Martin K.-L.

Colle de la semaine 17

Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$(E) : \quad P = (X-1) \cdot P'.$$

Solution.

On considère l'équation

$$(E) : \quad P = (X-1) \cdot P', \quad P \in \mathbb{R}[X].$$

Notons que $0_{\mathbb{R}[X]}$ est solution, et qu'aucun polynôme de $\mathbb{R}_0[X] \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ n'est solution.

On raisonne par analyse — synthèse.

Analyse

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 tel que

$$P = (X-1) \cdot P'.$$

Par analyse de coefficients, il vient

$$\mathrm{dom}(P) = \underbrace{\deg(P)}_{\geq 1} \cdot \mathrm{dom}(P),$$

ce qui livre $\deg(P) = 1$.

Alors,

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \neq 0 \text{ et } P = aX + b.$$

<u>Synthèse.</u>

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 0$. Alors,

$$aX + b = (X-1) \cdot \underbrace{(aX+b)'}_{a}$$

$$\implies b = -a.$$

On conclut que

$$Sol_{(E)} = \mathrm{Vect}(X-1).$$

Martin K.-L. Colle de la semaine 17.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que
$4ax^3+3bx^2+2cx = a+b+c$.

Solution.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $f : x \to 4ax^3+3bx^2+2cx$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donnée par $F : x \to ax^4+bx^3+cx^2$.

Par le théorème des accroissements finis,

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ F\ \mathcal{C}^0 \text{ sur } [0,1] \\ \cdot\ F \text{ dér. sur }]0,1[. \\ \cdot\ 0<1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in]0,1[, \quad F'(c) = f(c) = \frac{a+b+c-0}{1-0} = a+b+c.$$

Le résultat est prouvé.

Rémi. S

Semaine de colle 18

Exercice : Montrer que le polynôme dérivé d'un polynôme scindé à racines simples (définition fournie si besoin) l'est aussi sur $\mathbb{R}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $n = \deg(P) \geq 1$

Supposons que P est scindé sur $\mathbb{R}$,

$\exists (\alpha_1; \dots ; \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \quad P = \text{dom}(P) \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$

Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$

$\widetilde{P}(\alpha_k) = 0$

$\widetilde{P}(\alpha_{k+1}) = 0$

$\widetilde{P}$ dérivable sur $]\alpha_k ; \alpha_{k+1}[$

$\widetilde{P}$ continue sur $[\alpha_k ; \alpha_{k+1}]$

Ainsi selon le théorème de Rolle

$\exists x_k \in]\alpha_k ; \alpha_{k+1}[$ tel que $\widetilde{P}'(x_k) = 0$

$$\widetilde{P}'(x_k) = (\widetilde{P})'(x_k)$$

$x_1 ; \dots ; x_{n-1}$ sont donc des racines distinctes de P'

Donc $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P' = Q \prod_{k=1}^{n-1} (X - x_i)$$

$$\deg(P') = n - 1 = \deg\left(\prod_{k=1}^{n-1} (X - x_i)\right)$$

donc $\deg(Q) = 0$

Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Q = \lambda$

d'où $P' = \underset{\text{dom}(P')}{\underset{\shortparallel}{\lambda}} \prod_{k=1}^{n-1} (X - x_i)$

Celia A. Colle de la semaine 17.

énoncé : Factoriser $P = X^9 + X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution : Nous cherchons d'abord à factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Selon le théorème d'Alembert-Gauß, puisque $\deg(P) \geq 1$, P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Nous cherchons à déterminer $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{P}(z) = 0$.

Alors $z^9 + z^6 + z^3 + 1 = 0$

$\iff \sum_{k=0}^{3} (z^3)^k = 0$

$\iff \dfrac{1 - (z^3)^4}{1 - z^3} = 0$ ($z^3 = 1$ n'est pas solution donc $z^3 \neq 1$)

$\iff 1 = z^{12}$

Nous avons donc $z^{12} = 1$ et $z^3 \neq 1$.

Puisque $z^3 \neq 1$, $z \notin \{ e^{i\frac{2\pi k}{3}} : k \in [\![0, 2]\!] \}$.

Donc $z \neq 1$, $z \neq e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z \neq e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Alors $z \in \{ e^{i\frac{2\pi k}{12}} : k \in [\![1, 11]\!] \setminus \{4; 8\} \}$ car

$e^{i\frac{2\pi \times 4}{12}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi \times 8}{12}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Donc $\underline{\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(P) = \{ e^{i\frac{2\pi k}{12}} : k \in [\![1, 11]\!] \setminus \{4, 8\} \}}$.

Alors $\exists Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 4 \\ k \neq 8}}^{11} (X - e^{i\frac{2\pi k}{12}})$.

Or, en étudiant les degrés de cette factorisation, nous obtenons $\deg(Q) = 0$, car $\deg(P) = 9$ et $\deg\left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq 4 \\ k \neq 8}}^{11} (X - e^{i\frac{2\pi k}{12}})\right) = 9$.

De plus, $\mathrm{dom}(P) = \mathrm{dom}(Q)\, \mathrm{dom}\left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq 4 \\ k \neq 8}}^{11} (X - e^{i\frac{2\pi k}{12}})\right)$.

Donc, $\mathrm{dom}(Q) = 1$.

Ainsi, $P = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq 4 \\ k \neq 8}}^{11} (X - e^{i\frac{2\pi k}{12}})$.

Nous étudions désormais les racines complexes de P.

- pour $k=1$, $e^{i\frac{\pi}{6}}$.
- pour $k=2$, $e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- pour $k=3$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- pour $k=5$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$.
- pour $k=6$, -1.
- pour $k=7$, $e^{i\frac{7\pi}{6}}$
- pour $k=9$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$
- pour $k=10$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}$
- pour $k=11$, $e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

Or, $\overline{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{11\pi}{6}}$, $\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$, $\overline{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$,

et $\overline{e^{i\frac{5\pi}{6}}} = e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

d'où $P = (X+1)(X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X - e^{i\frac{11\pi}{6}})(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{i\frac{5\pi}{3}})$
$(X - e^{i\frac{\pi}{2}})(X - e^{i\frac{3\pi}{2}})(X - e^{i\frac{5\pi}{6}})(X - e^{i\frac{7\pi}{6}})$

$= (X+1)(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{6}})X + |e^{i\frac{\pi}{6}}|^2)$
$(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{3}})X + |e^{i\frac{\pi}{3}}|^2)(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{2}})X + |e^{i\frac{\pi}{2}}|^2)$

$$(X^2 - 2\mathrm{Re}(e^{i\frac{5\pi}{6}})X + |e^{i\frac{5\pi}{6}}|^2)$$

$$= (X+1)\ (X^2 - \sqrt{3}X + 1)\ (X^2 - X + 1)$$
$$(X^2 + 1)\ (X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$

$$= (X+1)(X^2+1)(X^2 - X + 1)(X^4 - X^2 + 1)$$

Donc

$$\boxed{\begin{aligned} P &= X^9 + X^6 + X^3 + 1 \\ &= (X+1)(X^2+1)(X^2 - X + 1)(X^4 - X^2 + 1) \end{aligned}}$$

Rapport de Colle, semaine 17

Wassim
n.

Exercice :

On définit une suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $\forall n \geq 0$ $P_{n+2} + P_n = 2X P_{n+1}$

1) Calculer P_2 et P_3
2) Determiner le degré et le coefficient dominant de P_n
3) Determiner la parité de (P_n)
4) Calculer $P_n(1)$ puis $P_n(-1)$

Solution :

1) $P_2 = 2X^2 - 1$ $\quad P_3 = 4X^3 - 3X$

2) Par recurrence forte, mq $\forall n \in \mathbb{N}$ $\deg(P_n) = n$

I : à $n = 0$ et $n = 1$: $\deg(P_0) = 0$ $\deg(P_1) = 1$ ✓

H : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $\deg(P_n) = n$ et $\deg(P_{n+1}) = n+1$

$P_{n+2} = 2X P_{n+1} - P_n$

$\deg(P_{n+2}) = \deg(2X P_{n+1} - P_n)$

$\deg(P_{n+2}) = \deg(2X P_{n+1}) - \deg(P_n)$ (cas dégalité car $\deg(P_n) \neq \deg(P_{n+1})$

Ainsi $\deg(P_{n+2}) = 2n+2 - n = n+2$

Ainsi l'hérédité est vérifiée.

Ⓒ : $\forall m \in \mathbb{N}$ $\deg(P_m) = m$

Par récurrence, mq ~~dom~~ $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $\mathrm{dom}(P_m) = 2^{m-1}$

Ⓘ à $n=0$ $m=1$: $\mathrm{dom}(P_1) = 1$ $\mathrm{dom}(P_2) = 2$ ✓

Ⓗ Soit $m \in \mathbb{N}^*$ fixé tq $\mathrm{dom}(P_m) = 2^{m-1}$ $\mathrm{dom}(P_{n+1}) = 2^n$

$P_{m+2} = 2x P_{n+1} - P_m$

on a $\mathrm{dom}(P_{n+2}) = \mathrm{dom}(2x P_{n+1})$

$= \mathrm{dom}(2x)\,\mathrm{dom}(P_{n+1})$

$= 2 \times 2^n = 2^{n+1}$

Ainsi l'hérédité est vérifiée. $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $\mathrm{dom}(P_m) = 2^{n-1}$

3) m pair : P_n pair m impair P_n impair

4) Mq $\forall m \in \mathbb{N}$ "$P_m(1) = 1$" $= \mathcal{P}(m)$

Ⓘ : $m=0$ $P_0(1) = 1$ $m=1$ $P_1(1) = 1$ ✓

Ⓗ : Supp $\mathcal{P}(n)$ $\mathcal{P}(n+1)$ Montrons $\mathcal{P}(n+2)$

$P_{m+2}(1) = 2 P_{m+1}(1) - P_m(1) = 2 - 1 = 1$ ✓

Par parité de P_m :

Si m pair : $P_m(-1) = 1$ si n impair : $P_m(-1) = 1$

Eliott S.V. Enoncé : Semaine 17.

$$\boxed{\text{Trouver les } P \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que } P(X^2) = (X^2+1)P(X)}$$

Solution :

Si $P = 0$, alors P est solution

Si $\deg(P) = 0$, P n'est pas solution $\left(\deg(P(X^2)) = 0 \text{ et } \deg((X^2+1)(P(X)) = 2\right)$

→ Analyse :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ solution de l'équation, tel que $\deg(P) := n \geq 1$

Alors : $\cdot\ \deg(P(X^2)) = \deg(P \circ X^2) = \deg(P)\deg(X^2) = 2n$

$\cdot\ \deg((X^2+1)P(X)) = \deg(X^2+1) + \deg(P(X)) = 2+n$.

