Mehdi B. Colle de la semaine

Exercice : Montrer qu'une fonciion continue définie sur un intervalle $[a,b]$ et telle que $\forall x \in [a,b], f(x) \in [a,b]$ admet au moins un point fixe. Idem si on suppose cette fois-ci que $\forall y \in [a,b], \exists x \in [a,b], f(x) = y$.

- Considérons l'application

$$\Delta \left| \begin{array}{lcl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array} \right.$$

$$\Delta(a) = \underbrace{f(a)}_{\in[a,b]} - a \geq 0$$

$$\Delta(b) = \underbrace{f(a)}_{\in[a,b]} - b \leq 0$$

D'une part : $\Delta(b) \leq 0 \leq \Delta(a)$
d'autre part, Δ est continue sur l'intervalle $[a,b]$. D'après le <u>théorème des valeurs intermédiaires</u>

$$\exists c \in [a,b] \quad \Delta(c) = 0$$

ie : $\boxed{f \text{ admet au moins un point fixe}}$

• Supposons à présent que :

$$\forall y \in [a, b] \quad \exists x \in [a, b] \quad f(x) = y$$

En particulier :

$$\exists (\alpha, \beta) \in [a, b]^2 \quad f(\alpha) = a \text{ et } f(\beta) = b.$$

On remarque :

$$\Delta(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = a - \underbrace{\alpha}_{\in [a,b]} \leq 0$$

$$\Delta(\beta) = f(\beta) - \beta = b - \underbrace{\beta}_{\in [a,b]} \geq 0$$

D'où l'encadrement : $\Delta(\alpha) \leq 0 \leq \Delta(\beta)$
Δ est continue sur l'intervalle $[a, b]$
elle est donc continue sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ (on peut supposer $\alpha < \beta$).
D'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \gamma \in [\alpha, \beta] \quad \Delta(\gamma) = 0$$

ie : $\boxed{f \text{ admet au moins un point fixe}}$

Robin G.

Colle de la semaine 16

Soit $f : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle à préciser et déterminer f^{-1}.

Solution : a) $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto 1+e^x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ } (propriétés de cop)

Donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ intervalle comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ donc f est strictement croissante donc injective sur $\mathbb{R}$.

- $x \in \mathbb{R}$. $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$

- $\frac{1}{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} 0^+$; $1+e^{-x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ $\overset{\text{composée de limites}}{\Longrightarrow}$ $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^+$

- De même, par composée de limites $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.

Ainsi, f est $\mathcal{C}^0$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ intervalle et par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbb{R}) =]0,1[$.

Donc $\tilde{f} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to]0,1[\\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$ est bijective.

1/2

Soit $f^{-1} \begin{vmatrix}]0,1[\to \mathbb{R} \\ y \mapsto l'!\, x \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x) = y \end{vmatrix}$ la bijection réciproque.

- $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
- f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ intervalle

Donc f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$.

Soit $y \in]0,1[$, calculons $f^{-1}(y) =: x$.

$$\frac{e^x}{1+e^x} = y$$

$$\underset{y<1}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y}{1-y}$$

$$\underset{\substack{0<y<1 \\ 0<1-y}}{\Leftrightarrow} x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

2/2

$\forall y \in]0,1[\; f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$

Nicolas.H

Colle de la semaine 16

Enoncé

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

a. Etudier son sens de variation, ses limites aux bornes de son ensemble de définition

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 1 - (f(x))^2$

c. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$

d. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$ et donner une expression de $(f^{-1})'(x)$

Solution.

a. $x \longmapsto e^{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{x} > 0$, donc $e^{x}+e^{-x} > 0$

comme composée et somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(e^{x}+e^{-x})(e^{x}+e^{-x}) - (e^{x}-e^{-x})(e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x}+1+1+e^{-2x} - (e^{2x}-1-1+e^{-2x})}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

propriétés exponentielle

$$= \frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2} > 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{donc } \forall (a,b) \in \mathbb{R} \text{ tel que } a<b \\ f'_{|[a,b]} \neq 0\end{array}\right)$$

Par critère différentiel de ~~monotonie~~, stricte monotonie, f est strictement croissante

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{\cancel{e^{x}}(1-e^{-2x})}{\cancel{e^{x}}(1+e^{-2x})} = \frac{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}-\cancel{1})}{\cancel{e^{-x}}(e^{2x}+1)}$$

$-2x \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$, $e^{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

Par composition de limites,

$$e^{-2x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Par opération sur les limites

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

de même, $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. d'après a)

$$f'(x) = \frac{(e^{x}+e^{-x})^2 - (e^{x}-e^{-x})^2}{(e^{x}+e^{-x})^2} = 1-(f(x))^2$$

c) • f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$
• f est strictement monotone

D'après le théorème de la bijection, f admet une bijection définie par

$$\tilde{f} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to f(\mathbb{R}) =]-1;1[\\ x \mapsto f(x) \end{array} \right. \qquad (a)$$

d) f est dérivable sur $\mathbb{R}$
f est strictement monotone sur I
$\tilde{f}^{-1}$ dérivable en $y \in]-1;1[\Leftrightarrow f'(\tilde{f}^{-1}(y)) \neq 0$

or, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) > 0$, donc $f'(\tilde{f}^{-1}(y)) \neq 0$, $\forall y \in]-1;1[$

D'après le théorème de la dérivabilité d'une fonction réciproque

$$\forall y \in]-1;1[\quad (\tilde{f}^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(\tilde{f}^{-1}(y))} = \frac{1}{1-f(\tilde{f}^{-1}(y))^2}$$

$$= \frac{1}{1-y^2}$$

Louis Guillaume S. Khôlle de la semaine 15

EXERCICE 4 — Justifier que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2\ln(x) \end{array} \right.$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et calculer ses dérivées itérées.

<u>Solution</u> : Posons $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ et $h \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x) \end{array} \right.$

g et h sont $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition respectifs en tant que fonctions usuelles. Ainsi par produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$. Interessons nous à ses dérivées itérées.

D'après la formule de Leibniz nous pouvons poser que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} g^{(i)} h^{(k-i)}$$

Soit $(k;x) \in \mathbb{N} \times]0;+\infty[$ $\quad f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} g^{(i)}(x) h^{(k-i)}(x) = \sum_{i=0}^{k} (x^2)^{(i)} \ln^{(k-i)}(x)$

Nous savons que :

$$g^{(1)}(x) = 2x \;;\; g^{(2)}(x) = 2 \;;\; g^{(3)}(x) = 0$$
$$h^{(1)}(x) = \frac{1}{x} \;;\; h^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2} \;;\; h^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$$

Ainsi nous en déduisons que

$$f^{(k)}(x) = x^2 \ln^{(k)}(x) + 2x \ln^{(k-1)}(x) + 2x \ln^{(k-2)}(x)$$

Conjecturons une formule explicite pour les dérivées de h.

