}{=} \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}h - \frac{2}{3}h^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}h^3 + o(h^3)$

Or : $x = h + \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow h = x - \frac{\pi}{3}$

Ainsi : $\boxed{\ln(\sin(x)) \underset{\frac{\pi}{3}}{=} \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)}$

Colle de la semaine 19

Adam M.

Calculer les DLs suivants

$DL_4(0)$ de $x \to e^{\cos(x)}$

$DL_6(0)$ de $x \to \dfrac{1}{1+\sin(x)}$

Solution :

1. Au voisinage de 0

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$e^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} e^1\Big(e^{\underbrace{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}_{u(x)}}\Big)$$

$$e^{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

$u(0)=0$ donc par composée de DL

$$e^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} e\Big(1 + \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right] + \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right]^2 + \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right]^3 + \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right]^4 + o(x^4)\Big)$$

$$\underset{x\to 0}{=} e\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4}\right] + o(x^4)$$

$$\underset{x\to 0}{=} e\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{7x^4}{24}\right] + o(x^4)$$

2. Au voisinage de 0

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 +$$

$\sin(0)=0$ par composée de DL

$$\frac{1}{1+\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right] + \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right]^2 - \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right]^3 + \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right]^4 - \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right]^5 + \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right]^6 + o(x^6$$

$$\frac{1}{1+\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} - \frac{61x^5}{120} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6)$$

Celia A.   Colle de la semaine 20

énoncé :

> Soit f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ si $x \neq 0$ et par $f(0) = 1$ sinon.
>
> Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

Solution : Posons $I =]-1;+\infty[$. Soit $x \in I^*$.

Par opérations de fonctions continues, f est continue sur I^*.
Nous vérifions maintenant si elle est continue en 0.

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$
$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + o(1)$$

Donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x\neq 0}]{} 1 = f(0) \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur }]-1;+\infty[}$$

Par opérations de fonctions dérivables, f est dérivable sur I^*.
Nous vérifions maintenant si elle est dérivable en 0.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + o(1)$$

Donc $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x\neq 0}]{} -\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur } I \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}}$$

Nous devons maintenant vérifier si f' est continue sur I.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{x} + \ln(1+x) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x+x^2} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

Par opérations sur les fonctions continues, f' est continue sur I^*. Nous vérifions maintenant si elle est continue en 0.

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-(+x^2)}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - 1 + o(1) \qquad \left(-x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\right)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + o(1)$$

Donc $f'(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x\neq 0}]{} -\frac{1}{2} = f'(0) \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-1; +\infty[}$$

ENONCÉ :

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan(x)}$

1/ Déterminer le domaine de définition de f.

2/ Calculer le $DL_5(0)$ de tangente.

3/ En déduire le $D_3(0)$ de f en prolongeant.

SOLUTION :

1/ On sait que $\tan : x \longmapsto \tan(x)$ est définie sur :

$$\mathcal{D}_{\tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$$

On sait aussi que tan s'annule sur $\{k\pi \,;\, k\in\mathbb{Z}\}$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

On a donc :

$$\mathcal{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] k\frac{\pi}{2} \,;\, (k+1)\frac{\pi}{2} \right[$$

2/ On connait un $DL_4(0)$ de tangente, donné par : $\tan(x) \underset{x\to0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$

Par opération sur les DL, il vient $\tan^2(x) \underset{x\to0}{=} x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$

$$1 + \tan^2(x) \underset{x\to0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

Par primitivation sur les DL, il vient $\tan(x) \underset{x\to0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$,

qui est un $DL_5(0)$ de tan.

3/ $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan(x)} = \dfrac{x - \tan(x)}{x\tan(x)} \underset{x\to0}{=} \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5\right) \dfrac{1}{x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{2}{15}x^6 + o(x^6)}$

$$\underset{x\to0}{=} \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{15}x^3\right) \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2}{15}x^4 + o(x^4)}$$

On pose $u(x) = \frac{-1}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4$

On remarque $u(0) = 0$.

il vient :

$$\frac{1}{1-u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + u(x) + u^2(x) + u^3(x) + u^4(x) + o(x^4)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4 + \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + o(x^4)$$

et donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{15}x^3\right)\left(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + o(x^4)\right)$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{3} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{x^5}{45} + \frac{2}{15}x^3 - \frac{2x^5}{45} + o(x^5)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{3} + \frac{1}{45}x^3 - \frac{1}{45}x^5 + o(x^5)$$

f admet un $DL_5(0)$ et donc est prolongeable par continuité.

$$\tilde{f} \begin{cases} D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \quad 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Anaï D

Rapport de colle S19

6.

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$.

Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f et sa position par rapport à C_f au voisinage du point d'abscisse 1

Solution : Soit f défini sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x)=\dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$

En calculant le DL au point 1, on montre que f est défini en 1.

On pose $h=x-1$ où $h\to 0$ on a donc

$$\ln(h+1)\underset{h\to 0}{=} h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)$$

d'où
$$(h+1)\ln(h+1)\underset{h\to 0}{=}(h+1)\left(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}\right)+o(h^3)$$
$$\underset{h\to 0}{=} h^2-\frac{h^3}{2}+h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)$$
$$\boxed{\underset{h\to 0}{=} h+\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{6}h^3+o(h^3)}$$

$$\frac{1}{(h+1)^2-1}=\frac{1}{h^2+2h}=\frac{1}{2h}\left(\frac{1}{1+\underbrace{\frac{h}{2}}_{u}}\right)$$

Or $u(0)=0$ donc par composition de DL on obtient

$$\frac{1}{(h+1)^2-1}\underset{h\to 0}{=}\frac{1}{2h}\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}-\frac{h^3}{8}\right)+o(h^3)$$

$$\boxed{\underset{h\to 0}{=}\frac{1}{2h}-\frac{1}{4}+\frac{h}{8}-\frac{h^2}{16}+o(h^2)}$$

Par multiplication de DL, on obtient

$$f(h)\underset{h\to 0}{=}\left(h+\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{6}h^3\right)\left(\frac{1}{2h}-\frac{1}{4}+\frac{h}{8}-\frac{h^2}{16}\right)+o(h^3)$$

$$\underset{h\to 0}{=}\frac{1}{2}-\frac{h}{4}+\frac{h^2}{8}+\frac{h}{4}-\frac{h^2}{8}-\frac{h^3}{16}+\frac{h^3}{16}+\frac{h^3}{24}-\frac{1}{12}h^2+o(h^3)$$

$$\boxed{\underset{h\to 0}{=}\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12}+\frac{h^3}{24}+o(h^3)}$$

Or $h=x-1$ d'où

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 1}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3 + o(x^3)}$$

Donc l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = \frac{1}{2}$.

E $f(x) - \frac{1}{2} \sim -\frac{1}{12}(x-1)^2 \leq 0$

Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1.