Ainsi, le deg de P doit vérifier :

$$2n = 2+n \Rightarrow n = 2.$$

Donc le degré de P est nécessairement 2.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $P = aX^2+bX+c$.

Alors $\cdot\ P(X^2) = aX^4+bX^2+c$

$\cdot\ (X^2+1)P(X) = (X^2+1)(aX^2+bX+c) = aX^4+bX^3+(c+a)X^2+bX+c$

Et donc on a que :

$$\begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c+a = b \\ b = 0 \\ c = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = -a \\ b = 0 \\ c = c \end{cases}$$

Ainsi, les polynomes solutions sont : $Sol = \{aX^2 - a : a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^2-$

→ Synthèse Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX^2 - a$.

$\cdot\ P(X^2) = aX^4 - a$ et $\cdot\ (X^2+1)P(X) = aX^4 - a$ □

Tijiün, David   Colle de la semaine 17

Exercice 1

Soit α un réel. On note P le polynôme $X^6+4X^5+8X^4+10X^3+\alpha X^2+4X+1$.
On suppose que -1 est un racine de P.

1. Déterminer α
2. Montrer que -1 est un racine de multiplicité au moins 2.
3. Montrer que $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est également une racine multiple de P.
4. En déduire toutes les racines de P et leurs multiplicités.

1) On suppose que -1 est racine de P alors

$\tilde{P}(-1)=(-1)^6+4(-1)^5+8(-1)^4+10(-1)^3+\alpha(-1)^2+4(-1)+1=0$

$=1-4+8-10+\alpha-4+1=0$

donc

$\alpha=10+4+4-8-1-1=\underline{8}$

2) Par caractérisation de l'ordre de multiplicité via les dérivées, on pose $\tilde{P}^{(0)}(X)=X^6+4X^5+8X^4+10X^3+8X^2+4X+1$

On a $\tilde{P}^{(0)}(-1)=(-1)^6+4(-1)^5+8(-1)^4+10(-1)^3+8(-1)^2+4(-1)+1$

$=1-4+8-10+8-4+1$

$=0$

-1 est donc racine de P et

$\tilde{P}^{(1)}(X)=6X^5+20X^4+32X^3+30X^2+16X+4$

$\tilde{P}^{(1)}(-1)=-6+20-32+30-16+4$

$=0$

donc on obtient que $\underline{-1 \text{ est une racine de multiplicité au moins } 2.}$

3) Montrons que $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine de P

$\tilde{P}^{(0)}(j)=j^6+4j^5+8j^4+10j^3+8j^2+4j+1$

On remarque que $j^4=j$, $(e^{\frac{2i\pi}{3}})^4=(e^{\frac{2i\pi}{3}})^3(e^{\frac{2i\pi}{3}})=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Ainsi $j^5=j^2$, $j^6=j^3=1$, on obtient :

$\tilde{P}^{(0)}(j)=1+4j^2+8j+10+8j^2+4j+1$

$\tilde{p}^{(0)}(j) = 12 j^2 + 12j + 12$

$= 12(j^2 + j + 1) = 0$ (somme des racines 3-ièmes de l'unité)

Montrons maintenant par caractérisation de multiplicité via les dérivées que mult $(j, P) \geqslant 2$:

$\tilde{p}^{(1)}(j) = 6(j)^5 + 20(j)^4 + 32(j)^3 + 30(j)^2 + 16j + 4$

$(j^5 = j^2, j^4 = j)$ $= 6j^2 + 20j + 32 + 30j^2 + 16j + 4$

$= 36j^2 + 36j + 36$

$= 36(j^2 + j + 1) = 0$ (somme des racines 3-ièmes de l'unité)

Ainsi on obtient que mult $(j, P) \geqslant 2$.

4. Premièrement on sait que -1 et j sont racines de P de multiplicité au moins 2. Ainsi $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q(X - j)^2(X+1)^2$ or on sait par propriété de conjugué. Montrons que $j^2 = \bar{j}$ et $j = \bar{j}^2$

$j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ et $\bar{j} \times 1 = e^{(-\frac{2i\pi}{3} + \frac{6\pi}{3})} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ donc $j^2 = \bar{j}$ et $\bar{j}^2 = j^4 = j$ ainsi

$\tilde{p}^{(0)}(\bar{j}) = 12(\bar{j} + \bar{j}^2 + 1) = 0$

d'où $\bar{j}$ est racine de P si j est racine avec la même multiplicité. Par produit de degrés on obtient que $Q = (X - \bar{j})$ alors

$P = (X - \bar{j})^2 (X - j)^2 (X+1)^2$

Anaë. D

Rapport de colle S17

Factoriser $X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Solution:

On cherche les racines de $X^6 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on résout $z^6 + 1 = 0$

$$z^6 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^6 = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad z^6 = e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow \quad z^6 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^6 = 1 \qquad \left(\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 \neq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}} \in \mathbb{U}_6$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,5]\!] \quad \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{2k\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,5]\!] \quad z = e^{i\left(\frac{\pi(2k+1)}{6}\right)}$$

D'où, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$X^6 + 1 = Q \underbrace{\prod_{k=1}^{5}\left(X - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}\right)}_{deg = 6}$$

Donc $deg(Q) = 0$ et Q est une constante non nulle. Comme $dom(X^6+1) = 1$ on a $Q = 1$. D'où

$$X^6 + 1 = \prod_{k=1}^{5}\left(X - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}\right)$$

On cherche a regroupé les racines qui sont conjuguées l'une de l'autre.

Si $k = 0$ $\quad \alpha_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

Si $k = 1$ $\quad \alpha_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Si $k = 2$ $\quad \alpha_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

Si $k = 3$ $\alpha_3 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Si $k = 4$ $\alpha_4 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

Si $k = 5$ $\alpha_5 = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Donc $\alpha_0 = \overline{\alpha_5}$; $\alpha_1 = \overline{\alpha_4}$ et $\alpha_3 = \overline{\alpha_2}$

On peut donc écrire $X^6 + 1$ sous la forme

$$X^6 + 1 = (X - \alpha_0)(X - \overline{\alpha_0})(X - \alpha_1)(X - \overline{\alpha_1})(X - \alpha_2)(X - \overline{\alpha_2})$$

$$= (X^2 - 2Re(\alpha_0)X + |\alpha_0|^2)(X^2 - 2Re(\alpha_1)X + |\alpha_1|^2)(X^2 - 2Re(\alpha_2)X + |\alpha_2|^2)$$

$$\boxed{= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)}$$

Colle de la semaine 18

Adam M.

$A(X) = X^3 + \frac{1}{2}(1+i\sqrt{7})X^2 - \frac{1}{2}(1-i\sqrt{7})X - 1.$

On admet que $A(X)A(-X) + A(X^2) = 0.$

a. Montrer que α *racine de* $A \Rightarrow \alpha^2$ *et* α^4 *aussi.*

b. Montrer que les trois racines de A peuvent se mettre sous la forme $\alpha, \alpha^2, \alpha^4$.

c. Soit α *une racine de A. Calculer* $\alpha + \alpha^2 + \alpha^4 ; \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$ *et* α^7.

Solution:

a. Supposons α racine de A

$\underbrace{\tilde{A}(\alpha)}_{=0} \tilde{A}(-\alpha) + \tilde{A}(\alpha^2) = 0 \implies \tilde{A}(\alpha^2) = 0$

Donc α^2 racine de A

$\underbrace{\tilde{A}(\alpha^2)}_{=0} \tilde{A}(-\alpha^2) + \tilde{A}(\alpha^4) = 0$

Donc α^4 racine de A

b. Supposons α racine de A

Par l'absurde, supposons $\alpha = \alpha^2$ donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$

Or $\tilde{A}(0) = -1$ et $\tilde{A}(1) = i\sqrt{7}$ Σ

Donc $\alpha \neq \alpha^2$

Par l'absurde supposons $\alpha^2 = \alpha^4$ donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$

$\tilde{A}(0) \neq 0$ et $\tilde{A}(1) \neq 1$ et $\tilde{A}(-1) = -1$ Σ

Donc $\alpha^2 \neq \alpha^4$

De même $\alpha \neq \alpha^4$

c. $A \in \mathbb{C}[X]$ donc A est scindé sur $\mathbb{C}$

$[A]_{3-1} = (-1)^1 \sum_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i = -(\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)$

Or $[A]_{3-1} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{7})$

Donc $\alpha + \alpha^2 + \alpha^4 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{7})$

$[A]_{3-2} = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{7}) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} = \alpha\alpha^2 + \alpha^4\alpha + \alpha^2\alpha^4$

Donc $\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{7}$

$$[A]_{3-3} = -1 = -\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\alpha_{i_3} = -\alpha^7$$

Donc $\alpha^7 = 1$

Stanislas G Semaine colle n° 17

Exercice 8. *Trouver le reste de la division euclidienne de*

1. $X^{2n} + X^n - 1$ *par* $X - 2$ *puis par* $X^2 - 4$, *où* $n \in \mathbb{N}^*$
2. $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ *par* $(X-1)^2$, *où* $n \geq 2$.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) Posons $A = X^{2n} + X^n - 1$