On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P(k)$: " $\forall x \in]0;+\infty[$ $\quad h^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{(k-1)!}{x^k}$ "

<u>Initialisation à $k=1$</u> $\forall x \in]0;+\infty[$ $\quad \ln^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = (-1)^2 \dfrac{(0)!}{x} = \dfrac{1}{x}$

$P(1)$ est vrai

<u>Hérédité</u> : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ de telle sorte que $P(k)$ soit vraie. Considérons $P(k+1)$:

$\forall x \in]0;+\infty[$ $h^{(k+1)}(x) = (h^{(k)})'(x) = (-1)^{k+2} \dfrac{(k)!}{x^{k+1}}$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : Notre propriété a été initialisée et est héréditaire. Alors d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non nul. Nous avons donc une formule explicite pour les dérivées itérées de h. Finalement :

$$\forall (n;x) \in \mathbb{N}^* \times]0;+\infty[\quad f^{(n)}(x) = x^2(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n} + 2x(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}} + 2(-1)^{n+1}\frac{(n-3)!}{x^{n-2}}$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\left(\frac{(n-1)!}{x^{n-2}} + \frac{2(n-3)!}{x^{n-2}}\right) + (-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-2}}}$$

MATHEO-N

Exercice de colle semaine n°16

Exercice 1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -e^{\frac{1}{x}}$ pour $x < 0$ et $f(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ pour $x > 0$.*

1. *Montrer que f se prolonge par continuité en 0. Par la suite, on désignera par f ce prolongement.*
2. *La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?*

Solution :

1.

$$f \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ -e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

• Si $x < 0$

$$\left. \begin{array}{l} -e^{X} \xrightarrow[X \to -\infty]{} 0 \\ \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{de limite}]{\text{composée}} \quad f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$$

• Si $x > 0$

$$f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x^2 \ln(x+1) - x^2 \ln(x)$$

$$\ln(x+1) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

Ainsi : • $x^2 \ln(x+1) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ [opération sur les limites]

• $x^2 \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ [CC]

Ainsi $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

Donc, f est prolongeable en 0 et $\hat{f}(0) = 0$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opération sur les dérivées.

- Si $x < 0$: $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = x^{-2} e^{\frac{1}{x}}$

Par cc, $f'(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$ $\quad$ ($e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$ Q1)

- Si $x > 0$:

$$f'(x) = 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x^2 \times \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$= \underbrace{2x \ln(1+x)}_{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 0 \\ \text{[opération sur les limites]}}} - \underbrace{2x \ln(x)}_{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 0 \\ \text{cc}}} + \underbrace{\frac{x}{1+x}}_{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 0 \\ \text{[opération sur les limites]}}}$$

Ainsi : $f'(x) \longrightarrow 0$

D'après le théorème de la limite de la dérivée $f'(x) = 0$ et f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que f' soit continue en 0 et en 1. On pose, pour tout $x \in [0,1]$,

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que g soit continue sur $[0,1]$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que g soit dérivable sur $[0,1]$.

Solution :

1. Analyse : Supposons que g soit continue sur $[0;1[$

Alors g est continue en $\frac{1}{2}$

Donc $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} g(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} g(x) = g(\frac{1}{2}) = f(1)$

Sur $[0; \frac{1}{2}]$, g est continue car f l'est

donc $\lim\limits_{\frac{1}{2}^-} g = g(\frac{1}{2}) = f(1)$

Sur $]\frac{1}{2}; 1]$, g est continue donc

$\lim\limits_{\frac{1}{2}^+} g = f(0)$

La condition est donc que $f(0) = f(1)$

Synthèse

Sur $[0; \frac{1}{2}]$ et $]\frac{1}{2}; 1]$ g est continue car f l'est

En $\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{\frac{1}{2}^-} g = f(1) = f(0) = g(\frac{1}{2})$

$\lim\limits_{\frac{1}{2}^+} g = f(1) = f(0) = g(\frac{1}{2})$

donc g est continue.

2. Analyse : Supposons g dérivable.

$$\lim_{\frac{1}{2}^+} g' = \lim_{\frac{1}{2}^-} g'$$
$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ f'(0) & & f'(1) \end{array}$$

donc $f'(0) = f'(1)$

Synthèse $[0;1]$ un intervalle, $\frac{1}{2} \in [0;1]$

g continue sur I selon 1)

$f'(x) \xrightarrow[x \to a]{x \neq a} f'(0) = f'(1)$

Selon le théorème de la limite de la dérivé,

g est dérivable en $\frac{1}{2}$,

de plus g est dérivable sur $[0; \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}; 1]$

donc g est dérivable sur $[0; 1]$.

Martin
Kiriler.

Colle de la semaine 15

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x).$$

Que peut-on dire de f ?

Solution.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x).$$

Nous allons montrer que f est constante.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) : f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

On montre que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Initialisation à $n = 0$.

Clairement, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^0}\right)$.

$P(0)$ est vraie.

Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $P(n)$, i.e.

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Par hypothèse sur f,

$$f\left(2 \cdot \frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

Soit $f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.

$P(n+1)$ est donc vraie.

On conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Or, f est continue en 0. Par caractérisation séquentielle,

$$\frac{x}{2^n} \longrightarrow 0 \implies f\left(\frac{x}{2^n}\right) \longrightarrow f(0)$$

Soit $f(x) = f(0)$, i.e. f est constante. Le résultat est prouvé.

Titouan

D

Rapport de colle 16

Justifier que la fonction

$$f \left| \begin{array}{l}]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \ln(x) \end{array} \right.$$

est de Classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer ses dérivées itérées

$u : x \mapsto x^2$ $\quad \mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$

$v : x \mapsto \ln(x)$ $\quad \mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$

Donc, par la formule de Leibniz, f $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

Comme $\forall n \geqslant 3 \quad u^{(n)} = 0$

Soit $x \in]0;+\infty[$

$$f^{(n)} = u^{(0)} v^{(n)} + n\, u^{(1)} v^{(n-1)} + u^{(2)} v^{(n-2)} \times \frac{n(n-1)}{2}$$

$$f^{(n)}(x) = x^2 \, \mathrm{inv}^{(n-1)}(x) + 2nx \, \mathrm{inv}^{(n-2)}(x) + 2 \, \mathrm{inv}^{(n-3)}(x) \times \frac{n(n-1)}{2}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)! \times (-1)^{n-1}}{x^{n-2}} + \frac{2n \times (n-2)! \times (-1)^{n-2}}{x^{n-2}} + \frac{n(n-1)\,(n-3)!\,(-1)^{n-3}}{x^{n-2}}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}} \left[n(n-1) - 2n(n-2) + (n-1)(n-2) \right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}} \left[n^2 - n - 2n^2 + 4n + n^2 - n - 2n + 3 \right]$$

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-3} \times \frac{3(n-3)!}{x^{n-2}}}$$

Anaï D

Rapport de colle S16

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \cos(\sqrt{x})$, f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

Solution : Montrons que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ ie f est derivable sur $\mathbb{R}^+$ et que sa derivée est continue

On sait que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est derivable sur $\mathbb{R}^+_*$ et que la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est derivable sur $\mathbb{R}^+$

Montrons que f est derivable en 0.