Rémi.S

Semaine n°19

Déterminer le $DL_4(0)$ de $x \to \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{3}{8}\frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot x^4 + o(x^4)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + o(x^4)$$

Jules R.

Colle de la semaine 19

Énoncé : Former le $DL_4(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

Solution :

$\forall x \in \,]-1 ; +\infty[$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + o(x^4)$$

Stanislas G.

Semaine de colle n° 19

Etudier la limite éventuelle de $\dfrac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$ lorsque x tend vers 0

Solution :

DL_n de cos en 0 :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2k+1})$$

DL_n de $(1+x)^\alpha$ en 0 :

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{l=0}^{k-1}(\alpha - l)}{k!} x^k + o(x^k)$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\left.\begin{array}{l} (1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2) \\ -x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \underset{\sqrt{1-x^2}}{\overset{}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

donc $\cos(x) - \sqrt{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^4}{8} + o(x^4) = -\dfrac{1}{12}x^4 + o(x^4)$

donc $\dfrac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{12}$

donc $\boxed{\dfrac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{12}}$

Colle de la semaine 19

Pierre V.

Donner un equivalent simple de $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$

Solution

$f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2} = x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} - 2x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/3} + x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/4}$

Posons $h = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0^+}{=} \underbrace{\frac{1}{h}\left(1+h^2\right)^{1/2}}_{①} \underbrace{- \frac{2}{h}\left(1+h^2\right)^{1/3}}_{②} + \underbrace{\frac{1}{h}\left(1+h^2\right)^{1/4}}_{③}$$

Comme $h^2 \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+$, alors par composition de DL en 0 :

$$① \underset{h\to 0^+}{=} \frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right) = \frac{1}{h}+\frac{1}{2}h+o(h)$$

$$② \underset{h\to 0^+}{=} -\frac{2}{h}\left(1+\frac{1}{3}h^2+o(h^2)\right) = -\frac{2}{h}-\frac{2}{3}h+o(h)$$

$$③ \underset{h\to 0^+}{=} \frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{4}h^2+o(h^2)\right) = \frac{1}{h}+\frac{1}{4}h+o(h)$$

Donc $f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0^+}{=} \frac{1}{12}h + o(h)$

Donc $f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{12}h$

Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12x}$

Titouan

D

Rapport de colle semaine du 13/03

Donner le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto e^{x^2} \sqrt[3]{1+3}$

$f : x \mapsto e^{x^2} \sqrt[3]{1+x} = e^{x^2} \times (1+x)^{\frac{1}{3}}$

$x^2 \underset{x \to 0}{\to} 0$ donc $e^{x^2} \underset{0}{=} 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + o((x^2)^2)$

$$\sqrt[3]{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{1}{2!}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)\left(\frac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)\left(\frac{-8}{3}\right)\frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + o(x^4)$$

Ainsi $f(x) \underset{0}{=} \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4\right) + o(x^4)$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^4 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + \frac{32}{81}x^3 + \frac{169}{486}x^4 + o(x^4)$$

$\boxed{\text{Le DL à l'ordre 4 en 0 de } x \mapsto e^{x^2}\sqrt[3]{1+x} \text{ est } 1 + \frac{1}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + \frac{32}{81}x^3 + \frac{169}{486}x^4 + o(x^4)}$

Mehdi B. Colle de la semaine 19

Exercice 9. *Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en* $\frac{\pi}{3}$ *de* $\cos(x)$ *et le développement limité à l'ordre 4 en 0* $f : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{\arcsin(x)}$.

Solution : • $DL_4\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de cos

On pose $x = \frac{\pi}{3} + h$, $h \to 0$.
Nous calculons

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{1}{2}}\cos(h) - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin(h)$$

Au voisinage de 0 :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + o(h^4)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^4)\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^4}{48} - \frac{\sqrt{3}}{2}h + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^4)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + \frac{1}{48}h^4 + o(h^4)$$

Le changement de variable $h = x - \frac{\pi}{3}$ livre au voisinage de $\frac{\pi}{3}$:

$$\boxed{\cos(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4\right)}$$

• $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(x)}{\text{Arcsin}(x)}$

Commençons par déterminer le $DL_3(0)$ de Arcsin

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}}$$

Comme $-x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, par composition :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + o(-x^2)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Il vient en primitivant ce $DL_2(0)$:

$$\text{Arcsin}(x) = \underbrace{\text{Arcsin}(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Et donc :

$$\frac{1}{\text{Arcsin}(x)} = \frac{1}{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{x^2}{6} + o(x^2)}_{u(x)}}$$

Mehdi B.

Comme $u(0)=0$, par composition :

$$\frac{1}{\text{Arcsin}(x)} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{6}+\left(\frac{x^2}{6}\right)^2+o\left(\left(\frac{x^2}{6}\right)^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{36}+o(x^4)\right)$$

$$= \frac{1}{x}-\frac{x}{6}+\frac{x^3}{36}+o(x^3)$$

Il vient alors :

$$\frac{\text{Arctan}(x)}{\text{Arcsin}(x)} = \left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{6}+\frac{x^3}{36}+o(x^3)\right)$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{36}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{18}+\frac{x^4}{5}+o(x^4)$$

Comme $\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{5} = \frac{3}{36}+\frac{1}{5}$

$$= \frac{1}{12}+\frac{1}{5}$$

$$= \frac{5+12}{60} = \frac{17}{60}$$

Nous obtenons finalement :

$$\boxed{\frac{\text{Arctan}(x)}{\text{Arcsin}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{17}{60}x^4+o(x^4)}$$

Louis. D Semaine de colles n° 19

Etudier la branche en $+\infty$ de la fonction

$$f : x \to \frac{\left(x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\right)}{\mathrm{ch}(x) - 1} \quad \left(x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\right) := N(x)$$

Solution :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad N(x) = \frac{x}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{x} + \frac{x}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x}(x+1) + e^{-x}(x-1)\right]$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{\cancel{e^{x}}\,\cancel{1/2}\left((x-1) + e^{-2x}(x-1)\right)}{\cancel{e^{x}}\,\cancel{1/2}\left(1 + e^{-2x} - 2e^{-x}\right)}$$

$$\frac{1 + e^{-2x} - 2e^{-x}}{1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \quad \text{donc } 1 + e^{-2x} - 2e^{-x} \underset{+\infty}{\sim} 1$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{x-1}{x-1}}}_{\to 1} + \frac{\underbrace{\boxed{\frac{x}{e^{2x}}}}_{\to 0\ (\mathrm{CC})} - \underbrace{\boxed{\frac{1}{e^{2x}}}}_{\to 0}}{x-1} \xrightarrow[+\infty]{} 1$$

$$\text{Donc } (x-1) + e^{-2x}(x-1) \underset{+\infty}{\sim} x-1$$

On en déduit, par quotient d'équivalents :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} x - 1$$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = x - 1$ comme asymptote en $+\infty$.