$B = X - 2$ $\quad \deg(B) = 1$

$C = X^2 - 4$ $\quad \deg(C) = 2$

On cherche le reste de la division euclidienne de A par B

$\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ ~~tel que R soit~~

tel que R soit le reste et Q le quotient

$A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B) = 1$

$\Rightarrow R = k$ où $k \in \mathbb{N}$

or B a une racine qui est 2 donc $\tilde{B}(2) = 0$

donc $\tilde{A}(2) = R$

donc $R = 4^n + 2^n - 1$

Soit R_1^* le reste de la division euclidienne de A par C

alors $\deg(R_1^*) < \deg(C) = 2$

donc $R_1^* = \alpha X + \beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$

$\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ $\quad A = CQ + R_1^*$

Sachant que $\tilde{C}(2)$ et $\tilde{C}(-2)$ sont nuls on a

$\tilde{A}(2) = \tilde{R}_1^*(2)$ et $\tilde{A}(-2) = \tilde{R}_1^*(-2)$

$= 4^n + 2^n - 1$ $\quad = 4^n + (-2)^n - 1$

$= 2\alpha + \beta$ $\quad = -2\alpha + \beta$

donc $\hat{\tilde{R}}_1(2) - \hat{\tilde{R}}_1(-2) = 2^n - (-1)^n 2^n$

$= 4\alpha$

donc $\alpha = 2^{n-2} - (-1)^n 2^{n-2}$

de plus $\hat{\tilde{R}}_1(2) + \hat{\tilde{R}}(-2) = 2\beta = 2 \times 4^n + 2^n + (-1)^n 2^n - 2$

donc $\beta = 4^n + 2^{n-1} + (-1) 2^{n-1} - 1$

donc $R_1 = (2^{n-2} - (-1)^n \times 2^{n-2}) X + 4^n + 2^{n-1} + (-1) 2^{n-1} - 1$

1/2

Louis D. Semaine de colle n°17

Exercice 1. *On définit une suite de polynômes* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en posant* $T_0 = 1$, $T_1 = X$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce.

1. (a) *Expliciter* T_2, T_3 *et* T_4.
   (b) *Déterminer le degré et le coefficient dominant de* T_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{T_n}$ *a la même parité que* n.

Solution :

1) a) $T_2 = 2XT_1 - T_0$
$= 2X^2 - 1$

$T_3 = 4X^3 - 2X - 1$

$T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $P(n) =$ " dom $(P) = 2^{n-1}$
et deg $(P) = n$ "

On raisonne par récurrence double.

Initialisation à $n = 1$ et $n = 2$:

$P(1)$ et $P(2)$ vraies par a)

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $P(n)$
et $P(n+1)$ sont vraies.

$$T_{n+2} = \underbrace{2X}_{} \underbrace{T_{n+1}}_{\substack{deg = 1+n+1 \\ (HR)}} - \underbrace{T_n}_{deg = n}$$

nous lire $deg(T_{n+2}) = n+2$

$$T_{n+2} = \underbrace{2X}_{dom = 2} \underbrace{T_{n+1}}_{dom = 2^n} - T_n$$

nous lire $d(T_{n+2}) = 2^{n+1}$.

Donc $P(n+2)$ est vraie

<u>Conclusion :</u> $P(1) \wedge P(2) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}^* \ P(n+1) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+2))$ est vraie. Par <u>l'axiome de récurrence</u>,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ dom(T_n) = 2^{n-1}, \ deg(T_n) = n}$$

Soit $x \in \mathbb{K}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $P(n) =$ " $T_n(x) = (-1)^n T_n(-x)$ "

On raisonne par récurrence double

<u>Initialisation</u> à $n = 1$ et $n = 2$

$\widetilde{T}_1(x) = x = (-1)^1(-x) = (-1)^1 \widetilde{T}_1(-x)$

$\widetilde{T}_2(x) = 2x^2 - 1 = 2(-x)^2(-1)^2 - 1$

Donc $P(1)$ et $P(2)$ vraies $= (-1)^2 \widetilde{T}_2(-x)$

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies.

Yonis.D.

$$\widetilde{T}_{n+2}(x) = \widetilde{T}_{n+1}(x)\,2x - \widetilde{T}_n(x)$$
$$= (-1)^{n+1}\,\widetilde{T}_{n+1}(-x)2x - (-1)^n\,\widetilde{T}_n(-x)$$
$$= (-1)^{n+2}\left(\widetilde{T}_{n+1}(-x)\,2(-x) - \widetilde{T}_n(-x)\right)$$
$$= (-1)^{n+2}\,\widetilde{T}_{n+2}(-x)$$

Donc $P(n+2)$ est vraie

Conclusion : Par l'axiome de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \widetilde{T}_n \text{ a la même parité que } n}$$

Sophie G.

Colle de la semaine 17

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $P = (X-1)P'$.

<u>Solution</u> Resolvons $P=(X-1)P'$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$

Raisonnons par analyse-synthèse.

<u>Analyse</u> : Supposons $\exists P \in \mathbb{R}[X],\ P = (X-1)P'$) $*$

. Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$: clair

. Si $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$

Soit $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$

. dom (P) = dom (P')

$$P = \sum_{k=0}^{n} [P]_k X^k \overset{*}{=} \sum_{k=0}^{n} [P]_k\, k\, X^{k-1} (X-1)$$

$\Rightarrow$ dom $(P) = n \cdot$ dom (P)

$\underset{\text{dom}(P) \neq 0}{\Rightarrow}$ $n = 1$. d'où $P = ax + b$; $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

et $(*) \Rightarrow b = -a$

d'où $\begin{cases} \text{dom}(P) = \text{dom}(P') \\ \deg(P) = 1 \end{cases}$ pour P candidat de $*$ $\in \mathbb{R}[X]$

on a $P = aX - a$

<u>Synthèse</u>

Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ clair

Si $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $P = aX - a$, $a \in \mathbb{R}^*$.

$(X-1)P' = (X-1)a$

$= aX - a = P$

Donc $\boxed{S = \{ aX - a \,;\, a \in \mathbb{R}^* \}}$

Mehdi B. Colle de la semaine 17

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $P'^2 = 4P$.

Solution : • On remarque que $0_{\mathbb{R}[X]}$ est solution du problème.

• De plus, si l'on suppose $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, alors par intégrité de $\mathbb{R}[X]$ P ne peut pas être de degré 1

• Nous raisonnons par analyse-synthèse

Analyse

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant (*) $P'^2 = 4P$, tel que $\deg(P) \geq 2$.
Nous déduisons de (*):

$$2(\deg(P) - 1) = \deg(P)$$

$$\Rightarrow \deg(P) = 2.$$

L'ensemble des polynômes de degré 2 est donc candidat.

Synthèse

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) = 2$. Alors

$$\exists (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \quad P = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

Dès lors :

$P' = 2a_2 X + a_1$ et $(P')^2 = 4a_2^2 X^2 + 4a_1a_2 X + a_1^2$.

Pour que $4P = P'^2$, il suffit :

$$\begin{cases} 4a_2^2 = 4a_2 \\ 4a_1a_2 = 4a_1 \\ a_1^2 = 4a_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_0 = \frac{1}{4} a_1^2 \\ a_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Conclusion : notre étude livre l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P'^2 = 4P$:

$$\boxed{Sol_{(*)} = \{0_{\mathbb{R}[X]}\} \cup \left\{ X^2 + a_1 X + \frac{1}{4}a_1^2 : a_1 \in \mathbb{R} \right\}}$$

Jules R.

Colle de la semaine 16

Énoncé : Degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$ en fonction de celui de $P(X)$

Solution : $P \in \mathbb{K}[X]$

Posons $n = \deg(P)$.

Ecrivons $P(X)$ et $P(X+1)$ sous forme canonique :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{avec} \quad a_n \neq 0 \text{ et } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}^{n+1}$$

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k \quad \text{avec } a_n \neq 0 \text{ et } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}^{n+1}$$

On calcule $P(X+1) - P(X)$:

$$P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

$$\text{donc} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} X^p \right) - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Ainsi, la seule fois où apparait X^n dans la somme de gauche, c'est quand $k = p = n$ or la somme donnera $a_n X^n$ ce qui sera simplifié par la somme de gauche.

Ainsi :

$$\deg(P(X+1) - P(X)) < n = \deg(P)$$

Exercice 4. *Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. *On considère le polynôme $P = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$.*
   (a) *Montrer que 1 est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.*
   (b) *Déterminer le spectre de P dans $\mathbb{C}$.*
2. *Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A_n = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$.*

   Déterminer le reste de la division euclidienne de A_n par $(X-3)(X-2)$.