Soit $x > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\cos(X) - 1}{X^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2} \\ \\ \sqrt{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \underset{\text{de limites}}{\overset{\text{composé}}{\Longrightarrow}} \quad \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

Ainsi f est derivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

On a donc

$$f' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Montrons que f' est continue en 0.

Soit $x > 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

Or $\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$

D'où $\quad f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2} = f'(0)$

Donc f' est continue en 0.
Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

Célia A — Colle de la semaine 16.

énoncé :

Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \end{array} \right.$ avec $\mathcal{D}$ un ensemble.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

On notera dorénavant f le prolongement par continuité de f en 0, définie sur $I = \mathcal{D} \cup \{0\}$.

3. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur I ?

Solution

1. Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}$.

. $x \mapsto \ln(x)$ est défini et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \ln(x) \end{array} \right.$

Montrons que g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par soustraction de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
g	$\|\|$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

Par caractérisation différentielle des fonctions croissantes et puisque $g(1) = 1$, g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est défini sur } \mathbb{R}_+^*.}$

2. Si f est prolongeable par continuité en 0, alors il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \ell$.
Vérifions s'il existe un tel ℓ.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} = \frac{\ln(x)}{\ln(x)\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{x}{\ln(x)} - 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \\ \ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{composition de limite} \\ \Longrightarrow \frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0.\end{array}$$

Ainsi, par opération sur les limites, $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -1$.

Donc, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$

On pose

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

3. $x \mapsto \ln(x)$ est continu sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc, par opération de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par opération sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Maintenant, nous cherchons à savoir si f est dérivable en 0.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} + 1}{x}$$

$$= \frac{x^2}{x - \ln(x)} = \frac{x^2}{\ln(x)\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = \frac{\frac{x - \ln(x)}{x} - \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln(x))^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2}.$$

Par opération sur les fonctions continues, f' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Maintenant, nous cherchons à savoir si f' est continue en 0.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2} = \frac{\frac{1}{\ln(x)} - 1}{\frac{x^2}{\ln(x)} - 2x + \ln(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 = f'(0).$$

Donc f' est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

1) Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$ on a
$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y-x|}$

2) Démontrer que la fonction racine définie sur $\mathbb{R}_+$
est continue mais non lipschitzienne

<u>Solution</u>

1) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$

Montrons $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y-x|}$

- Si $x = y$, clair
- Considérons $x < y$ (quitte à intervertir les places de x et y)

montrons $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$

Comme $y > x$, $\dfrac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{y-x}} = \dfrac{\sqrt{y-x}}{\underbrace{\sqrt{y} + \sqrt{x}}_{\geq 0}}$ $\left.\begin{array}{l} \leq \sqrt{y} \\ \geq \sqrt{y} \end{array}\right.$

Donc $\dfrac{\sqrt{y-x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \leq 1$

d'où $\dfrac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{\sqrt{y-x}} \leq 1$

$$\Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$$

Donc $\boxed{\forall (x;y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y-x|}}$

2) Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$ Montrons f continue sur $\mathbb{R}_+$

ie
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+ \ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$

Posons $\delta = \varepsilon^2$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $|x-a| \leq \delta \Rightarrow |x-a| \leq \varepsilon^2$

$\Rightarrow \sqrt{|x-a|} \leq \varepsilon$

$x \mapsto \sqrt{x}$ croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\underset{\text{1)}}{\Rightarrow} |\sqrt{x} - \sqrt{a}| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ $\boxed{\text{Donc } f \text{ continue sur } \mathbb{R}_+}$

Soit $k \in \mathbb{R}_{>0}$

Supposons f est k-lipschitzienne

i.e $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+$ $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$

$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x-y|$

Prenons $x = 0$

$\Rightarrow |\sqrt{y}| \leq k|y|$

$\Rightarrow \dfrac{1}{|\sqrt{y}|} \leq k|y|$ ($\lightning$)

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas } k\text{-lipschitzienne}}$

Rapport de Colle, Semaine 16

Wassim
M.

Exercice : on pose $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x} \end{array} \right.$

1) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donner son domaine de derivabilité et Determiner f^{-1}.

1) La fonction $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

La fonction $u : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1+e^x \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

Par consequent, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (quotient de deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$)

2) Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

donc f^{-1} est derivable. Puisque f est $\mathcal{C}^\infty$ alors f^{-1} est egalement $\mathcal{C}^\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)$ ~~est~~ > 0

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$f \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x(1+\frac{1}{e^x})} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}$$

donc $f \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

Ainsi f^{-1} est derivable sur $]0,1[$

$$f^{-1} \left| \begin{array}{l}]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \text{l'unique } x \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x) = y \end{array} \right.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = y$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^x}{1+e^x} = y$

$\Leftrightarrow e^x = y(1+e^x)$

$\Leftrightarrow e^x - ye^x = y$

$\Leftrightarrow e^x(1-y) = y$

$\Leftrightarrow e^x = \dfrac{y}{1-y}$

$y \in]0,1[$

$1-y \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{y}{1-y}\right)$

$y > 0$

Ainsi

$$f^{-1} \left| \begin{array}{l}]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) \end{array} \right.$$

2.12

Etudier la continuité de :
$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

Solution

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x$ donc $x - \lfloor x \rfloor \geq 0$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}$

•) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$f(a) = \lfloor a \rfloor + \sqrt{a - \lfloor a \rfloor}$

$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lfloor a \rfloor + \sqrt{a - \lfloor a \rfloor} = f(a)$

•) Soit $a \in \mathbb{Z}$

$f(a) = \lfloor a \rfloor + \sqrt{a - \lfloor a \rfloor} = a$

On a $\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x \to a^+]{} a$

et $\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x \to a^-]{} a - 1$

Donc $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} a + \sqrt{a - a} = a = f(a)$

$f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} a - 1 + \sqrt{a - (a-1)} = a = f(a)$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$

ELIOTT SV. ENONCÉ : SEMAINE 16.

Soit $P_0 = 1$, et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X+1)\dots(X+n-1)$.
Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} P_k(X) = P_n(X+1)$.

SOLUTION :

Par recurrence simple

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: " $\sum_{k=0}^{n} P_k(X) = P_n(X+1)$. "

Initialisation à $n=1$

$$P_1(X+1) = \frac{1}{1!}(X+1) = X+1$$

et $\sum_{k=0}^{1} P_k(X) = P_0(X) + P_1(X) = 1 + X$ ✓.

Heredité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tq $P(n)$ vraie. Montrons la propriété au rang $n+1$.