Sophie G. Colle de la semaine 19

Donner le $DL_4(0)$ de

$f : x \mapsto \ln(2+\sin(x))$ et $g : x \mapsto \frac{(1+x)^3}{\sqrt{1+x^2}}$

Solution

$$f(x) = \ln\left(2\left(1+\frac{\sin(x)}{2}\right)\right) \qquad u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
$$= \ln(2) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\sin(x)\right)$$

- $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$\frac{1}{2}\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{12} + o(x^4)$

- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}u(x)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{12} \to \checkmark$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{12}\right)^2 \to -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{2x^4}{24}\right) + o(x^4)$$
$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{12}\right)^3 \to \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}x^3\right) + o(x^4)$$
$$- \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{12}\right)^4 \to -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}x^4\right) + o(x^4)$$
$$+ o(x^4)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}x - \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{192}x^4 + o(x^4)$$

$$\boxed{\text{Donc } f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + \frac{5}{192}x^4 + o(x^4)}$$

$$g(x) = (1+x)^3 (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\bullet\ (1+x)^3 \underset{x \to 0}{=} 1 + 3x + \frac{3 \times \cancel{2}}{\cancel{2}} x^2 + o(x^2)$$

$$\underset{x \to 0}{=} 1 + 3x + 3x^2 + o(x^2)$$

$\circ\ x^2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ alors :

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{1}{2} x^2 \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{2} x^4 + o(x^2)$$

$$\underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$g(x) \underset{x \to 0}{=} (1 + 3x + 3x^2)\left(1 - \frac{1}{2} x^2\right) + o(x^4)$$

$$\underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{1}{2} x^2 + 3x - \frac{3}{2} x^3 + 3x^2 - \frac{3}{2} x^4 + o(x^4)$$

$$\boxed{\underset{x \to 0}{=} 1 + 3x + \frac{5}{2} x^2 - \frac{3}{2} x^3 - \frac{3}{2} x^4 + o(x^4)}$$

Paul C. Semaine de colle 19

$\boxed{\text{Donner le } DL_3(1) \text{ de } f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}}$

Solution :

Soit $x = 1+h$

$DL_3(0)$ de $\sqrt{1+h}$:

$$\sqrt{1+h} \underset{h\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3)$$

on en déduit :

$$e^{\sqrt{1+h}} \underset{h\to 0}{=} e^{(1+\frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3))}$$

$$\underset{h\to 0}{=} e \times e^{\frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3)} \quad (*)$$

Posons $u(h) \, h \mapsto \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3$

on remarque que $u(h) \underset{h\to 0}{=} 0$

$DL_3(0)$ de e^y :

$$e^y \underset{y\to 0}{=} 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$

Par composée de DL, (avec le $DL_3(0)$ de e^y et le $DL_3(0)$ de ~~α : $h \mapsto u(h) + o$~~ α' : $h \mapsto u(h) + o(h^3)$) on a :

$$e \times \exp(\alpha'(h)) \underset{h\to 0}{=} e\left[1 + u(h) + \frac{(u(h))^2}{2} + \frac{(u(h))^3}{6} + o(h^3)\right]$$

$$\underset{h\to 0}{=} e\Big(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3\right)^2$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3\right)^3 + o(h^3$$

donc $e \times \exp(v(h)) \underset{h \to 0}{=} e + \frac{e}{2} h + \frac{e}{48} h^3 + o(h^3)$

or $e^{\sqrt{1+h}} \underset{h \to 0}{=} e \times \exp(v(h))$ (cf (*))

donc, comme $h = x-1$, $f(x) = e^{\sqrt{1+h}}$, par translation de l'étude d'un DL :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{e}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Youssef B

Colle de la semaine 19

Om considère la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ definie par $u_m = \cos\left(\pi\sqrt{m^2+m+1}\right)$
Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, on a $\pi\sqrt{m^2+m+1} = m\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{2} + o\left(\frac{1}{m}\right)$
où α et un réel que l'on determinera. Et en deduire un equivalent simple de (u_m)

Solution :

$$\pi\sqrt{m^2+m+1} = \pi\sqrt{m^2\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}\right)}$$

$$= \pi m\Big(1+\underbrace{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m}}_{(V_m)_{m\in\mathbb{N}}}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$V_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ donc

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(\alpha-\ell)}{k!}x^k + o(x^n)$$

Alors,

$$\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{m\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}\right)+o\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

$$\underset{m\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m^2}+o\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

$$\pi\sqrt{m^2+m+1} \underset{m\to+\infty}{=} \pi m\left(1+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m^2}+o\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)$$

$$= \pi m+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{m}+o\left(\frac{1}{m}\right)$$

alors $\alpha = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

On cherche à trouver un équivalent simple de la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$

$$\pi\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Or, $\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2n}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n}\right)$

$$=$$

$$= -\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n}\right)$$

$$= -\left(\sin(\pi n)\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \cos(\pi n)\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)$$

$$= -\cos(\pi n)\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\cos(\pi n) = Re\left(e^{i\pi n}\right)$$
$$= Re\left((e^{i\pi})^n\right)$$
$$= (-1)^n$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc $u_n = -(-1)^n \times \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Alors $\boxed{u_n \sim (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2n}}$

Tigiiin, David

Colle de la semaine 19

Determiner une équation de la droite asymptote à la courbe représentative de $f : x \to \frac{x^2 - x + 2}{x+1} e^{-1/x}$ en $+\infty$ et la position de la courbe par rapport à cette asymptote

Par changement de variable $x = \frac{1}{h}$ où $h \to 0$ on calcule :

- $e^{-\frac{1}{x}} = e^{-h} \underset{h \to 0}{=} 1 - h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$
- $\frac{x^2 - x + 2}{x+1} = \frac{\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h} + 2}{\frac{1}{h} + 1} \overset{\times h^2}{=} \frac{1 - h + 2h^2}{h + h^2} = \frac{1}{h} \times \frac{1}{1+h} \times (1 - h + 2h^2)$

Premièrement : $\frac{1}{1+h} \underset{h \to 0}{=} 1 - h + h^2 + o(h^2)$ donc

$\frac{1}{h} \times \frac{1}{1+h} \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{h} - 1 + h + o(h)$ et

$$\frac{1 - h + 2h^2}{h + h^2} \underset{h \to 0}{=} \left(\frac{1}{h} - 1 + h + o(h)\right)\left(1 - h + 2h^2 + o(h^2)\right)$$
$$\underset{h \to 0}{=} -2 + \frac{1}{h} + 4h - 3h^2 + o(h^2)$$

d'où $$\frac{1 - h + 2h^2}{h + h^2} e^{-h} \underset{x \to 0}{=} \left(-2 + \frac{1}{h} + 4h - 3h^2\right)\left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right) + o(h^2)$$

En tronquant : $\underset{x \to 0}{=} -3 + \frac{1}{h} + \frac{13}{2} h$

Et :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} -3 + x + \frac{13}{2x} \quad \text{donc}$$

$f(x) + 3 - x \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{13}{2} x$ alors $3 - x$ est la droite d'asymptote en $+\infty$ et comme $\frac{13}{2} > 0$, $x > 0$ alors cette droite est au dessous de la courbe en $+\infty$.