<u>Solution</u>

1a. Soit $P = X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1$

Alors $\widetilde{P}(1) = 1^5 - 2\times 1^4 + 1^3 - 1^2 + 2\times 1 - 1 = 0$

Donc 1 est une racine de P

·) $P^{(1)} = 5X^4 - 8X^3 + 3X^2 - 2X + 2$ et $\widetilde{P}^{(1)}(1) = 0$

$P^{(2)} = 20X^3 - 24X^2 + 6X - 2$ et $\widetilde{P^{(2)}}(1) = 0$

$P^{(3)} = 60X^2 - 48X + 6$ et $\widetilde{P^{(3)}}(1) = 18 \neq 0$

Donc $\text{mult}(1, P) = 3$ (caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine via les dérivées)

1b. Calculons la division euclidienne de P par $(X-1)^3$

$$
\begin{array}{r|l}
X^5 - 2X^4 + X^3 - X^2 + 2X - 1 & X^3 - 3X^2 + 3X - 1 \\
\cline{2-2}
- \quad X^5 - 3X^4 + 3X^3 - X^2 & X^2 + X + 1 \\
\cline{1-1}
X^4 - 2X^3 + 2X - 1 & \\
- \quad X^4 - 3X^3 + 3X^2 - X & \\
\cline{1-1}
X^3 - 3X^2 + 3X - 1 & \\
- \quad X^3 - 3X + 3X - 1 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Donc $P = (X-1)^3(X^2 + X + 1) = (X-1)^3\left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Donc $\text{Spec}_{\mathbb{C}}(P) = \left\{1 ; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ et $A_n = (X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$. Alors

$\exists (Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad A_n = (X-3)(X-2)Q + R$ et $\deg(R) < 2$

Donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R = aX + b$

En évaluant en 3 et 2,

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{A_n}(3) = (3-3)^{2n} + (3-2)^n - 2 = -1 \\ \widetilde{A_n}(3) = (3-3)(3-2)\widetilde{Q}(3) + \widetilde{R}(3) = \widetilde{R}(3) \end{array}\right\} \text{donc } \widetilde{R}(3) = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{A_n}(2) = (2-3)^{2n} + (2-2)^n - 2 = -1 \\ \widetilde{A_n}(2) = (2-3)(2-2)\widetilde{Q}(2) + \widetilde{R}(2) = \widetilde{R}(2) \end{array}\right\} \text{donc } \widetilde{R}(2) = -1$$

On a donc

$$\begin{cases} 3a + b = -1 & (L_1) \\ 2a + b = -1 & (L_2) \end{cases}$$

$L_1 - L_2$ donne $a = 0$ et $b = -1$

donc $R = -1$

Titouan Rapport de colle

D

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ $\quad P(X) = X^6 - 7X^3 - 8$

$$X^6 - 7X^3 - 8 = \left(X^3 - \frac{7}{2}\right)^2 - 8 - \frac{49}{4} \qquad \text{(forme canonique)}$$

$$= \left(X^3 - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$= (X^3+1)(X^3-8) \qquad \text{(identité remarquable)}$$

$$= (X+1)(X^2-X+1)\ (X-2)(X^2+2X+4) \qquad \text{(on factorise par les racines évidentes)}$$

$\boxed{\text{Une factorisation de } X^6-7X^3-8 \text{ dans } \mathbb{R}[X] \text{ est } (X+1)(X^2-X+1)(X-2)(X^2+2X+4)}$

(Les polynomes de degré 2 n'ont pas de racines dans $\mathbb{R}$)

ALAMI
Lina

Colle de la semaine 17.

Exercice 1. On appelle polynôme réciproque un polynôme dont la suite des coefficients est symétrique. Autrement dit, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ est réciproque si et seulement si $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = a_{n-k}$.

1. Démontrer qu'un polynôme de degré n est réciproque si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Démontrer que le produit de deux polynômes réciproques est un polynôme réciproque.
3. On suppose que $P = (1+X)Q$.
   (a) Démontrer que si P est un polynôme réciproque alors Q l'est aussi.
   (b) Démontrer qu'un polynôme réciproque de degré impair admet -1 comme racine.
   (c) Montrer que si α est racine d'un polynôme réciproque, alors $\alpha \neq 0$ et $\frac{1}{\alpha}$ est racine de P.

Solution :

1. Soit $x \in \mathbb{K}^*$

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{où} \quad a_n \neq 0$$

$$P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^n}{x^k}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

$$\underset{j=n-k}{\Leftrightarrow} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} x^j$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!] \ a_k = a_{n-k}$$

2. Soit P, Q deux polynomes réciproques alors, pour tout $x \in \mathbb{K}^*$

$P(x) = x^p P\left(\frac{1}{x}\right)$ où $p = \deg(P)$

$Q(x) = x^q Q\left(\frac{1}{x}\right)$ où $q = \deg(Q)$.

Donc $PQ(x) = x^{p+q} QP\left(\frac{1}{x}\right)$ où $p+q = \deg(P)+\deg(Q) = \deg(PQ)$

3 (a) Supposons P un polynôme réciproque et $x \in \mathbb{K}^*$

Alors $P(x) = x^p P\left(\frac{1}{x}\right)$ où $p = \deg(P)$.

(b) Supposons que P est de degré impair et est un polynôme réciproque et $x \in \mathbb{K}^*$ alors

$$P(x) = x^{2n+1} P\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \deg(P) = 2n+1.$$

En évaluant en -1 :

$$P(-1) = -1 \times P(-1)$$

et donc $P(-1) = -P(-1)$.

D'où $P(-1) = 0$ et -1 est racine de P

(c) Supposons α racine de P un polynôme réciproque

alors $P(\alpha) = \alpha^n P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ où $n = \deg(P)$.

Et $\forall k \in [\![0, n]\!]$

$$a_k = a_{n-k} \qquad \left(P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)$$

Pour $k = 0$ $\quad a_0 = a_n \neq 0$ par [illegible].

Supposons $\alpha = 0$

$$P(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \quad ↯.$$

Donc $\alpha \neq 0$

D'autre part

$$\alpha^n P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

Par intégrité de $\mathbb{K}$, il vient que $P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$

Donc $\frac{1}{\alpha}$ est racine de P

Rapport de colle semaine 16

NISS MATHEO

Solution

EXERCICE 16 — Soit $(A,B,P) \in \mathbb{K}[X]$ tel que P n'est pas constant. On suppose que $A \circ P$ divise $B \circ P$. Démontrer que A divise B.

Considérons la division de B par A,

$\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(R) < \deg(A)$ et

$$B = QA + R$$

On applique $\circ P$:

$$B \circ P = (QA) \circ P + R \circ P$$
$$= (Q \circ P)(A \circ P) + R \circ P$$

Or : $A \circ P$ divise $B \circ P$ donc :

$$R \circ P = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

Comme $\deg(P) \geq 1$

et que $\deg(R \circ P) = \deg(R)\deg(P)$

on a : $\deg(R) = -\infty$

Ainsi : $R = 0$

D'où : $B = QA$

Ainsi, A divise B.

Youssef. B

Colle de la semaine 17

Resoudre l'equation suivante d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$(E) : (1+X^2)^2 P'' - 2X(1+X^2)P' + 2(X^2-1)P = 0$$

Solution :

On a (E) : $(1+X^2)^2 P'' - 2X(1+X^2)P' + 2(X^2-1)P = 0$

soit $\deg(P) = n$

alors,

$\deg((1+X^2)^2 P'') = 4 + n - 2 = 2 + n$

$\deg(X(1+X^2)P') = 3 + n - 1 = 2 + n$

$\deg((X^2-1)P) = 2 + n$

si $\deg(P) \geqslant 1$, alors $\mathrm{dom}(P') = \deg(P)\,\mathrm{dom}(P)$

et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(P'') &= \deg(P')\,\mathrm{dom}(P') \\ &= (\deg(P)-1)\,\mathrm{dom}(P)\deg(P) \\ &= \deg(P)^2\,\mathrm{dom}(P) - \deg(P)\,\mathrm{dom}(P)\end{aligned}$$

D'après (E), on peut dire que :

$\mathrm{dom}(P'') - 2\,\mathrm{dom}(P') + 2\,\mathrm{dom}(P) = 0$

$\Leftrightarrow \deg(P)^2\,\mathrm{dom}(P) - \deg(P)\,\mathrm{dom}(P) - 2\deg(P)\,\mathrm{dom}(P) + 2\,\mathrm{dom}(P) = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{dom}(P)\left[\deg(P)^2 - 3\deg(P) + 2\right] = 0$

Donc $\mathrm{dom}(P) = 0$ ou $\deg(P) = 1$ ou $\deg(P) = 2$

On pose $P = aX^2 + bX + c \quad , \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

Donc $\begin{cases} P' = 2aX + b \\ P'' = 2a \end{cases}$

$(E) \iff (1+X^2)^2 \times 2a - 2X(1+X^2)(2aX+b) + 2(X^2-1)(aX^2+bX+c) = 0$

(on developpe) $\iff (c-a)X^2 - bX + (a-c) = 0$

Donc

$$\begin{cases} c - a = 0 \\ -b = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = c \\ b = 0 \end{cases}$$

Alors, $\boxed{Sol_{(E)} = \{ (aX^2 + a) : a \in \mathbb{R} \}}$

Rapport de colle - semaine 17 Uta Bayon de Noyer

Exercice :

1. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

(E) $\quad (1+X^2)^2 P'' - 2X(1+X^2)P' + 2(X^2-1)P = 0$

2. En déduire une solution particulière non-nulle de l'équation différentielle :

$$(1+t^2)^2 y'' - 2t(1+t^2)y' + 2(t^2-1)y = 0.$$

1. • 0 est une solution de (E)

• Analyse :

Soit P solution de (E) et $\deg(P) \geq 0$.

On note $n := \deg(P)$

• $\text{dom}(P') = n\,\text{dom}(P)$

• $\text{dom}(P'') = n(n-1)\,\text{dom}(P)$

• $\text{dom}((1+X^2)^2) = 1$

• $\text{dom}(2t(1+X^2)) = 2$

• $\text{dom}(2(X^2-1)) = 2$

$(E) \underset{\text{passage en dominant}}{\Rightarrow} n(n-1)\,\text{dom}(P) - 2n\,\text{dom}(P) + 2\,\text{dom}(P) = 0$

$\Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ \text{ou} \\ n = 1 \end{cases}$

Donc le degré de P est 1 ou 2.

Synthèse :

cas où $\deg(P) = 1$.