D'une part,

$$P_{n+1}(X+1) := \frac{1}{(n+1)!}(X+1)(X+2) \dots (X+n+1)$$

D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{n+1} P_k(X) = \sum_{k=0}^{n} P_k(X) + P_{n+1}(X)$$

HR

$$= P_n(X+1) + P_{n+1}(X)$$

$$= \frac{1}{n!}(X+1)(X+2)\dots(X+n) + \frac{1}{(n+1)!}X(X+1)\dots(X+n)$$

$$= (X+1)(X+2)\dots(X+n)\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}X\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}(X+1)(X+2)\dots(X+n)(X+n+1).$$ ✓

Tiguin, David

Colle de la semaine

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer $A^2 - 5A + 6I_2$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-2)(X-3)$

c. En déduire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A^n

a. $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$, $5A = \begin{pmatrix} 20 & -5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$, $6I_2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$A^2 - 5A + 6I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On sait que $\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$X^n = Q \underbrace{(X-2)(X-3)}_{B} + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$ ainsi

$X^n = Q(X-2)(X-3) + aX + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

On évalue en $X = 2$, puis en $X = 3$

$$\begin{cases} 2^n = Q \times 0 \times (-1) + 2a + b = 2a + b \\ 3^n = Q \times (-1) \times 0 + 3a + b = 3a + b \end{cases}$$

Par pivot de Gauß calculons les valeurs de a et b

$$\begin{cases} 3^n = 3a + b \\ 2^n = 2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} 3^n - 2^n = a & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 2^n = 2a + b \end{cases} \iff \begin{cases} 3^n - 2^n = a \\ 2^n - 2(3^n - 2^n) = b \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

donc $\begin{cases} a = 3^n - 2^n \\ b = 2^n(1+2) - 2 \times 3^n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{cases}$

le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-2)(X-3)$.
est $(3^n-2^n)X + 3\times 2^n - 2\times 3^n$

c. D'après b. on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = Q\underbrace{(A-2I_2)(A-3I_2)}_{0} + (3^n-2^n)A + 3\times 2^n I_2 - 2\times 3^n I_2$$

On remarque que $(A-2I_2)(A-3I_2) = A^2-5A+6I_2 = 0$ par a.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = (3^n-2^n)A + 3\times 2^n I_2 - 2\times 3^n I_2$$

Royan. 6   Colle de la semaine n°16

Exercice n°1 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que f' soit continue en 0 et en 1. On pose pour tout $x \in [0,1]$:

$$y(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in [0;\frac{1}{2}] \\ f(2x-1) & \text{si } x \in]\frac{1}{2};1] \end{cases}$$

1. Donner une CNS pour que y soit continue sur $[0;1]$
2. Donner une CNS pour que y soit dérivable sur $[0;1]$

Solution :

1. Montrons que y est C^0 en $y \in [0;\frac{1}{2}[$

On remarque $2y \in [0;1]$ et par continuité de f sur $[0;1]$ (car dérivable sur $[0,1]$), on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} 2x \underset{x \to y}{\longrightarrow} 2y \\ f(X) \underset{X \to 2y}{\longrightarrow} f(2y) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Composée de limites} \\ \Rightarrow f(2x) \underset{x \to 2y}{\longrightarrow} f(2y) \\ (f\ C^0 \text{ sur } [0,1]) \end{array}$$

Puisque $\forall x \in [0;\frac{1}{2}[\ y(x) = f(2x)$

On en déduit $y(x) \underset{x \to y}{\longrightarrow} y(y)$

Sur $]\frac{1}{2};1]$. Montrons que g est C^0 en $y \in]\frac{1}{2};1]$

On remarque que $2y-1 \in]0;1]$

De manière quasi-analogue à la partie précédente, on déduit :

$$f(2x-1) \underset{x \to y}{\longrightarrow} f(2y-1)$$

Ce qui nous livre $g(x) \underset{x \to y}{\longrightarrow} g(y)$

Néanmoins étudions la limite de g en $\frac{1}{2}$ (plus précisément sa continuité potentielle en $\frac{1}{2}$)

<u>Analyse :</u> Supposons g continue en $\frac{1}{2}$

$$2x \underset{x \to \frac{1}{2}}{\longrightarrow} 1$$

Par composée et continuité de f en 1 : $f(2x) \underset{x \to \frac{1}{2}}{\longrightarrow} f(1)$

Donc $\underbrace{g(x)}_{\substack{f(2x) \\ (x<\frac{1}{2})}} \underset{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x<\frac{1}{2}}}{\longrightarrow} f(1)$

$$2x-1 \underset{x \to \frac{1}{2}}{\longrightarrow} 0$$

Par composée et continuité de f en 0 : $f(2x-1) \underset{x \to \frac{1}{2}}{\longrightarrow} f(0)$

Puisque g est continue en $\frac{1}{2}$.

On obtient $f(0)=f(1)$ (condition dégagée dans l'analyse)

Synthèse : Supposons $f(1) = f(0)$

Montrons que g est C^0 en $\frac{1}{2}$

$$g(x) = f(2x) \xrightarrow[\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}]{} f(1)$$

$$g(x) = f(2x-1) \xrightarrow[\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}]{} f(0)$$

Or $f(0) = f(1)$ donc g est C^0 en $\frac{1}{2}$

2. Nous savons que :

- $\forall x \in [0; \frac{1}{2}]$ $f(2x) = g(x)$
- $\forall x \in]\frac{1}{2}; 1]$ $f(2x-1) = g(x)$
- f dérivable sur $[0;1]$

Nous en déduisons que g est dérivable sur $[0;1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$

Analyse : Supposons g dérivable en $\frac{1}{2}$

~~Nous savons que :~~

- ~~f est continue sur $[0;1]$~~
- ~~f est dérivable sur $[0;1]$~~

Considérons

$$\alpha \left| \begin{array}{l}]\frac{1}{2};1] \to [0;1] \\ x \mapsto 2x-1 \end{array} \right.$$

et $\quad \beta \left| \begin{array}{l} [0;\frac{1}{2}[\to [0;1[\\ x \mapsto 2x \end{array} \right.$

$$\circledast \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} f(2x-1) = 2f'(2x-1) \\ \frac{d}{dx} f(2x) = 2f'(2x) \end{array} \right.$$

$f\circ\alpha$ et $f\circ\beta$ sont bien définies

- $f\circ\alpha$ et $f\circ\beta$ sont dérivable sur $[0;1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et continue sur $[0;1[$ (Composée de fonctions dérivable)
- Par continuité de f' en 0 et en 1 et par $\circledast$:

$$2f'(2x-1) \underset{x\to\frac{1}{2}}{\to} 2f'(0)$$

$$2f'(2x) \underset{x\to\frac{1}{2}}{\to} 2f'(1)$$

Par théorème de la limite de la dérivée :

$$\frac{f(2x-1)-f(0)}{x-\frac{1}{2}} \underset{x\to\frac{1}{2}}{\to} 2f'(0)$$

et $\quad \frac{f(2x)-f(1)}{x-\frac{1}{2}} \underset{x\to\frac{1}{2}}{\to} 2f'(1)$

Or g dérivable en $\frac{1}{2}$ (hypothèse) donc g C^0 en $\frac{1}{2}$

On déduit de 0, 1 que $g(\frac{1}{2}) = f(0) = f(1)$

Donc :

$$\frac{g(x) - g(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} \xrightarrow[x<\frac{1}{2}]{x \to \frac{1}{2}} 2f'(1)$$

$$\frac{f(2x) - f(1)}{x - \frac{1}{2}}$$

et $$\frac{g(x) - g(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} \xrightarrow[x>\frac{1}{2}]{x \to \frac{1}{2}} 2f'(0)$$

$$\frac{f(2x-1) - f(0)}{x - \frac{1}{2}}$$

Or g dérivable en $\frac{1}{2}$ donc $f'(1) = f'(0)$.