Uta Bayen de Noyer

Rapport de colle - semaine 14

Exercice :

Développement à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \ln(1-x^2)$

DL4 (0) de $x \mapsto \ln(1 \underbrace{- x^2}_{U(x)})$

Comme $U(0) = 0$

et $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

Donc $\ln(1-x^2) \underset{x \to 0}{=} (-x^2) - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{3} - \frac{(-x^2)^4}{4} + o(x^4)$

$$\underset{x \to 0}{=} \boxed{-x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}$$

Léon Sibout — Énoncé — Semaine 19

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2} ; n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(x_n) = x_n$
puis former un DA à quatre termes de x_n

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Delta \left| \begin{array}{ll}]n\pi - \frac{\pi}{2} ; n\pi + \frac{\pi}{2}[= I_n & \to \mathbb{R} \\ x & \to \tan(x) - x. \end{array} \right.$$

Δ est C^1 sur I_n.

$\forall x \in I_n \quad \Delta'(x) = \tan^2(x) \geq 0$

$\forall x \in I_n \setminus \{n\pi\} \quad \Delta'(x) > 0.$

Donc Δ est strictement croissante sur I_n donc Δ est injective sur I_n

$\forall x \in I_n \quad \Delta(x) = \tan(x - n\pi) \cancel{+} (x - n\pi + n\pi)$

donc $\lim\limits_{x \to n\pi - \frac{\pi}{2}} \Delta(x) = \lim\limits_{a \to -\frac{\pi}{2}} \tan(a) - a - n\pi = -\infty$

de même $\lim\limits_{x \to n\pi + \frac{\pi}{2}} \Delta(x) = +\infty$

Δ est C^0 sur I_n donc $\Delta(I_n) = \mathbb{R}$

donc Δ est surjective.

donc Δ est bijective.

On en déduit qu'il existe un unique $x_n \in I_n : \Delta(x_n) = 0$ ie $\tan(x_n) = x_n$

Soit $x_n \in I_n$ l'unique solution de $\tan(x)=x$.

$x_n = \tan(x_n)$

donc $x_n = \tan(\underbrace{x_n - n\pi}_{\in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[})$ (tan est π périodique)

donc $\text{Arctan}(x_n) = x_n - n\pi$

donc $x_n = \text{Arctan}(x_n) + n\pi$

donc $\frac{x_n}{n\pi} \to 1$ $(\text{Arctan}(x_n) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[)$

donc $x_n \sim n\pi$

$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$

$x_n \to +\infty$ donc $\frac{1}{x_n} \to 0$

$\text{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{x_n \to +\infty}{=} \frac{1}{x_n} - \frac{1}{3}\frac{1}{x_n^3} + o\left(\frac{1}{x_n^3}\right)$

donc $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x_n} + \frac{1}{3}\frac{1}{x_n^3} + o\left(\frac{1}{x_n^3}\right)$

donc $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{3\pi^3} \times \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Raphaël Touchonnet   colle semaine n° 17

Enoncé : Déterminer a et b réels pour que la partie régulière du développement limité de

$$\cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

soit de degré le plus grand possible

Solution : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + \frac{x^2(a-b)}{1+bx^2}$$

Sachant $bx^2 = 0$ pour $x=0$

$$\frac{x^2(a-b)}{1+bx^2} = (a-b)(x^2 - bx^4 + b^2x^6 + O(x^6))$$

Donc

$$\cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

$$-(ax^2 - abx^4 + ab^2x^6 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6))$$

$$\underset{x\to 0}{=} x^2\left(-\frac{1}{2}-a+b\right)+x^4\left(ab-b^2+\frac{1}{24}\right)$$
$$+x^6\left(-ab^2+b^3-\frac{1}{720}\right)+o(x^6)$$

<u>Analyse</u> : On suppose a et b tel que les coefficient de degrés 0 à 5 soit nuls.

Ainsi
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}-a+b=0 \\ ab-b^2+\frac{1}{24}=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a=\frac{-5}{12} \\ b=\frac{1}{12} \end{cases}$$

<u>Synthèse</u> :
$$-\frac{1}{2}-\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=0$$
et $\frac{-5}{12}\times\frac{1}{12}-\left(\frac{1}{12}\right)^2+\frac{1}{24}=\frac{1}{24}-\frac{6}{144}=0$

La synthèse confirme les candidats et l'analyse confirme leurs unicité pour annuler les coefficients de degré de 0 à 5.

De plus $-\left(\frac{-5}{12}\right)\left(\frac{-1}{12}\right)^2+\left(\frac{1}{12}\right)^3-\frac{1}{720}=\frac{5}{12^3}+\frac{1}{12^3}-\frac{1}{720}\neq 0$

Donc $a=\frac{-5}{12}$ et $b=\frac{1}{12}$

Son solution de l'exercice.

1.

Soit f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}$ si $x\neq 0$ et par $f(0)=0$.

Montrer que f est de classe C^1 sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Solution :

Tout d'abord, montrons que f possède un $DL_1(0)$.

Au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{x}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)}$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{x-\frac{x^3}{6}-x+\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^2+o(x^3)}$$

$$= \frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^2+o(x^3)}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{3}$$

(1) Puisque f possède un $DL_1(0)$, f est dérivable au voisinage de 0.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}-\frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$= \frac{-\sin^2(x)+x^2}{x^2\sin^2(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+x^2+o(x^4)}{x^2\left(x^2+o(x^2)\right)}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}$$

(2) Puisque f' possède un $DL_0(0)$, f' est continue au voisinage de 0.

D'après (1) et (2) f est C^1 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Léon . N

Colle de la semaine 19

> Énoncé : montrer qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
>
> un unique $x_n \in [1, n]$ tel que
>
> $\ln(x_n) + x_n = n$ puis trouver un DA à 3 termes.