Nicolas . H

Colle de la semaine 17

Énoncé

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note P le polynôme $X^6+4X^5+8X^4+10X^3+\alpha X^2 + 4X+1$

On suppose que -1 est racine de P

1. Déterminer α
2. Montrer que -1 est de multiplicité au moins 2
3. Montrer que $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est également racine multiple de P
4. En déduire toutes les racines de P et leurs multiplicit

Solution :

1) $\tilde{P}(-1)=0$, $\tilde{P}(-1)= 1-4+8-10+\alpha-4+1 = -8+\alpha$

$\Rightarrow \alpha-8=0 \Rightarrow \alpha=8$

2) $P' = 6X^5+20X^4+32X^3+30X^2+16X+4$

$P'(-1)=-6+20-32+30-16+4=0$

3) $\tilde{P}(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = j^6+4j^5+8j^4+10j^3+8j^2+4j+1$

On sait : $j^2=\bar{j}$ $j^3=1$

$\tilde{P}(j) = (j^3)^2+4j^3\times j^2+8j^3 j+10+8j^2+4j+1$

$= 12+4\bar{j}+8j+8\bar{j}+4j$

$= 12+12(j+\bar{j}) = 12+12(\mathrm{Re}(j)\times 2) = 12+12(-0{,}5\times 2)$

$= 12+12\times(-1) = 0$

$\tilde{P'} = 6\times j^3\times j^2+20j^3\times j+32+30j^2+16j+4$

$= 36(\bar{j}+j)+36 = 0$

Donc j est racine multiple de P

4) $\tilde{P}(\bar{j}) = (j^2)^6+4\times(j^2)^5+8\times(j^2)^4+10(j^2)^3+8(j^2)^2+4(j^2)^1+1$

$= 0$

$\tilde{P'}(\bar{j})=0$

Donc $-1, j, \bar{j}$ sont les racines de P, de multiplicité chacune 2.

Robin G. Colle de la semaine 17

Soit $P = X^3 - X^2 + 6X - 1$

1) Montrer que P a trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$.

2) Soient α, β, γ ces racines, déterminer $\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma}$.

Solution :

1). $\tilde{P}$ est C^0 sur $\mathbb{R}$

- $0 < 1$
- $\tilde{P}(0) < 0 < \tilde{P}(1)$ $\quad (\tilde{P}(0) = -1$ et $\tilde{P}(1) = 5)$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

- $P' = 3X^2 - 2X + 6$

Son discriminant est $-14 < 0$, donc $\tilde{P}'$ garde un signe constant.
$\tilde{P}'(0) = 6 > 0$

Ainsi $\tilde{P}'$ est strictement positive, donc $\tilde{P}$ est strictement croissante.

α est donc l'unique racine réelle de P.

Montrons que $m := mult(\alpha, P) = 1$ par l'absurde.

- Supposons $m = 3$.

Alors $P = (X-\alpha)^3 = X^3 - 3\alpha X^2 + 3\alpha^2 X - \alpha^3$

donc $\begin{cases} -1 = -3\alpha \\ -1 = -\alpha^3 \end{cases}$ ce qui n'est pas.

- Supposons $m = 2$.

$\exists Q_1 \in \mathbb{C}[X]$, $\exists a, b \in \mathbb{C}[X]^2$ tq $Q_1 = aX + b$ et $a \neq 0$ tels que

$P = (aX+b)(X-\alpha)^2$ $\quad (a \neq 0$ car $\deg(Q_1) = \deg(P) - 2 = 1)$

$\tilde{P}\left(\frac{-b}{a}\right) = 0$, donc $\beta = \frac{-b}{a}$ est racine de P dans $\mathbb{C}$.
Or, α est l'unique racine réelle, donc $\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.
On sait que si $\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ est racine, alors $\bar{\beta}$ est racine ($P \in \mathbb{R}[X]$)
$\beta \neq 0$ donc $\beta \neq \bar{\beta}$.
Q_1 a 2 racines distinctes ce qui contredit $\deg(Q) = 1$.

Donc $\text{mult}(\alpha, P) = 1$. Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tq $\deg(Q) = 2$
et $P = Q(X-\alpha)$.
$\cdot P$ possède une unique racine réelle α de multiplicité 1,
donc Q n'a pas de racine réelle.

$\deg(Q) = 2$ donc Q possède 2 racines dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ distinctes β et γ,
telles que $\bar{\beta} = \gamma$.

$\alpha, \beta, \gamma \neq 1$
car $\tilde{P}(1) = 5$

2) $$\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma} = \frac{3 - 2(\alpha+\beta+\gamma) + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\gamma)(1-\beta)} \quad (*)$$

comme $\cdot P = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$

$\cdot \alpha + \beta + \gamma = -1$ (formules de Viète)
$\cdot \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 6$

$$(*) = \frac{11}{\tilde{P}(1)} = \frac{11}{5}$$

2/2

Billy. G

Semaine de Colle 17

EXERCICE 3 — Factoriser X^6+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution : Tout d'abord, résolvons :

$z^6+1=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^6 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{z}{e^{i\frac{\pi}{6}}} \in \mathbb{U}_6 = \left\{ k\in[\![0,5]\!] : e^{i\frac{2k\pi}{6}} \right\}$

$\Leftrightarrow z = e^{i\frac{(2k\pi+\pi)}{6}}$

Comme les racines sont des éléments de $\mathbb{U}_6$, les racines sont 2 à 2 ≠.
On peut écrire : $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$,

$X^6+1 = Q\prod_{k=0}^{5}\left(X-e^{i\frac{(2k\pi+\pi)}{6}}\right)$

Or : en passant au degré, on trouve que : $\deg(Q)=0$
D'où : $Q = \mathrm{dom}(X^6+1)=1$
On a donc : $X^6+1 = \prod_{k=0}^{5}\left(X-e^{i\frac{(2k\pi+\pi)}{6}}\right)$

$= \left(X-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\left(X-e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)\left(X-e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)$

$= \left(X^2-X\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)+1\right)\left(X^2-X\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)+1\right)\left(X^2-X\left(e^{-i\frac{\pi\times5}{6}}+e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)+1\right)$

$= \left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right)$

Yhonim
Sayon

Colle de la semaine n°17

> Exercice :
> Combien un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ peut-il avoir de racines réelles, en fonction de son degré ?
> Et un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$?

<u>Solution :</u>

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$

Si $P = 0$:

Alors $\deg(P) = -\infty$ et P possède une infinité de racines réelles.

Si $P \neq 0$:

Alors, on pose $n := \deg(P) \geq 0$.

Si $n = 0$:

Alors

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}^* \quad P = \lambda$$

On en déduit que P ne possède aucune racine réelle.

Si $n \geq 1$:

Alors $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \geq 1$ donc P est scindé sur ~~$\mathbb{C}[X]$~~ $\mathbb{C}$

$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \quad P = \mathrm{dom}(P) \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$

On en déduit que P ne peut posséder que n racines réelles au maximum.

Désormais, montrons que :

$\forall k \in [\![0;n]\!] \quad \exists P_k \in \mathbb{C}[X] \quad P_k$ possède k racines réelles

Soit $k \in [\![0;n]\!]$:

On pose $P_k := X^k (X-i)^{n-k}$

On remarque que ce polynome possède k racines réelles (toutes égales à 0).

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$:

Si $P = 0$ ou $P = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, le raisonnement est analogue avec celui appliqué pour $P \in \mathbb{C}[X]$.

Posons $n := \deg(P) \geq 1$

On raisonne par récurrence double :

On pose

$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$: " Soit P un polynome de $\mathbb{R}[X]$ de degré n. Alors le nombre de racines réelles de P est de même parité que celui du degré n "

Initialisation à $n=0$ et $n=1$:

Si $n=0$:

P ne possède aucune racine réelle.

Or 0 est de même parité que 0 donc $P(0)$ vrai

Si $n=1$:

Alors

$\exists (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2$ tq $\alpha_1 \neq 0$ et $P = \alpha_1 X + \alpha_0$

L'unique racine de P est $-\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \in \mathbb{R}$

Or 1 est de même parité que 1 donc $P(1)$ vrai

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ vrai et $P(n+1)$ vrai.

Montrons que $P(n+2)$ est vrai

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n+2$:

Si $n+2$ pair:

Si P ne possède pas de racine réelle:

0 est pair donc $P(n+2)$ vrai

Sinon:

On considère $\alpha \in \mathbb{R}$ racine de P:

Alors

$\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ $P = (X-\alpha)Q$ (α racine)

Par analyse sur le degré:

$\deg(Q) = n+1$

Or $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $P(n+1)$ vrai donc

Q possède un nombre impair

de racine réelle.

Donc P possède un nombre pair de racine réelle,

Donc $P(n+2)$ vrai.

Si $n+2$ est impair :

Alors P possède une racine réelle (Voir preuve feuille suivante).

Donc on pose $\alpha \in \mathbb{R}$ racine de P :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X] \quad P = (X-\alpha) Q$$

Par analyse sur le degré :

$\deg(Q) = n+1$

Or $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $P(n+1)$ vrai donc Q possède un nombre pair de racine réelle. Donc P possède un nombre impair de racine réelle, donc $P(n+2)$ vrai.

<u>Conclusion :</u>

$\forall n \in \mathbb{N}$ Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n possède un nombre de racine réelle de même parité que celle de n

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

Supposons que $n := \deg(P)$ est impair :

Montrons que P possède une racine réelle.