<u>Synthèse</u> : Supposons $f'(1) = f'(0)$

$$\frac{g(x) - g(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} \xrightarrow[x>\frac{1}{2}]{x \to \frac{1}{2}} 2f'(0)$$

$$\frac{f(2x-1) - f(0)}{x - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{g(x) - g(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} \xrightarrow[x<\frac{1}{2}]{x \to \frac{1}{2}} 2f'(1)$$

$$\frac{f(2x) - f(1)}{x - \frac{1}{2}}$$

Or $f'(0) = f'(1)$ donc g dérivable en $\frac{1}{2}$

Louis .D

Semaine de colles n°16

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^1 \text{ sur } [-1, 1] \text{ et deux} \\ \text{fois dérivables sur }]-1, 1[. \\ f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(-1) = -1 \\ \\ \text{Montrer qu'il existe } c \in]-1, 1[\quad f''(c) = 0.\end{array}}$

Solution f est $\mathcal{C}^0$ sur $[-1, 0]$ et dérivable sur $]-1, 0[$, d'après le <u>théorème des accroissements finis</u> :

$$\exists c_1 \in]-1, 0[\quad f'(c_1) = \frac{f(-1) - f(0)}{-1 - 0} = 1$$

De même :

$$\exists c_2 \in]0, 1[\quad f'(c_2) = \frac{f(0) - f(1)}{0 - 1} = 1$$

On remarque que $c_1 < c_2$.
De plus $f'(c_1) = f'(c_2)$. f' est de plus $\mathcal{C}^0$ sur l'intervalle $[c_1, c_2]$ car f est $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$.
f' est dérivable sur $]c_1, c_2[$ car f est deux fois dérivable sur $]-1, 1[$.

<u>Par le théorème de Rolle :</u>

$$\boxed{\exists c \in]c_1, c_2[\subset]-1, 1[\quad f''(c) = 0}$$

Jules R. Colle de la semaine 16

> Exercice : Montrer que pour tout $x, y \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$
> $$|\tan(x) - \tan(y)| \geqslant |x - y|$$

Solution :

Soit $(x, y) \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x > y$.

On a :

$\tan$ $\mathcal{C}^1$ sur $]y ; x[$

$\tan$ $\mathcal{C}^0$ sur $[y ; x]$

Théorème des accroissements finis

$$\Rightarrow \exists c \in]y ; x[\quad \frac{\tan(x) - \tan(y)}{x - y} = 1 + \tan^2(c)$$

$$\Rightarrow \exists c \in]y, x[\quad \frac{\tan(x) - \tan(y)}{x - y} = \underbrace{1 + \tan^2(c)}_{\geqslant 1}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(x) - \tan(y)}{x - y} \geqslant 1$$

tan strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

$$\Rightarrow \frac{|\tan(x) - \tan(y)|}{|x - y|} \geqslant 1$$

$|x - y| > 0$

$$\Rightarrow |\tan(x) - \tan(y)| \geqslant |x - y|$$

Billy.G Semaine de Colle 16

Exercice 1 : Majorer l'erreur dans l'approximation $\sqrt{10001} \simeq 100$

On sait que $\sqrt{10\,000} = 100$

Majorons : $\sqrt{10\,001} - \sqrt{10\,000}$

Posons : $g \left| \begin{array}{l} [10000, 10001] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$

l'intervalle

- g $\mathcal{C}^0$ sur $[10000, 10001]$
- g dérivable sur $]10000, 10001[$

l'intervalle

D'après le théorème des accroissements finis : $\exists c \in]10000, 10001[$ $f'(c) = f(10001) - f(10000)$

D'où : $\exists c \in]10000, 10001[$ $\sqrt{10001} - \sqrt{10000} = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}$

Or : $c > 10000$

$\underset{\sqrt{\,}\nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}{\Rightarrow} \sqrt{c} > 100$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{c}} < \dfrac{1}{200}$

Donc : $\sqrt{10\,001} - \sqrt{10\,000} < \dfrac{1}{200}$

Pierre T. Colle de la semaine 16

EXERCICE 5 — Soient $a < b$ des réels, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que, pour tout $x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]a,b[$, $g(x) \neq g(a)$.
2. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
3. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to b^-]{} \ell$. Démontrer que $\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} \xrightarrow[x\to b^-]{} \ell$.
4. Étudier la limite de $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arccos}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ lorsque x tend vers 1^-.

Solution :

1. Par l'absurde supposons qu'il existe $x \in]a,b[$ tel que $g(x) = g(a)$. g est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,x]$ (restreinte), dérivable sur $]a,x[$ et $g(a)=g(x)$, donc d'après le théorème de Rolle : $\exists c \in]a,x[$ $g'(c) = 0$ ↯.

2. Soit $\Delta \left| \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) \dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} - f(x) \end{array} \right.$

$$\Delta(a) = \frac{g(a)(f(a)-f(b)) - f(a)(g(a)-g(b))}{g(a)-g(b)} = \frac{-g(a)f(b)+f(a)g(b)}{g(a)-g(b)}$$

$$\Delta(b) = \frac{g(b)(f(a)-f(b)) - f(b)(g(a)-g(b))}{g(a)-g(b)} = \frac{g(b)f(a)-f(b)g(a)}{g(a)-g(b)} = \Delta(a)$$

Δ est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$ (restreinte), dérivable sur $]a,b[$ et $\Delta(a) = \Delta(b)$ donc d'après le théorème de Rolle : $\exists c \in]a,b[$ $\Delta'(c) = 0$

$$\exists c \in]a,b[\quad g'(c) \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} - f'(c) = 0$$

$$\exists c \in]a,b[\quad \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

3. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in [\max(a, b-\delta), b[\quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in [\max(a, b-\delta), b[$.

D'après la question précédente on sait que :

$$\exists c \in]x, b[\quad \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

donc $\left| \dfrac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} - \ell \right| = \left| \dfrac{f'(c)}{g'(c)} - \ell \right| \leq \varepsilon$

4. Soit $x \in [0,1[$.

$$\frac{\mathrm{Arccos}'(x)}{\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{2\sqrt{1+x^2}}{-2x} = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 1^-]{} 1$$

donc d'après la question précédente :

$$\frac{\mathrm{Arccos}(x) - \mathrm{Arccos}(1)}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-1^2}} = \frac{\mathrm{Arccos}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[x \to 1^-]{} 1$$

Raphaël Mouchonnet

colle semaine n°16

Enoncé:

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer les propriétés suivantes.
Les réciproques sont-elles vraies ?

a. f pair $\Rightarrow f'$ impaire

b. f impair $\Rightarrow f'$ pair

c. f périodique $\Rightarrow f'$ périodique

Solution:

a. Supposons f pair. Soit $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = f(-x)$

$\underset{\text{unicité de la dérivé}}{\Longrightarrow}$ $f'(x) = -f'(-x)$

$\Rightarrow$ f' est impaire

b. Supposons f impair. Soit $x \in \mathbb{R}$

$-f(x) = f(-x)$

$\Rightarrow -f'(x) = -f'(-x)$

$\Rightarrow f'$ est paire

c) Supposons f périodique de périodicité $m \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x+m)$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(x+m)$$

$\Rightarrow f'$ est n- périodique

Étude des réciproque :

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons f' est impair

On pose $\Delta \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) - f(-x) \end{array} \right.$

$\Delta' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f'(x) + f'(-x) \end{array} \right.$

Or $-f'(x) = f'(x)$ donc $\Delta'(x) = 0$

Ainsi Δ est constante

Em particulier pour $x = 0$

$\Delta(0) = 0$.