Solution : comme $\begin{cases} x \mapsto \ln(x) \nearrow \\ x \mapsto x \nearrow \end{cases}$, $f : x \mapsto \ln(x) + x \nearrow$

$$f(1) = \ln(1) + 1 = 1 \leq n \leq f(n) = \underbrace{\ln(n)}_{\geq 0} + n$$

Comme somme de fonctions continues f est $\mathcal{C}^0$ sur $[1, n]$

Par le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists\, x_n \in [1, n], \quad f(x_n) = n$$

Par stricte croissance de f, ce x_n est unique

Par inégalité de convexité de $\ln$.

$$\ln(x_n) \leq x_n - 1 \underset{+x_n}{\Longrightarrow} \frac{n+1}{2} \leq x_n$$

Par lemme de minoration $x_n \longrightarrow +\infty$

On a $\frac{n+1}{2} \leq x_n$

$$\frac{n}{x_n} = \underbrace{\frac{\ln(x_n)}{x_n}} + \frac{x_n}{x_n}$$

par croissances comparées $\underset{x_n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

donc quand $n \to +\infty$.

$x_n \sim n$.

$$\frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(x_n \frac{n}{n}\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) + \ln(n)}{\ln(n)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \ln(X) \underset{X \to 1}{\longrightarrow} 0 \\ \frac{x_n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \end{array}\right\} \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \longrightarrow 0$$

Ainsi $\frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} \to 1$

$x_n - n = -\ln(x_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\ln(n)$ donc

$x_n - n \sim -\ln(n) \Rightarrow x_n = n - \ln(n) + o(\ln(n))$

MANGIACOMINI
Aurélien

Rapport Colle Semaine 23

Exercice : On considère deux suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $(v_n)_n$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \sim v_n$. Montrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang. Déterminer alors, au voisinage de l'infini, le signe de $u_n = \operatorname{sh}(\frac{1}{n}) - \tan(\frac{1}{n})$.

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ le rang à partir duquel :

$\forall n \geq N_0 \quad v_n \neq 0$

Comme $u_n \sim v_n$ alors $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall n \geq N_1 \ \exists \varepsilon_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N} \geq N_1}$ $\left| \begin{array}{l} u_n = (1+\varepsilon_n) v_n \\ \varepsilon_n \to 0 \end{array} \right.$

Comme $\varepsilon_n \to 0$ alors pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists N_2 \in \mathbb{N}$
$\forall n \geq N_2 \quad |\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2}$ ie $\frac{3}{2} \geq 1+\varepsilon_n \geq \frac{1}{2} > 0$

Donc pour $n \geq N = \max(N_1, N_2, N_3)$ on a :

Si $u_n > 0$ alors $v_n = \dfrac{u_n}{\underbrace{1+\varepsilon_n}_{>0}} > 0$

Si $u_n < 0$ alors $v_n = \dfrac{u_n}{\underbrace{1+\varepsilon_n}_{>0}} < 0$

Donc u_n et v_n sont bien de même signe à partir d'un certain rang.

Soit $u_n = \text{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

Alors $u_n \underset{+\infty}{=} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

$= -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

donc $u_n \sim -\frac{1}{6n^3} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0^-$ donc u_n est de signe négative au voisinage de $n \to +\infty$.

Léa N.

Colle de la semaine 19

Énoncé :

Montrer que la fonction $x \longmapsto \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$ possède une asymptote en $+\infty$ et étudier la position relative de son graphe par rapport à celle-ci au voisinage de $+\infty$

Solution :

$$f : x \longmapsto \ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$$

$$\ln(e^{2x} - e^{x} + 1) = \ln(e^{2x}(1 + (-e^{-x} - e^{-2x})))$$

$$= 2x + \ln(1 + (-e^{-x} - e^{-2x}))$$

On pose :

$$x = \frac{1}{h}, \quad h \longrightarrow 0$$

$$f(h) = 2\frac{1}{h} + \ln(1 + \underbrace{(-e^{-\frac{1}{h}} - e^{-\frac{2}{h}})}_{u(h)})$$

$\cdot\ u(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$

Par composition :

$$\ln(1 + (-e^{-\frac{1}{h}} - e^{-\frac{2}{h}}))$$

$$\underset{h \to 0}{=} (-e^{-\frac{1}{h}} - e^{-\frac{2}{h}}) - \frac{(-e^{-\frac{1}{h}} - e^{-\frac{2}{h}})^2}{2} + o(e^{-\frac{2}{h}})$$

$$= -e^{-\frac{1}{h}} - 2e^{-\frac{2}{h}} + o(e^{-\frac{2}{h}})$$

Donc $f(h) \underset{h \to 0}{=} \frac{2}{h} - e^{-\frac{1}{h}} - 2e^{-\frac{2}{h}} + o(e^{-\frac{2}{h}})$

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} 2x - e^{-x} - 2e^{-2x} + o(e^{-2x})$$

$$f(x) - 2x \underset{+\infty}{\sim} -e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et $-e^{-x} < 0$ au voisinage de $+\infty$

Donc $x \longmapsto 2x$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$, courbe de f

et $\mathcal{C}_f$ est au dessous de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Lars Guillaume S. — Colle de la semaine 19

1/2

1. Étudier $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{\tan(x) - x}$.
2. Soit $f : x \to \frac{\ln(1+x) - \sin(x) + \frac{x^2}{2}}{\tan(x) - x}$.
   (a) Calcul du $DL_3(0)$ de f.
   (b) Montrer que f est continue et dérivable en 0. A quel ordre aurait-on du calculer le DL?
   (c) Trouver l'équation de la tangente de f en 0. A quel ordre aurait-on du calculer le DL?
   (d) Trouver la position de la tangente de f en 0. A quel ordre aurait-on du calculer le DL?

Solution :

Posons nos DL usuels :

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$
$$-\sin(x) \underset{x \to 0}{=} -x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$
$$\tan(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$
$$\frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + o(x^6)$$

Posons $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{\tan(x) - x}$

1. Cherchons un $DL_3(0)$ de f tq $N : x \mapsto \ln(1+x) - \sin(x)$
$D : x \mapsto \tan(x) - x$

$$N(x) \underset{x \to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$
$$D(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Ainsi nous pouvons en déduire que $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{3}{2}x$
On pose alors :

$$\underline{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty} \qquad \underline{\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty}$$

② Posons $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x) + \frac{x^2}{2}}{\tan(x) - x}$ où nous avons :

$N_2 : x \mapsto \ln(1+x) - \sin(x) + \frac{x^2}{2}$

$D_2 : x \mapsto \tan(x) - x$

$$N_2(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{23}{120}x^5 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$
$$D_2(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

Nous pouvons alors réécrire :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{23}{120}x^5 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)}{\frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)}$$

factorisation par $\frac{x^3}{3}$

$$= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{23}{120}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\frac{1}{\left(1 + \underbrace{\frac{2}{5}x^2 + o(x^3)}_{u(x)}\right)}$$

Remarquons que $u(0) = 0$. Nous pouvons donc composer nos DL :

$$\frac{1}{1+u(x)} \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{2}{5}x^2 + o(x^3)$$

Finalement par produits de DL :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{23}{120}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{2}{5}x^2 + o(x^3)\right)$$

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{23}{40}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{10}x^3 + o(x^3)$$

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x - \frac{1}{40}x^2 - \frac{1}{5}x^3 + o(x^3)}$$

Louis Guillaume S. — Colle de la semaine 19

2/2

(b) Par existence d'un $DL_1(0)$ pour f nous avons :

$$\exists(\alpha_0;\alpha_1)\in\mathbb{R}^2 \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} \alpha_0 + \alpha_1 x + o(x)$$

Par propriété sur les DL et les fonctions dérivables nous avons que f est dérivable en 0 et que :

$$\underline{\alpha_0 = f(0)} \qquad \underline{\alpha_1 = f'(0)}$$

Ainsi la fonction f est continue et dérivable en 0.
Il aurait suffit de calcul le DL de f à l'ordre 1 en 0.