On considère

$$\tilde{P} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} [P]_k x^k \end{array} \right.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} [P]_k x^k = x^n \sum_{k=0}^{n} [P]_k \frac{x^k}{x^n} = x^n \Big([P]_n + \sum_{k=0}^{\overbrace{n-1}^{\geq 0 \text{ (car } n \text{ impair)}}} [P]_k \frac{x^k}{x^n} \Big)$$

Or $n \geq 1$ donc :

$$\left| \begin{array}{l} x^n \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ [P]_n + \sum_{k=0}^{n-1} [P]_k \underbrace{\frac{x^k}{x^n}}_{\frac{1}{x^{n-k}}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} [P]_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} x^n \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ (n impair)} \\ [P]_n + \sum_{k=0}^{n-1} [P]_k \frac{x^k}{x^n} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} [P]_n \end{array} \right.$$

Supposons $[P]_n > 0$:

Par opérations sur les limites :

$$\tilde{P}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\text{et } \tilde{P}(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Par définition :

$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq \alpha \Rightarrow \tilde{P}(x) \geq A$

et $\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq \alpha \Rightarrow \tilde{P}(x) \leq B$

En prenant $A = 0 \in \mathbb{R}$, on en déduit qu'il existe une valeur ~~pos~~ dans $\mathbb{R}$ tel que $\tilde{P}$ est positif en cette valeur
évoluant en

En prenant $B = 0 \in \mathbb{R}$, on en déduit qu'il existe une valeur dans $\mathbb{R}$ tel que $\tilde{P}$ est négatif en cette valeur.
évoluant à

Supposons $[P]_n < 0$:

Par un raisonnement analogue, nous savons que $\tilde{P}$ est négatif en une valeur de $\mathbb{R}$ et positif en une autre.

On ~~suppose~~ pose α tel que $\tilde{P}(\alpha) \geq 0$ et β tel que $\tilde{P}(\beta) \leq 0$ et $\alpha \neq \beta$

On suppose $\alpha < \beta$ (analogue si $\alpha > \beta$)

- $\tilde{P}$ est une fonction polynomiale donc elle est continue sur $\mathbb{R}$
- α et β des points de $\mathbb{R}$ tel que $\alpha < \beta$
- $\mathbb{R}$ intervalle non vide et non réduit à un point
- $\tilde{P}(\beta) \leq 0 \leq \tilde{P}(\alpha)$ et $0 \in \mathbb{R}$

Par théorème des valeurs intermédiaires :

$\exists c \in [\alpha, \beta]$ tel que $\tilde{P}(c) = 0$

ie c racine réelle de P

Léa N. Colle de la semaine 17

Énoncé :

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1$$

Solution :

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 - X + 1)^2 - i^2$$

$$= (X^2 - X + 1 - i)(X^2 - X + 1 + i)$$

On remarque que $-i$ est une racine évidente de $(X^2 - X + 1 - i)$ et i une racine évidente de $(X^2 - X + 1 + i)$

Alors on a :

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X + i)(X - 1 - i)(X - i)(X - 1 + i)$$

$$= (X + i)(X - i)(X - 1 - i)(X - 1 + i)$$

$$= (X^2 - i^2)((X-1)^2 - i^2) \quad \text{(identité remarquable)}$$

$$\boxed{(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 + 1)((X-1)^2 + 1)}$$

Hugo D. Colle de la semaine n° 17

> Soit P un polynome à coefficients entier tel que $\tilde{P}(n)$ est un nombre premier pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Caractériser P

<u>Solution</u> : <u>Analyse</u> Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \tilde{P}(n) \text{ est premier}$$

On évalue P en $0 \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{P}(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k\, 0^k = [P]_0$$

$$\Rightarrow [P]_0 \text{ est premier}$$

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \tilde{P}(n[P]_0) = [P_0]$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{P}(n[P_0]) = \sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k\, (n[P]_0)^k$$

$$= [P]_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [P]_k\, n^k\, [P_0]^k$$

$$= [P]_0 \Big(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} [P]_k\, n^k\, [P_0]^{\overbrace{k-1}^{\geq 0}}\Big)$$

Or $\tilde{P}(n[P_0])$ est premier, $[P]_0$ est premier, et $\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} [P]_k\, n^k\, [P_0]^{k-1}\right) \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow [P_0] \in \underbrace{\mathrm{Div}(\tilde{P}(n[P]_0)) \cap \mathcal{P}}_{=\{\tilde{P}(n[P]_0)\}}$$

ensemble des nombres premiers ($\mathcal{P}$)

car $\tilde{P}(n[P]_0)$ est premier

On en déduit que $\tilde{P}(n[P_0]) = [P]_0$

Donc $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \underbrace{\tilde{P}(n[P]_0) - [P]_0}_{\widetilde{P - [P]_0}(n[P]_0)} = 0$

Comme $\mathbb{Z}$ est infinie, $P - [P]_0$ possède une infinité de racines

Donc $P - [P]_0$ est le polynôme nul. Donc $P = [P]_0$

On en déduit que $P \in \{ Q \in \mathbb{Z}[X] : \deg(Q) = 0$ et $(P)_0$ est premier $\}$

<u>Synthèse</u> Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P = n$ où n est un nombre premier

$\forall k \in \mathbb{Z}$ $\tilde{P}(k) = n$ qui est premier

Antoine B. colle de la semaine 17.

1/ Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que :

$P(-1)=1, \quad P(0)=-1, \quad P(1)=-1$.

est-il unique ?

2/ Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$P(-1)=1, \quad P(0)=-1, \quad P(1)=-1$.

Une solution :

1/ on cherche $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2$ où $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^3$

$P(0) = \alpha_0 = -1$, ① $P(-1) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

② $P(1) = -1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$.

- $-P(-1) + P(1) = 2\alpha_1 = -2$

ie: $\alpha_1 = -1$

- ① $\alpha_2 = 1 - \alpha_0 + \alpha_1 = 1$ cohérent..

② $\alpha_2 = -1 - \alpha_0 - \alpha_1 = 1$

donc $P = -1 - X + X^2$ est unique.

2/ $n \in \mathbb{N}$ on note I l'ensemble des indices impairs compris entre 1 et n

P ——— pairs compris entre 1 et n.

A

- $P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$

où $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

- $\alpha_0 = -1$
- $\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_{2k} - \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \alpha_{2k+1} = 2$
- $\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_{2k} + \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \alpha_{2k+1} = 0$

donc $\sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \alpha_{2k+1} = -1$

et $\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_{2k} = 1$.

Les candidats sont : tous les polynômes tels que $\left| \begin{array}{l} \sum_{k \in I} \alpha_k = -1 \\ \sum_{k \in P} \alpha_k = 1 \end{array} \right.$

S :

$$P = -1 + \sum_{k \in I} \alpha_k X^k + \sum_{k \in P} \alpha_k X^k$$

- $P(0) = -1$ ✓
- $P(-1) = -1 + 1 + 1 = 1$ ✓
- $P(1) = -1 - 1 + 1 = -1$ ✓.

Bordes
Louis

Khôlle de la semaine 16

Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^9+X^6+X^3+1$

Soit $P = X^9+X^6+X^3+1$

On pose $Q(X^3) = P(X)$

$Q = X^3+X^2+X+1$ on remarque que -1 est racine

$Q = (X+1)(X^2+1)$

$Q = (X+1)(X+i)(X-i)$

$\Rightarrow P = (X^2-X+1)(X+1)(X^3+i)(X^3-i)$

$(X^3+i) = (X-i)(X^2+iX-1)$

Résolution de $X^2+iX-1=0$
les deux solutions sont $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Ensuite $(X^3-i) = (X+i)(X^2-iX-1)$
Les racines sont $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $e^{i\frac{\pi}{6}}$

Ainsi $P = (X^2-X+1)(X+1)\underbrace{(X+i)(X-i)}_{(X^2+1)}(X-e^{i\frac{5\pi}{6}})(X-e^{-i\frac{5\pi}{6}})(X-e^{i\frac{\pi}{6}})(X-e^{-i\frac{\pi}{6}})$

$P = (X^2-X+1)(X+1)(X^2+1)(X^2-2X\cos(\frac{5\pi}{6})+1)(X^2-2X\cos(\frac{\pi}{6})+1)$

$\boxed{\text{Factoriser } X^9 + X^6 + X^3 + 1 \text{ dans } \mathbb{R}[X]}$

Solution

On note $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$.
Remarquons que $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = P(X^3)$

On remarque que -1; i et $-i$ sont racines de $P(X)$:
$\tilde{P}(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$
$\tilde{P}(i) = -i - 1 + i + 1 = 0$
$\tilde{P}(-i) = i - 1 - i + 1 = 0$
$\{-1; -i; i\} \in Spec_{\mathbb{C}}(P(X))$
de plus, $card(Spec_{\mathbb{C}}(P)) \leqslant deg(P(X))$
donc $card(Spec_{\mathbb{C}}(P(X))) \leqslant 3$
d'où $Spec_{\mathbb{C}}(P(X)) = \{-1; i; -i\} = \left\{ e^{i\frac{k\pi}{2}} ; k \in [\![1;3]\!] \right\}$

Soit $z \in \mathbb{C}$ racine de $P(X^3)$,
$P(z^3) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![1;3]\!], \ z^3 = e^{i\frac{k\pi}{2}}$
$\Leftrightarrow \exists k \in [\![1;3]\!], \left(\frac{z}{e^{i\frac{k\pi}{6}}} \right)^3 = 1$ i.e. $\frac{z}{e^{i\frac{k\pi}{6}}} \in \mathbb{U}_3$

Structure de $\mathbb{U}_3$: $\Leftrightarrow \exists (k, l) \in [\![1;3]\!] \times [\![0;2]\!] \quad z = e^{i\frac{\pi}{6}(4l+k)}$

On obtiens 9 racines de $P(X^3)$ deux a deux distinctes
or $card(Spec_{\mathbb{C}}(P(X^3))) \leqslant deg(P(X^3)) = 9$

d'où $Spec_{\mathbb{C}}(P(X^3)) = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}(4l+k)} ; k \in [\![1;3]\!], l \in [\![0;2]\!] \right\}$

$P(X^3) \in \mathbb{C}[X]$ donc $P(X^3) = \text{dom}(P) \prod_{\substack{\ell \in [\![0;2]\!] \\ k \in [\![1;3]\!]}} (X - \alpha_{\ell,k})$

où $\forall \ell \in [\![0;2]\!]$ $\forall k \in [\![1;3]\!]$, $\alpha_{\ell,k} = e^{i\frac{\pi}{6}(4\ell+k)}$

$\alpha_{1,2} = -1$ donc $P(X^3) = \text{dom}(P) \prod_{(\ell,k) \in [\![0;2]\!] \times [\![1;3]\!] \setminus \{(1,2)\}} (X - \alpha_{\ell,k}) \times (X+1)$

$P(X^3)$ est un polynôme à coefficients réels, si α est racine complexe non réel de $P(X^3)$ alors son conjugué $\overline{\alpha}$ l'est aussi.