Donc $f(x) = f(-x)$ donc f est paire

b. La fonction $f \mid x \longrightarrow \sin(x) + 1$ n'est pas impaire pourtant sa dérivé est paire

c. La fonction $f \mid x \longrightarrow \sin(x) + x$ n'est pas périodique, pourtant sa dérivé l'est.

MANGIACOMINI
Aurélien

Semaine de Colle n° 16

Exercice 1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

1. Justifier que M existe et est fini.
2. A quel type de fonction f correspond le cas $M = 0$? Dans la suite on suppose que $M > 0$.
3. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$ il existe $c_x \in]a, b[$ tel que :

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x).$$

(*On pourra introduire la fonction* $g : t \mapsto f(t) - \frac{A}{2}(t-a)(t-b)$ *avec* A *tel que* $g(x) = 0$.)

4. En déduire que $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(x-b)$ puis que $|f'(a)| \leq \frac{M}{2}(b-a)$.

suite

Az

1) f est $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ donc f'' est $\mathscr{C}^0$ sur $[a,b]$.

Selon le théorème des bornes atteintes $\exists (x_m, x_M) \in [a,b]^2$ $\forall x \in [a,b]$ $f''(x_m) \leq f''(x) \leq f''(x_M)$

Donc pour $M = \max(|f''(x_m)|, |f''(x_M)|)$

On a $\forall x \in [a,b]$ $|f''(x)| \leq M$.

L'ensemble $\{|f''(x)| : x \in [a,b]\}$ est non vide car $|f''(a)|$ est dedans et majoré par M.

Donc $M = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ existe.

①

2) Si $M=0$ donc $\forall x \in [a,b]$ $0 \leq |f''(x)| \leq 0$

ie $f''(x) = 0$. On conclut que f est un polynome de degré 1.

3) On prend $A = \frac{2}{(x-a)(x-b)} f(x)$, $x \in]a,b[$

On a $g(x) = f(x) - \frac{\cancel{2}\cancel{(x-a)}\cancel{(x-b)}}{\cancel{2}\cancel{(x-a)}\cancel{(x-b)}} f(x)$

$= 0$.

On a ; g $\mathcal{C}^0$ sur $[a,x]$ dérivable sur $]a,x[$ (thm d'opérations)

$g(a) = f(a) = 0$ et $g(x) = 0$

Donc selon le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a,x[$ tq $g'(c_a) = 0$.

De manière analogue on prouve l'existence de $c_b \in]x,b[$ tq $g'(c_b) = 0$

Finalement comme f est $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ donc

g' $\mathcal{C}^0$ sur $[c_a, c_b]$ dérivable sur $]c_a, c_b[$ (thm d'opérations)

$g'(c_a) = g'(c_b) = 0$

Donc selon le théorème de Rolle, $\exists$ $c_x \in]c_a, c_b[$ tq $g''(c_x) = 0$!

MANGIACOMINI
Amélien

Comme on peut choisir x comme on veut lorsqu'on définit A dans $g : t \mapsto f(t) - \frac{(t-a)(t-b)}{(x-a)(x-b)} f(x)$

donc selon x, $\forall \varepsilon > 0 \quad c_x \in]a, a+\varepsilon[$
(pour $x \in a - \varepsilon$)

et $\forall \varepsilon > 0 \quad c_b \in]b-\varepsilon ; b[$

Donc $\forall x \in]a, b[, \ c_x \in]a, b[$.

Et comme $g'' : t \mapsto \underbrace{f''(t) - A}$

$$= f''(t) - \frac{2}{(x-a)(x-b)} f(x)$$

On a $\forall x \in]a, b[, \ \exists \ c_x \in]a, b[$ tq :

$$g''(c_x) = 0 \iff f''(c_x) = \frac{2}{(x-a)(x-b)} f(x)$$

$$\iff f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x)$$

4) Comme $\forall x \in]a, b[, \ f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x)$

et que $c_x \in]a, b[$ donc $|f''(c_x)| \leq M$ (Q1)

Donc $|f(x)| \leq \underbrace{|x-a||x-b|}_{1} \frac{M}{2}$

De plus $f(a) = f(b) = 0$ et $\left| \begin{array}{l} 1 \geq 0 \\ \text{pour } \left| \begin{array}{l} x = a \\ x = b \end{array} \right. \end{array} \right.$

Donc $\forall x \in [a, b] \ |f(x)| \leq \frac{M}{2} |x-a||x-b|$.

$\forall x \in [a,b]$, $\exists c_x \in]a,b[$; $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} \cdot f''(c_x)$

donc $f'(x) = \frac{f''(c_x)}{2} [2x - a - b]$

donc $|f'(x)| \leq \frac{M}{2} |2x - a - b|$

donc $|f'(x)| \leq \frac{M}{2} |a - b|$

comme $b > a$

donc $|a-b| = b-a$.

Bordes
Louis

Khôlle de la semaine 16

Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ tq $f(a)=f(b)=0$
1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Mq il existe $c \in]a,b[$ tq $f'(c)+\alpha f(c)=0$
2) Mq il existe $c \in]a,b[$ tq $f'(c)+cf(c)=0$

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$
on considère la fonction g :

$$g \left| \begin{array}{l} [a,b] \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)e^{\alpha x} \end{array} \right.$$

g est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $g(a)=g(b)$

Ainsi par le théorème de Rolle :
$\exists c \in]a,b[$ tq $g'(c)=0$

Comme $\forall x \in [a,b]$ $g'(x) = (f'(x)+\alpha f(x))e^{\alpha x}$

Ainsi au point c on a $(f'(c)+\alpha f(c))e^{\alpha c} = 0$
$e>0$ et $\underset{\text{intègre}}{\mathbb{R}} \Rightarrow f'(c)+\alpha f(c)=0$ $\square$

2) On considère la fonction $g \left| \begin{array}{l} [a,b] \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)e^{\frac{x^2}{2}} \end{array} \right.$

g est $\left| \begin{array}{l} \mathcal{C}^0 \text{ sur } [a,b] \\ \text{dér. sur }]a,b[\\ g(a)=g(b) \end{array} \right\}$ thm de Rolle $\Rightarrow \exists c \in]a,b[$ tq $g'(c)=0$

Comme $\forall x \in [a,b]$ $g'(x) = (f'(x)+xf(x))e^{\frac{x^2}{2}}$

On a $f'(c)+cf(c)=0$ pour les mêmes raisons que 1/.