(c) Par unicité d'un $DL_3(0)$ nous pouvons dire que :

$$\underline{\alpha_0 = \frac{3}{2}} \qquad \text{et} \qquad \underline{\alpha_1 = -\frac{3}{4}}$$

De (a) nous avons

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x - \frac{1}{40}x^2 - \frac{1}{5}x^3 + o(x^3)$$

Nous avons alors $\underline{T_0 : y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}}$ tangente à $\mathcal{C}_f$ courbe représentative de f, en 0

Ici encore, un DL(0) de f aurait suffit

(d) Toujours de (a) nous pouvons dire que $f(x) - \left(-\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{40}x^2$

Par propriété sur un DL et le signe nous en déduisons que la différence entre f et sa tangente est négative.
Ainsi la tangente T_0 au point d'abscisse 0 à $\underline{\mathcal{C}_f \text{ est au dessus}}$ de cette dernière. Cette information nécessitait un $DL_2(0)$ de f.

Antoine B. Colle de la semaine 13.

Etudier la limite éventuelle de :
$\sqrt{x^2+3x+2} + x$ lorsque x tend vers $-\infty$

Une solution:

on pose $h = \frac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{h}\right)^2+\frac{3}{h}+2} = \frac{1}{h}\sqrt{1+3h+2h^2}$$

$$\underset{h\to0}{=} \frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}(3h+2h^2)-\frac{1}{8}(3h+2h^2)^2+o(h^2)\right)$$

$$\underset{h\to0}{=} \frac{1}{h} + \frac{3}{2} + h - \frac{1}{8}\times 9h + o(h)$$

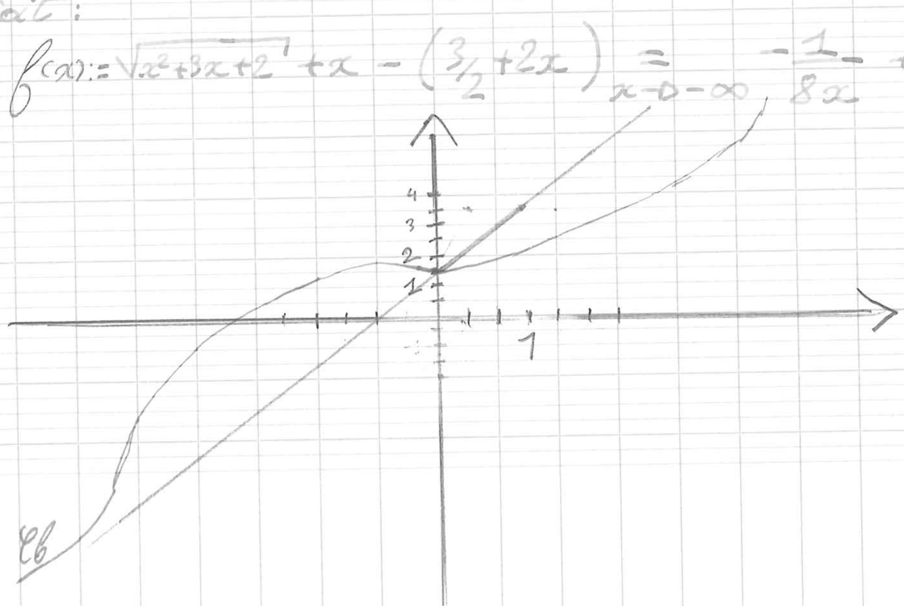
$$\underset{h\to0}{=} \frac{1}{h} + \frac{3}{2} - \frac{1}{8}h + o(h)$$

d'où $\sqrt{x^2+3x+2} \underset{x\to-\infty}{=} x + \frac{3}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x)$

ainsi $\sqrt{x^2+3x+2} + x \underset{x\to-\infty}{=} 2x + \frac{3}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x)$.

soit :

$f(x) := \sqrt{x^2+3x+2} + x - \left(\frac{3}{2}+2x\right) \underset{x\to-\infty}{=} -\frac{1}{8x} + o(1/x)$



Maximilien T Colle N° 19

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\exists ! \, x_n \in [1,n]$ tel que

$$\ln(x_n) + x_n = n$$

puis former un DA à trois termes de x_n

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Posons $\Delta \left| \begin{array}{l} [1,n] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) + x - n \end{array} \right.$

Δ_n est dérivable sur $[1,n]$ et $\forall x \in [1,n]$ $\Delta_n'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$

Ainsi Δ_n est injective sur $[1,n]$

De plus $\Delta_n(1) \leq 0 \leq \Delta_n(n)$ et Δ_n est $\mathcal{C}^0$ sur $\underbrace{[1,n]}_{\text{intervalle}}$

Donc par le TVI $\exists x_n \in [1,n]$ tel que $\Delta_n(x_n) = 0$.

Montrons maintenant que $x_n \to +\infty$ par l'absurde

Supposons que $\exists A \in \mathbb{R}$ $\forall N \in \mathbb{N}$ $\underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N}_{\geq N}}_{\circledast}$ $x_{n_0} < A$

On peut supposer $A > 0$

En prenant $N \in \lfloor \ln(A) + A \rfloor + 1$

Ainsi par $\circledast$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\ln(x_{n_0}) + x_{n_0} < \lfloor \ln(A) + A \rfloor + 1 \leq n_0 \quad \lightning \qquad (\ln \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)$$

Donc $x_n \to +\infty$.