Soient $\beta_1, \dots, \beta_4$ des racines de $P(X^3)$ non 2 à 2 conjuguées et différentes de -1, on sait alors

$$P(X^3) = \text{dom}(P)(X+1) \prod_{i=1}^{4} (X - \beta_i)(X - \overline{\beta_i})$$

$$= \underbrace{\text{dom}(P)}_{1} (X+1) \prod_{i=1}^{4} (X^2 - 2\,\text{Re}(\beta_i) X + \underbrace{|\beta_i|}_{1}^2)$$

$$= \underbrace{(X+1)}_{\in \mathbb{R}[X]} \prod_{i=1}^{4} \underbrace{(X^2 - 2\,\text{Re}(\beta_i) X + 1)}_{\in \mathbb{R}[X]}$$

C'est une factorisation de $X^9 + X^6 + X^3 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

$\overline{\alpha_{0,1}} = \alpha_{2,3}$

$\overline{\alpha_{0,2}} = \alpha_{2,2}$

$\overline{\alpha_{0,3}} = \alpha_{2,1}$

$\overline{\alpha_{1,1}} = \cancel{\alpha_{1,3}}$ $\alpha_{1,3}$

~~Re~~ On peut poser $\beta_1 = \alpha_{0,1}$,

$\beta_2 = \alpha_{0,2}$

$\beta_3 = \alpha_{0,3}$

$\beta_4 = \alpha_{1,1}$

MANGIALOMINI
Amélien

Rapport de colle

Exercice 2. Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme de degré $n-1$ à coefficient dans $\mathbb{Z}$ et dont on précisera le coefficient dominant.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale $\widetilde{P_n}$ est de même parité que $n-1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}^2 = 1 + P_nP_{n+2}$. En déduire que P_n et P_{n+1} n'ont pas de racine commune.

1) $P_2 = X$
$P_3 = X^2 - 1$
$P_4 = X^3 - 2X$

2) Par récurrence double $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$P(n)$: " $\deg P_n = n-1$ et $\operatorname{dom} P_n = 1$ et $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ "

(I) $P_1 = 1 \in \mathbb{Z}[X]$ et $\left|\begin{array}{l} \operatorname{dom}(P_1) = 1 \\ \deg P_1 = 0 \end{array}\right.$

$P_2 = X \in \mathbb{Z}[X]$ et $\left|\begin{array}{l} \operatorname{dom}(P_2) = 1 \\ \deg P_2 = 1 \end{array}\right.$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixée tq $P(n)$, $P(n+1)$ vraies,

$\deg P_{n+2} = \deg(XP_{n+1} - P_n)$ car $\deg(XP_{n+1}) \neq \deg(-P_n)$
$= \deg(XP_{n+1}) = n+1$

$\operatorname{dom} P_{n+2} = [XP_{n+1} - P_n]_{n+1} = [XP_{n+1}]_{n+1} - \underbrace{[P_n]_{n+1}}_{0 \text{ par H.R.}}$
$= 1 \in \mathbb{Z}$

1

De plus $\forall i \in [\![0; n]\!]$

$$[P_{n+2}]_i = [XP_{n+1} - P_n]_i$$
$$= \underbrace{[XP_{n+1}]_i}_{(H.R.) \in \mathbb{Z}} - \underbrace{[P_n]_i}_{(H.R.) \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}.$$

Selon l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^* \; P(n)$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$; Si n est impair alors $\widehat{P_n}$ est paire ie $\forall x \in \mathbb{R} \; \widehat{P_n}(x) = \widehat{P_n}(-x)$

Si n est paire alors $\forall x \in \mathbb{R} \; \widehat{P_n}(x) = -\widehat{P_n}(-x)$

Donc on peut se ramener à prouver directe-ment $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad \widehat{P_n}(x) = (-1)^{n-1}\widehat{P_n}(-x)}$.

Par récurrence double $\forall n \in \mathbb{N}^* \; P(n)$;

(I) Soit $x \in \mathbb{R}$ $\widehat{P_1}(x) = 1 = (-1)^0 \underbrace{\widehat{P_1}(-x)}_{1}$

$$\widehat{P_2}(x) = x = (-1)^1 \underbrace{\widehat{P_2}(-x)}_{-x}$$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $P(n), P(n+1)$ vraies :
Soit $x \in \mathbb{R}$;

$$\widehat{P_{n+2}}(x) = x\widehat{P_{n+1}}(x) - \widehat{P_n}(x)$$
$$(H.R.) = x(-1)^n \widehat{P_{n+1}}(-x) + (-1)^n \widehat{P_n}(-x)$$
$$= (-1)^n \Big[\underbrace{x\widehat{P_{n+1}}(-x) + \widehat{P_n}(-x)}_{-\widehat{P_{n+2}}(-x)} \Big]$$

$= (-1)^{n+1} \tilde{P}_{n+2}(-x)$ □.

Donc selon l'axiome de récurrence on conclut $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$.

Pour $\left| \begin{array}{l} n=0 \\ \text{pair} \end{array} \right.$ on a $\left| \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \\ \tilde{P}_0 = 0 \end{array} \right.$ donc $\tilde{P}_0$ impaire.

k) Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$: " $P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$ "

(I) $P_1^2 = 1^2 = 1 = 1 + \cancel{\underbrace{P_0}_{0} P_2}$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tq $P(n)$ vrai ; (ie $P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$)

$1 + P_{n+1} P_{n+3} = 1 + P_{n+1}(xP_{n+2} - P_{n+1})$

$= 1 + xP_{n+1} P_{n+2} - P_{n+1}^2$

H.R. $= \cancel{1} + xP_{n+1} P_{n+2} - \cancel{1} - P_n P_{n+2}$

$= P_{n+2}(\underbrace{xP_{n+1} - P_n}_{P_{n+2}}) = P_{n+2}^2$ □.

Selon l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$.

Par l'absurde supposons $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ racine commune de P_n et P_{n+1} alors ;

$\underbrace{\tilde{P}_{n+1}^2(\alpha)}_{0} = 1 + \underbrace{\tilde{P}_n(\alpha)}_{0} \tilde{P}_{n+2}(\alpha)$ ↯ $0 = 1$.

(3)

Leers Guillaume S. — Colle de la semaine 17

Soit $P_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = \frac{1}{n!}X(X+1)\dots(X+n-1)$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} P_k(X) = P_n(X+1)$.

Solution : Raisonnons par récurrence pour démontrer ce résultat.

On pose :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) = \text{"} \sum_{k=0}^{n} P_k(x) = P_n(x+1) \text{"}}$$

Initialisation à $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} P_k(x) = P_0(x+1)$.

Or ceci est vrai puisque par hypothèse $P_0 = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ soit vraie. Considérons $P(n+1)$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} P_k(x) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) + P_{n+1}(x)$$

Par hypothèse de récurrence :

$$= P_n(x+1) + P_{n+1}(x)$$

$$= \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x+k) + \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x+k)$$

$$= \prod_{k=1}^{n}(x+k)\left[\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}x\right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n+1}(x+k) \qquad \text{on pose } k' = k-1$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k'=0}^{n}(x+k'+1)$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété a été initialisée et est héréditaire alors d'après le principe de récurrence simple, elle est vraie pour tout entier naturel.

Maximilien T. — Colle de la Semaine 18

2.10

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $P(x) \geq 0$ pour tout réel x.
Montrer que le coefficient dominant de P est positif et que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
Montrer qu'il existe un polynôme $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = C\overline{C}$.
En déduire qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

<u>Solution</u>

1) P étant non constant, $\deg(P) \geq 1$

Ainsi en passant à la limite $_{x \to +\infty}$ $\quad \tilde{P}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Cela force $\mathrm{dom}(P) > 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $\tilde{P}(\alpha) = 0$ alors $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$m = \mathrm{mult}(\alpha, P)$
$P = Q(X-\alpha)^m$ et α n'est pas racine de Q

Par l'absurde si m est impair : en regardant le tableau de signe autour de α

X		α	
$\tilde{Q}(x)$	$-$ / $+$	ou	$-$ / $+$
$(X-\alpha)^m$	$-$	0	$+$
$\tilde{P}(x)$	$-$	0	$+$
		ou	
	$+$	0	$-$

$\lightning$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $\tilde{P}(x) \geq 0$

$n = \deg(P)$

2) Par corollaire du théorème d'Alembert-Gauß

$\exists$ ~~...~~ $\exists r \in \mathbb{N}$ $\quad \exists(\alpha_0, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ et $\exists(\beta_0, \dots, \beta_{n-r}) \in \mathbb{C}^{n-r+1}$

On pose $\forall k \in [\![0, r]\!]$ $m_k = \mathrm{mult}(\alpha_k, P)$

Alors $P = \mathrm{dom}(P) \prod_{k=0}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{k=0}^{n-1} (X - \beta_k)$

Or $\exists (\gamma_1, \dots, \gamma_{\frac{n-1}{2}}) \in \mathbb{C}^{\frac{n-1}{2}+1}$ tq

$$(\gamma_1, \overline{\gamma_1}, \dots, \gamma_{\frac{n-1}{2}}, \overline{\gamma_{\frac{n-1}{2}}}) = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$$

Nous pouvons donc prendre $C = \sqrt{\mathrm{dom}(P)} \prod_{k=0}^{r} (X - \alpha_k)^{\frac{m_k}{2}} \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (X - \gamma_k)$

et $\overline{C} = \sqrt{\mathrm{dom}(P)} \prod_{k=0}^{r} (X - \alpha_k)^{\frac{m_k}{2}} \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (X - \overline{\gamma_k})$

3/ En prenant $A = \mathrm{Re}(C) := \sum_{k=0}^{\deg(C)} \mathrm{Re}([C]_k)\, X^k$

et $B = \mathrm{Im}(C) := \sum_{k=0}^{\deg(C)} \mathrm{Im}([C]_k)\, X^k$

Ainsi $P = C\overline{C} = (A + iB)(A - iB)$

$= A^2 + B^2$

Pino T. Colle de la semaine 17

> Exercice : Déterminer tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$

Solution :

On raisonne par Analyse - Synthèse.