Ibrahim . K

Colle de la Semaine 16.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ tq

$f(a) = f(b) = 0$

on pose $M = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

1_ justifier que M existe et est fini

2_ à quelle type de fonction f correspond le cas où $M = 0$?

on suppose $M > 0$

3. Soit $x \in [a, b]$ et $g_x : t \longrightarrow f(t) - \frac{A}{2}(t-a)(t-b)$ avec

A tq $g(x) = 0$

Mq $\exists\ c_x \in]a, b[$

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x)$$

1_ puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors f'' est de classe $\mathcal{C}^0$ ainsi on :

. $f'' : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$

avec $[a, b]$ segment ainsi par Théorème des Bornes atteintes f'' est Bornée ainsi

$\exists\ M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in [a, b]$

$|f''(x)| \leq M$

ainsi l'ensemble des valeurs de $|f''|$ sur $[a, b]$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée donc

$\sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ existe et est fini.

2)_ on a $\forall x \in [a, b] \quad |f''(x)| \leq M$

ainsi si $M = 0$ on a :

$\forall x \in [a, b] \quad : \quad f''(x) = 0$

ainsi f sera une fonction affine.

3) on considère les deux segments $[a,x]$ et $[x,b]$

- g_x est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,x]$ qui est segment (Somme et Produit de fonctions $\mathcal{C}^0$)
- g_x est dérivable sur $]a,x[$ (Somme et produit de fonctions dérivables)
- $g_x(a) = g_x(x) = 0$

ainsi par Théorème de Rolle :

$\exists\, c_1 \in]a,x[\quad g_x'(c_1) = 0$

de même pour le segment $[x,b]$ par Rolle

$\exists\, c_2 \in]x,b[\quad g_x'(c_2) = 0$

ainsi on considère le segment $[c_1 ; c_2]$

- g_x' est $\mathcal{C}^0$ sur $[c_1, c_2]$
- g_x' est dérivable sur $]c_1, c_2[$

(Somme et produit de fonction $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$)

- $g_x'(c_1) = g_x'(c_2) = 0$

ainsi par Théorème de Rolle :

$\exists\, c_x \in]c_1, c_2[\quad g_x''(c_x) = 0$

or $g_x''(c_x) = f''(c_x) - A = 0$

ainsi $f''(c_x) = A$

or

$g(x) = 0$

donc

$f(x) = \frac{A}{2}(x-a)(x-b)$

donc $f(x) = f''(c_x)\frac{(x-a)(x-b)}{2}$ avec $c_x \in]a,b[$.

Youssef B Colle de la semaine 16

Exercice 1

Soit $u_0 \in [0,1]$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{1+e^{u_n}}$.

1. Montrer que (u_n) est à valeur dans $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \dfrac{e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}}$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{4^n}$.

Solution :

1) On résonne par reccurence simple :
Mq $\forall m \in \mathbb{N}$ $P(m) =$ "(u_m) est à valeur dans $[0,1]$"

(I) pour $m = 0$, $u_0 \in [0,1]$

(H) Soit $m \in \mathbb{N}$ tq $P(m)$ est vraie ;
par HR : $0 \leqslant u_m \leqslant 1$

$\underset{e \nearrow}{\Longrightarrow} 0 < 1 \leqslant e^{u_m} \leqslant e$ ①

et $2 \leqslant e^{u_m} + 1 \leqslant e + 1$

$\Longrightarrow 0 \leqslant \dfrac{1}{e+1} \leqslant \dfrac{1}{e^{u_m}+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ ②

① × ② ; $0 \leqslant \dfrac{1}{e+1} \leqslant \dfrac{e^{u_m}}{e^{u_m}+1} \leqslant \dfrac{e}{2} \leqslant 1$

Donc $0 \leqslant u_{m+1} \leqslant 1$

$P(m+1)$ est vraie

3)b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$P(n) = \text{"} |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{4^n} \text{"}$

(I) pour $n = 0$,

$0 \leqslant u_0 \leqslant 1$ et $-1 \leqslant -\alpha \leqslant 0$

$\Rightarrow -1 \leqslant u_0 - \alpha \leqslant 1$

$\Rightarrow 0 \leqslant |u_0 - \alpha| \leqslant 1$

Donc $|u_0 - \alpha| \leqslant 1 = \frac{1}{4^0}$

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $P(n)$ vraie

D'après 3)a) :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

Or, par HR, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{4^n}$

Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4} |u_n - \alpha| \leqslant \underbrace{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}}_{\frac{1}{4^{n+1}}}$

$P(n+1)$ vraie

Léa Nan

Colle de la semaine 16

Énoncé

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

tel que $f(0)=0$ et $f' > 0$.

Démontrer qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$,

$f(x) \geq m x$

Solution

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

$f(0) = 0$ et $f' > 0$.

Supp $x \in]0,1]$ i.e. $x > 0$.

On cherche à minorer $\frac{f(x)}{x}$

On sait f $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

donc f' $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$

Par théorème des bornes atteintes

$\exists (x_m, x_M) \in [0,1]$ $\forall x \in [0,1]$

$0 < f'(x_m) \leq f'(x)$

car $f' > 0$

Or f $\mathcal{C}^0$ sur $[0,x]$

f dérivable sur $]0,x[$

Par théorème des accroissements finis :

$\exists c \in]0,x[$ $f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$ (car $f(0)=0$)

On a donc $0 < \underbrace{f'(x_m)}_{=: m} \leq \underbrace{f'(c)}_{= \frac{f(x)}{x}}$

$\square$

Paul C. Colle de la semaine 16

Montrer que si un polynôme de degré n a n racines distinctes, alors sa dérivée a $n-1$ racines distinctes

Solution:

On note P un polynome de degré n avec n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et P' sa dérivée de degré $n-1$. On note β les racines de P'.

On peut supposer $\alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_n$.

Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$, P est continu et dérivable sur $[\alpha_k; \alpha_{k+1}]$ et $P(\alpha_k) = P(\alpha_{k+1}) = 0$

Le théorème de Rolle livre alors :

$$\exists \beta_k \in]\alpha_k; \alpha_{k+1}[, \quad P'(\beta_k) = 0$$

On obtient ainsi $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ racines distinctes de P'

$$\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-2} < \alpha_{n-1} < \beta_{n-1} < \alpha_n$$

P' a donc $n-1$ racines distinctes.