Regardons maintenant $x_n - n = -\ln(x_n)$

$$\Rightarrow n - x_n = \underbrace{\ln(x_n)}_{o(x_n)} \quad (\text{par C.C})$$

Ainsi $x_n \sim n$ i.e $x_n - n = o(n)$

Nous avons donc un DA à 1 termes il faut donc continuer

$$x_n - n = -\ln(x_n)$$

Or $\ln(x_n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{x_n}{n}\right)$

Or
$$\left.\begin{array}{ll} \ln(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0 & (\ln\ C^0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\ \frac{x_n}{n} \to 1 & (x_n \sim n) \end{array}\right\} \Rightarrow \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \to 0$$

Donc $\ln(x_n) - \ln(n) = o(1) = o(\ln(n))$

Ainsi $x_n = n - \ln(n) + o(\ln(n))$

Continuons encore :

$$x_n - n + \ln(n) = \ln\left(\frac{n}{x_n}\right) = -\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{n - \ln(n) + o(\ln(n))}{n}\right)$$

$$= -\ln\left(1 + \frac{-\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad (DL_1(0) \text{ de } \ln)$$

Ainsi $\boxed{x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}$

Hugo D.

Colle de la semaine n°19

Enoncé

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $(f,g) \in \mathcal{F}_a^2$

Donner une condition pour que $e^f \sim e^g$

Solution (A) On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$

$\exists V_1 \in \mathcal{V}(a)$, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{V_1}$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap V_1 \quad e^{f(x)} = (1+\varepsilon(x))\, e^{g(x)}$$

· Comme $1+\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1 > 0$: $\exists V_2 \in \mathcal{V}(a)$ tel que

$$\forall x \in V_2 \quad 1+\varepsilon(x) > 0$$

· Donc $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap V_1 \cap V_2 \quad e^{g(x)}(1+\varepsilon(x)) = e^{f(x)} > 0$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap V_1 \cap V_2 \quad f(x) - g(x) = \underbrace{\ln(1+\varepsilon(x))}_{\underset{x\to a}{\longrightarrow}\, 0 = \ln(1)}$$

car $\ln$ $\mathcal{C}^0$ en 0

On en déduit que $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

(S) On suppose que $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

$$e^{f(x)-g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} e^0 = 1 \quad (\text{car } \exp \ \mathcal{C}^0 \text{ en } 0)$$

Donc $\dfrac{e^{f(x)}}{\underbrace{e^{g(x)}}_{\neq 0}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ Donc $e^{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} e^{g(x)}$

Ibrahim K.

Colle de la semaine 19

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$

Soit $n \geq 2$ on a :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} k!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n} + 1$$

ainsi Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$ donc

$$0! \leq k! \leq (n-2)!$$

donc puisque $n! > 0$ on a

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{k!}{n!} \leq \frac{(n-2)!}{n!}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$1 + \frac{1}{n} \quad \frac{(n-1)}{n!} \leq \frac{\sum_{k=0}^{n} k!}{n!} \leq \frac{(n-1)(n-2)!}{n!} + \frac{1}{n} + 1$$

donc

$$\underbrace{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-2)\cdots 1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \leq \frac{\sum_{k=0}^{n} k!}{n!} \leq \underbrace{\frac{2}{n} + 1}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

Par Theorème d'encadrement $\frac{\sum_{k=0}^{n} k!}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$$

Lina .A

Colle de la semaine 19.

Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ définie par

$$u_n = \frac{\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln\left(n^2+n\right)\right)^2}$$

Solution :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$

Cherchons un équivalent simple de

$$\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}.$$

• $\left(\frac{1}{n}+1\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+o(x)$

$\frac{1}{n}\to 0$

Donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$

$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$

$-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0$

$$e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} e\left(\exp\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} e+\left(\frac{-e}{2n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc $\left(e-\left(\frac{1}{n}+1\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{e}{2n}\right]\left[1+\frac{1}{n}\right]+o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$= \frac{e}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi $\left(e-\left(\frac{1}{n}+1\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}$

- Déterminons dès lors un équivalent de
$(\ln(n^2+n))^2$

- $\ln(n^2+n) = \ln(n^2) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\rightarrow \ln(n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$

Donc

$$\ln(n^2) \underset{n\to+\infty}{\simeq} 2\ln(n) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi $(\ln(n^2+n))^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} (2\ln(n))^2$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2n(2\ln(n))^2} = \frac{e}{8n\ln^2(n)}$

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{8n\ln^2(n)}}$$

Louis B

Khôlle de la semaine 19

Développement limité à l'ordre 5 en $\frac{\pi}{4}$ de la fonction sin

La fonction sin est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable 5 fois.

On peut donc utiliser la formule de Taylor-Young:

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\sin'(x) = \cos(x)$

$\sin^{(2)}(x) = -\sin(x)$

$\sin^{(3)}(x) = -\cos(x)$

$\sin^{(4)}(x) = \sin(x)$

$\sin^{(5)}(x) = \cos(x)$

Ainsi le $DL_5(\frac{\pi}{4})$ est donné par la formule :

$$\sin(x) \underset{\frac{\pi}{4}}{=} \sum_{k=0}^{5} \frac{\sin^{(k)}(\frac{\pi}{4})}{k!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^k + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5\right)$$

$$\underset{\frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{48}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + \frac{\sqrt{2}}{240}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5\right)$$

Pina T. Colle de la semaine 19

Exercice : On note f la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x} - \frac{a}{\ln(1+x)} - \frac{b}{e^x - 1}$

1. Quelle CNS sur a et b pour que f soit prolongeable par continuité en 0 et que $f(0) = 0$?
2. Montrer que dans ce cas il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ $f(x) \underset{x\to0}{=} \lambda x^2 + o(x^2)$.

Solution :

$$\frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}$$

$$\underset{x\to0}{=} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)}_{u(x)}}\right)$$

$u(0) = 0$ donc $\frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right)^2 + \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right)$

$$\underset{x\to0}{=} \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$\underset{x\to0}{=} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}x + \frac{1}{24}x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{1}{e^x - 1} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 + \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}_{v(x)}}\right)$$

$v(0) = 0$ donc $\frac{1}{e^x - 1} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^3 + o(x^3)\right)$

$$\underset{x\to0}{=} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right)$$

$$\underset{x\to0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}x + o(x^2)$$

donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{a}{x} - \frac{a}{2} + \frac{a}{12}x - \frac{a}{24}x^2 - \frac{b}{x} + \frac{b}{2} - \frac{b}{12}x + o(x^2)$

$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1-a-b\right) + \frac{b-a}{2} + \frac{a-b}{12}x - \frac{a}{24}x^2 + o(x^2)$

f prolongeable par continuité en 0 telle que $f(0)=0 \iff \begin{cases} 1-a-b=0 \\ b-a=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases}$

$\iff a=\frac{1}{2}$ et $b=\frac{1}{2}$

Si $a=\frac{1}{2}$ et $b=\frac{1}{2}$, on a donc :

$f(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{48}x^2 + o(x^2)$

NicolasH   Colle de la semaine 19

Énoncé

> Déterminer a et b réels pour que la partie régulières du développement limité de $g : x \mapsto \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit de degré le plus grand possible