Analyse : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

1er cas : $P \in \mathbb{R}_0[X]$.

$P(X^2) = P(X)P(X+1) \Rightarrow \tilde{P}(0) = \tilde{P}(0)\tilde{P}(1) = \tilde{P}(0)^2$
$\Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ou $P = 1_{\mathbb{R}[X]}$

2ème cas : $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}_0[X]$.

D'après le théorème de d'Alembert-Gauss :

$\exists \alpha \in \mathbb{C} \quad \tilde{P}(\alpha) = 0$.

On raisonne par récurrence simple pour montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(k) :=$ " $\tilde{P}(\alpha^{2^k}) = 0$ " est vraie.

Initialisation à $k=0$: $\tilde{P}(\alpha^{2^0}) = \tilde{P}(\alpha) = 0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

$\tilde{P}((\alpha^{2^k})^2) = \underbrace{\tilde{P}(\alpha^{2^k})}_{=0 \text{ par HR}} \tilde{P}(\alpha^{2^k}+1) \underset{\mathbb{C} \text{ intègre}}{\Rightarrow} \tilde{P}(\alpha^{2^{k+1}}) = 0$; $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après l'initialisation à $n=0$, l'hérédité et l'axiome de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\tilde{P}(\alpha^{2^k}) = 0$.

$\underset{P\neq 0_{\mathbb{R}[X]}}{\Rightarrow}$ card $\left\{\alpha^{2^k} ; k\in\mathbb{N}\right\} \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \exists (k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2 \quad k_1\neq k_2$ et $\alpha^{2^{k_1}} = \alpha^{2^{k_2}}$

$\Rightarrow \exists (k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2 \quad k_1\neq k_2$ et $|\alpha^{2^{k_1}}| = |\alpha^{2^{k_2}}|$

$\Rightarrow \exists (k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2 \quad k_1\neq k_2$ et $|\alpha|^{2^{k_1}} = |\alpha|^{2^{k_2}}$

$\Rightarrow \alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$

or $\tilde{P}((\alpha-1)^2) = \tilde{P}(\alpha-1)\underbrace{\tilde{P}(\alpha)}_{=0 \text{ finitige}} \Rightarrow \tilde{P}((\alpha-1)^2) = 0$

$\Rightarrow (\alpha-1)^2 = 0$ ou $|(\alpha-1)^2| = 1$

$\Rightarrow \alpha - 1 = 0$ ou $|(\alpha-1)|^2 = 1$

$\Rightarrow \alpha = 1$ ou $|\alpha-1| = 1$

$\Rightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = 0$ ou $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\alpha = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

or $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \tilde{P}(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 0$ or $e^{i\frac{2\pi}{3}} \notin \left\{0, 1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$

et $\alpha = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \tilde{P}(e^{-i\frac{2\pi}{3}}) = 0$ or $e^{-i\frac{2\pi}{3}} \notin \left\{0, 1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$

$\Rightarrow \alpha = 0$ ou $\alpha = 1$

$\Rightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}^* \ \exists (n,m)\in\mathbb{N}^2 \quad P = \lambda X^n (X-1)^m$ et $(n,m)\neq(0,0)$

$\Rightarrow \lambda X^{2n}(X-1)^{2m} = \lambda X^n (X-1)^m \lambda (X+1)^m X^n$

$\Rightarrow \lambda = 1$ et $X^{2n}(X-1)^{2m} = X^{n+n}(X-1)^m (X+1)^m$

$\Rightarrow n = m$

! du scindage

<u>Synthèse</u>: Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $P = X^n(X-1)^n$.

$P(X)P(X+1) = X^n(X-1)^n(X+1)^n X^n = X^{2n}(X^2-1)^n = P(X^2)$

et $0_{\mathbb{R}[X]}$ également solution.

<u>Conclusion</u>: $Sol = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\} \cup \left\{X^n(X-1)^n ; n\in\mathbb{N}\right\}$.

Lion.S Énoncé: Semaine 18

2.9

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n ($n \geq 2$) ayant n racines réelles distinctes.
1) Démontrer que toutes les racines de P' sont réelles.
2) En déduire que le polynôme $P^2 + 1$ n'admet que des racines simples.
3) Reprendre les questions si l'on suppose simplement que toutes les racines de P sont réelles.

Solution

1) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ les racines de P, tel que $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$ $\tilde{P}(\alpha_i) = \tilde{P}(\alpha_{i+1}) = 0$

$\tilde{P}$ est dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ et continue sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$

D'après le théorème de rolle, il existe $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[\subset \mathbb{R}$ tel que $\tilde{P}'(\beta_i) = 0$

Nous avons donc : $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_{n-1} < \alpha_n$

Les β_i sont distincts deux à deux.

Donc $\tilde{P}'$ à $n-1$ racines réelles

Or P' a au plus $n-1$ racines donc toutes les racines de P' sont réelles

2) Supposons qu'il existe une racine α de P^2+1 tel que $m = \text{mult}(\alpha, P^2+1) \geq 2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\tilde{P}^2(x) + 1 > 0$ donc $P^2 + 1$ n'a pas de racine réel : $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$(P^2+1)' = 2P'P$

D'après Q1, $(P^2+1)'$ n'a que des racines réelles.

Or $m \geq 2$ donc α est racine de $(P^2+1)'$ ~~$\in$~~

donc P^2+1 n'a que des racines simples.

7) Soit r le nombre de racine simples de P

Soit M le nombre de racine de multiplicité supérieur à 2 de P.

De manière analogue à Q7, P' possède $r+M-1$ racine réelles, différentes des racine de P.

Toute racine α de P de multiplicité m est racine de P' de multiplicité $m-1$; $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$P' = \underbrace{\prod_{a=0}^{r+M-1} (X-\alpha_a)}_{deg = r+M-1} \underbrace{\prod_{a=0}^{M} (X-\alpha_a)^{m-1}}_{deg = n-r-M} \times Q$$

donc $deg(Q) = 0$

donc P' ne possède que des racines réelles.

de manière analogue à Q2, P^2+1 n'a que des racines simples.

Alexandre M.

Colle semaine 17

> Degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$ en fonction de celui de $P(X)$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

Disjonction de cas :

- si $\deg P = -\infty$ ou $\deg P = 0$

on a $P(X+1) - P(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$ (P est constant)

donc $\deg\left(P(X+1) - P(X)\right) = -\infty$

- si $n := \deg P \geqslant 1$

$$D := P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} [P]_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} [P]_k X^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left([P]_k \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l\right) - \sum_{k=0}^{n} [P]_k X^k \quad \text{(FBN)}$$

$$= [P]_0 + \sum_{k=1}^{n} [P]_k \left(\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} X^l + \binom{k}{k} X^k\right) - \sum_{k=0}^{n} [P]_k X^k$$

(relation de Chasles)

$$= \sum_{k=1}^{n} \left([P]_k \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} X^l\right) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left([P]_k X^k\right) + \underset{\parallel\; [P]_0 X^0}{[P]_0} - \sum_{k=0}^{n} [P]_k X^k}_{0}$$

[linéarisation]

$$P = \sum_{k=1}^{n} [P]_k \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} X^l$$

On cherche le degré de ce polynome.

l est maximum quand $k = n$
et $l = k-1$

i.e $\exists q \in \mathbb{K}[X]$

$$\begin{cases} P = [P]_n \binom{n}{n-1} X^{n-1} + q \\ \text{et } \deg(q) < n-1 \end{cases}$$

(q est une somme de polynome de deg $< n-1$)

or $[P]_n \neq 0$ car $[P]_n = \mathrm{dom}(P)$ par def.

de plus $\binom{n}{n-1} = n \geq 1$

donc $\deg(P) = \deg\Big(\underbrace{[P]_n \, n}_{\neq 0} X^{n-1}\Big)$
(on est pas dans un cas d'égalité)

i.e $\deg(P) = n-1$

Mouchonnet Raphaël colle semaine n° 17

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $(a,b) \in \mathbb{K}$

1) Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-b)(X-a)$

2) Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$

Solution :

1)

$\exists! (Q,R) \in \mathbb{K}[X]$ $P = Q(X-a)(X-b) + R$

et $\deg(R) < 2$

$\tilde{P}(a) = \tilde{R}(a)$ et $\tilde{P}(b) = \tilde{R}(b)$

D'après Lagrange il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\tilde{L}(a) = \tilde{P}(a)$ et $\tilde{L}(b) = \tilde{P}(b)$

$$\boxed{L = \tilde{P}(a)\left(\frac{X-b}{a-b}\right) + \tilde{P}(b)\left(\frac{X-a}{b-a}\right) = R}$$

2)

$\exists! (Q,R) \in \mathbb{K}[X]$ $P = Q(X-a)^2 + R$ et $\deg(R) < 2$

On a $\tilde{P}(a) = \tilde{R}(a)$

Selon Taylor exact.

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tilde{P}^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = \tilde{P}(a) + \tilde{P}'(a)(X-a) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tilde{P}^{(k+2)}(a)}{(k+2)!}(X-a)^k \underbrace{(X-a)^2}$$

Sachant $\deg(\tilde{P}(a) + \tilde{P}'(a)(X-a)) < 2$ par unicité de la division euclidienne $\boxed{R = \tilde{P}(a) + \tilde{P}'(a)(X-a)}$