Colle Semaine 16

Alexandre M

Exercice 1.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

Pensez-vous qu'elle soit de classe C^∞

$$e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \qquad -\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$$

donc f C^0 sur $\mathbb{R}$

De plus f dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ (fct constante)

et f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

On a

$$f' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Or $\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 \left(e^{-\frac{1}{x}}\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ (cc)

D'après le théorème de la limite de la dérivée, f dérivable en 0 et f' C^0 en 0

1

avec $f'(0) = 0$

donc $f' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$

De manière analogue, d'après (*) f' $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et f' dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$f'' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\frac{1}{\cancel{x^2}} e^{-\frac{1}{x}} \times \cancel{x^2} - e^{-\frac{1}{x}} 2\cancel{x}}{\cancel{x^4}\,3} \end{cases} \end{array} \right.$

$$= \frac{-2e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} \quad \text{si } x > 0$$

Or $\dfrac{-2e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} = -2\left(\dfrac{1}{x}\right)^3 \times e^{\left(-\frac{1}{x}\right)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ (cc)

donc $f''(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, f' est dérivable en 0 avec $f''(0) = 0$ et f'' $\mathcal{C}^0$ en 0

donc $f'' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{-2e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$

est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$

f est donc de classe $\mathcal{C}^2$. On répète cette démarche $k \in \mathbb{N}^*$ fois nous montre qu'elle est $\mathcal{C}^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Lina . A

Colle de la semaine 15

Énoncé :
Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right)$

Solution :

Posons $f : x \longmapsto xe^{1/x}$

- f est continue sur $[x, x+1]$ segment
- f est dérivable sur $]x, x+1[$ intervalle.

Par le théorème des accroissements finis, il existe un $c_x \in]x, x+1[$ tel que
$$f'(c_x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x}$$
Donc
$$e^{1/c_x}\left(1 - \frac{1}{c_x}\right) = (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{1/x}$$

Comme $c_x > x$

Par lemme de minoration $c_x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{c_x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \\ e^{1/X} \xrightarrow[X \to 0]{} 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow e^{1/c_x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \text{ [composition de limite]}$$

et

$$1 - \frac{1}{c_x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Donc par opérations sur les limites $e^{1/c_x}\left(1 - \frac{1}{c_x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

Ainsi $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right) = 1}$

Maximilien T   Colle de la Semaine 15

> Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a<b$.
> Montrer que pour toute fonction f dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f(b)$ et $f'(a)=0$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

<u>Solution</u> Soit f dérivable sur $[a,b]$, $f(a)=f(b)$ et $f'(a)=0$

Considérons $g \left| \begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right.$

f est continue sur $[a,b]$ donc g est continue sur $]a,b]$

De plus $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a^+]{} f'(a) = 0 = g(a)$

Donc g est <u>continue sur $[a,b]$</u> et <u>dérivable sur $]a,b[$</u>

Et $g(a) = g(b) = 0$
$(f(a)=f(b))$

Ainsi par le théorème de Rolle :

$\exists c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$

Or $\forall x \in]a,b[$ $g'(x) = \dfrac{1}{x-a}\left(f'(x) - \left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\right)$

Donc

$$g'(c) = 0 \Rightarrow \boxed{f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}}$$

Hugo D. Semaine n°16

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ dans $]0,1[$ tels que

$$f'(x_1) + f'(x_2) + \cdots + f'(x_n) = n.$$

Solution Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}} = n\left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$= n\left(f\left(\frac{n}{n}\right) - f(0)\right) = n f(1) = n$$ (Sommes télescopiques)

Or $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $0 \leq \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \leq 1$

Donc f continue sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$

dérivable sur $\left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$

D'après le théorème des accroissements finis :
$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$: $\exists c_k \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\subset]0,1[$

tel que $f'(c_k) = \dfrac{f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}}$

Donc $n = \sum_{k=0}^{n-1} f'(c_k)$

Léon Sibout — Ennoncé — Semaine 16

Démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y-x|}$. Démontrer ensuite que la fonction racine définie sur $\mathbb{R}_+$ est continue mais non lipschitzienne.

Solution

Soit $y \in \mathbb{R}_+$

Pour $x = y$, on a $0 \leq 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $x < y$ (le cas $y < x$ est analogue)

$$\frac{\sqrt{y-x}}{\underbrace{\sqrt{y}-\sqrt{x}}_{\neq 0}} = \frac{\sqrt{y-x}\,(\sqrt{y}+\sqrt{x})}{y-x} = \frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{y-x}} = \frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{(\sqrt{y}+\sqrt{x})(\sqrt{y}-\sqrt{x})}} = \sqrt{\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}} \geq 1$$

donc $\sqrt{y-x} \geq \sqrt{y} - \sqrt{x}$

Soit $y \in \mathbb{R}_+$

Soit $\varepsilon > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ : |y-x| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \sqrt{|y-x|} \leq \varepsilon$

$\Rightarrow |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \varepsilon$

donc $\sqrt{\cdot}$ est continue en y.

donc $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

Supposons que $\sqrt{\cdot}$ est lipschitzienne.

$\exists k \in \mathbb{R}_+^*$:

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+$:

$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq k|x - y|$

$x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n}} \leq k \cdot \frac{1}{n}$

$y = 0$ donc $\sqrt{n} \leq k$

donc $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par k ⨯.

donc $\sqrt{\cdot}$ n'est pas lipschitzienne.

Antoine B. — colle de la semaine 16.

> Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0;1[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c$.

Une Solution :

Considérons la fonction suivante :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x. \end{array} \right.$$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c)$$

f est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$

et $f(0) = 0$

$f(1) = 0 = f(0)$.

D'après le théorème de Rolle,

$\exists y \in]0;1[, \ f'(y) = 0$

$$\boxed{\text{ie: } 4ay^3 + 3by^2 + 2cy = a+b+c}$$

Colle de la semaine 16

Adam M.

EXERCICE 5 — Soient $a < b$ des réels, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que, pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]a, b[$, $g(x) \neq g(a)$.
2. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Solution :

1. Soit $x \in]a,b[$

g est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,x]$ et est dérivable sur $]a,x[$ intervalles

D'après le théorème des accroissements finis

$\exists c \in]a,x[\quad g'(c) = \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0$

Donc $g(x) \neq g(a)$

2. Soit $h : x \longrightarrow f(x) - \dfrac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} g(x)$

h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

De plus $h(a) = \dfrac{g(a)f(b) - g(b)f(a)}{g(a) - g(b)} = h(b)$

D'après le théorème de Rolle :

$\exists c \in]a,b[\quad g'(c) = 0$

Donc $f'(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} g'(c)$

Donc $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$ car $\forall x \in]a,b[\; g'(x) \neq 0$

Ahmed Amine

Colle de la semaine 16

Énoncé

Mq $|\tan(x) - \tan(y)| \geq |x-y|$

Solution:

Soit $(X, Y) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[^2$

Posons $X = \mathrm{Arctan}(x)$ et $Y = \mathrm{Arctan}(y)$

Mq $|x-y| \geq |\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)|$

ie $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)| \leq |x-y|$

ie Arctan est 1-lip

On a:

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

D'où $\left|\frac{1}{1+x^2}\right| \leq 1$

car $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 < x^2 < \frac{\pi^2}{4}$

$\Rightarrow 1 < 1+x^2 < \frac{4+\pi^2}{4} \Rightarrow \frac{4}{4+\pi^2} < \frac{1}{1+x^2} < 2$

Alors $1 > \left|\frac{1}{1+x^2}\right| > \left|\frac{4+\pi^2}{4}\right| \Rightarrow \left|\frac{1}{1+x^2}\right| < 2$

Donc $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)| \leq |x-y|$

d'où $|X - Y| \leq |\tan(X) - \tan(Y)|$