Solution

Le $DL_6(0)$ de cos est

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

Le $DL_6(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1+bx^2}$ est

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)$$

Ainsi, par opération sur les DL,

$$g(x) \underset{x\to a}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - (1+ax^2)(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6) + o(x^6)$$

$$\underset{x\to a}{=} x^2\left(-\frac{1}{2} - a + b\right) + x^4\left(+ab - b^2 + \frac{1}{24}\right) + x^6\left(-\frac{1}{720} + b^3 - ab^2\right) + o(x^6)$$

Par analyse-synthèse, supposons $-\frac{1}{2} - a + b = 0$ et $-b^2 + ab + \frac{1}{24} = 0$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} - a + b = 0 \\ -b^2 + ab + \frac{1}{24} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b - \frac{1}{2} \\ -b^2 + ab + \frac{1}{24} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b - \frac{1}{2} \\ -b^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right) b + \frac{1}{24} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b - \frac{1}{2} \\ -b^2 + b^2 - \frac{1}{2} b + \frac{1}{24} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b - \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{12} \\ b = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Synthèse : Pour $a = -\frac{5}{12}$ et $b = \frac{1}{12}$

$-\frac{1}{2} - a + b = 0$, $ab - b^2 + \frac{1}{24} = 0$ et

$$-\frac{1}{720} + b^3 - ab^2 = -\frac{1}{720} + \frac{1}{12 \times 144} - \frac{5}{12 \times 144}$$

$$= -\frac{1}{720} - \frac{1}{432} \neq 0$$

donc $a = -\frac{5}{12}$ et $b = \frac{1}{12}$ conviennent.

Rayan . 6

Colle de la semaine n°19

Exercice : Soit f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2, prolonger f en $x=0$ et placer la courbe par rapport à la tangente.

Solution :

Nous reconnaissons des développement limité usuels :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^3)$$

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^3)$$

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

Ainsi :

$$\ln(1+x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{6} - o(x^3)$$

(Opérations sur les DL)

$$\boxed{\text{Donc} \quad \ln(1+x) - \sin(x) \underset{x \to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}$$

On en déduit que:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x}\left(\ln(1+x) - \sin(x)\right) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \circledast}$$

Par troncature, f possède un $DL_0(0)$ donc f est continue en 0 et $\underline{f(0) = 0}$.
on pose

De plus, nous pouvons en déduire la tangente en 0 qui est $\underline{\mathcal{C}_0 : y = -\frac{x}{2}}$

De $\circledast$, nous déduisons:

$$f(x) - \left(-\frac{x}{2}\right) \underset{x \to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Donc $\quad f(x) - \left(-\frac{x}{2}\right) \sim \frac{x^2}{2} > 0$

Par propriété conservée par équivalence:

$f(x) - \left(-\frac{x}{2}\right) > 0$ au voisinage de 0

ie Au voisinage de 0, $\mathcal{C}f$ est au dessus de $\mathcal{C}_0$.

$\mathcal{C}f$: courbe représentative de f

Robin G.

Colle de la semaine 19

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1} \end{array} \right.$

1) Déterminer un $DL_3(0)$ de f.
2) En déduire une formule simplifiée pour $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Solution :

1) • $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$ ($DL_4(0)$ de exp)

comme $(n+1)x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$:

• $e^{(n+1)x} \underset{x\to 0}{=} 1+(n+1)x+(n+1)^2\frac{x^2}{2}+(n+1)^3\frac{x^3}{6}+(n+1)^4\frac{x^4}{24}+o(x^4)$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{(n+1)+\frac{(n+1)^2}{2}x+\frac{1}{6}(n+1)^3x^2+\frac{1}{24}(n+1)^4x^3+o(x^3)}{1+\underbrace{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)}_{=:u(x)}}$$

$u(0)=0$ et $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2-x^3+o(x^3)$

$$\text{Donc } \frac{1}{1+u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^3+o(x^3)$$

$$= 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^3)$$

$$\text{donc } f(x) \underset{x\to 0}{=} (n+1)+x\left(\frac{(n+1)^2}{2}-\frac{(n+1)}{2}\right)+x^2\left(\frac{(n+1)^3}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}+\frac{(n+1)}{12}\right)$$
$$+x^3\left(\frac{(n+1)^4}{24}-\frac{(n+1)^3}{12}+\frac{(n+1)^2}{24}\right)+o(x^3)$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} (n+1)+\frac{n^2+n}{2}x+(2n^3+3n^2+n)\cdot\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{24}(n^4+2n^3+n^2)x^3+o(x^3)$$

1/2

2) • $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{kx}$

comme $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $kx \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} 1 + \sum_{k=0}^{n} k \cdot x + \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \frac{x^2}{2} + \sum_{k=0}^{n} k^3 \cdot \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

Par unicité d'un DL :

$$\frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{24} \quad \text{ie.} \quad \underline{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}.$$

2/2

Colle semaine 19

Alexandre M.

Soient (u_n), (v_n), (w_n), (r_n) des suites de reels strictement positifs tel que

$u_n \sim v_n$ et $w_n \sim r_n$

Montrer que $u_n + w_n \sim v_n + r_n$

i.e. $\dfrac{u_n + w_n}{v_n + r_n} \longrightarrow 1$ $\quad v_n + r_n \neq 0$

i.e $\dfrac{u_n + w_n}{v_n + r_n} - 1 \longrightarrow 0$

On a $u_n \sim v_n$ i.e $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0$ $\begin{cases} u_n = (1+\varepsilon_n) v_n \\ \varepsilon_n \longrightarrow 0 \end{cases}$

et $w_n \sim r_n$ i.e $\exists n_0' \in \mathbb{N}$ $\exists (\varepsilon_n')_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0'$ $\begin{cases} w_n = (1+\varepsilon_n') r_n \\ \varepsilon_n' \to 0 \end{cases}$

De plus Soit $n \geq \max(n_0, n_0')$

$$q_n := \frac{u_n + w_n}{v_n + r_n} - 1 = \frac{u_n + w_n - (v_n + r_n)}{v_n + r_n}$$

$$= \frac{u_n - v_n}{v_n + r_n} + \frac{w_n - r_n}{v_n + r_n}$$

$$= \frac{(1+\varepsilon_n)v_n - v_n}{v_n + r_n} + \frac{(1+\varepsilon_n')r_n - r_n}{v_n + r_n}$$

$$= \frac{\overset{\to 0}{\varepsilon_n}\, v_n}{v_n + r_n} + \frac{\overset{\to 0}{\varepsilon'_n}\, r_n}{v_n + r_n}$$

bornée bornée

car (v_n) et (r_n) sont des suites de réels strictement positifs

donc $0 < \frac{v_n}{v_n + r_n} < 1$ et $0 < \frac{r_n}{v_n + r_n} < 1$

[bornée × tend vers 0 tend vers 0

d'où $q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$