Louis Guillaume S. — Colle de la semaine 15

2.4

Soit $f : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ de classe C_1 sur $[-1,1]$, deux fois dérivable sur $]-1,1[$ telle que : $f(-1) = -1, f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $f''(c) = 0$.

Solution : Soit $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, cela signifie qu'elle est dérivable et que sa dérivée est continue sur $[-1;1]$.

Donc f est dérivable sur $]-1;0[$ et $]0;1[$

D'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists \alpha_1 \in]-1;0[\quad \frac{f(-1)-f(0)}{-1-0} = \underline{f'(\alpha_1) = 1}$$

$$\exists \alpha_2 \in]0;1[\quad \frac{f(0)-f(1)}{0-1} = \underline{f'(\alpha_2) = 1}$$

De plus, f est deux fois dérivable sur $]-1;1[$, donc nous pouvons dériver f' sur $]-1;1[$. Comme f' est $\mathcal{C}^0$ sur $[-1;1]$, nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis tel que

$$\exists c \in]-1;1[\quad \frac{\overbrace{f'(\alpha_1) - f'(\alpha_2)}^{0}}{\underbrace{\alpha_1 - \alpha_2}_{\neq 0}} = \boxed{f''(c) = 0}$$

puisque
$\alpha_1 \in]-1;0[$
$\alpha_2 \in]0;1[$

Leçon 5 Semaine 16

Enoncé

Soit f une fonction réelle continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$

1) Montrer que pour tout $n \geq 2$ il existe $c_n \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ tel que $f(c_n) = f(c_n + \frac{1}{n})$

2) Donner une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$ mais $f(x)$ n'est jamais égale à $f(x+\frac{2}{n})$

Preuve Soit $n \geq 2$.

Soit $\Delta \left| \begin{array}{l} [0, 1-\frac{1}{n}] \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) - f(x+\frac{1}{n}) \end{array} \right.$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

$$= f(0) - f(1)$$

$$= 0.$$

Si, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\Delta(\frac{k}{n}) = 0$ alors $c_n = \frac{1}{n}$ convient

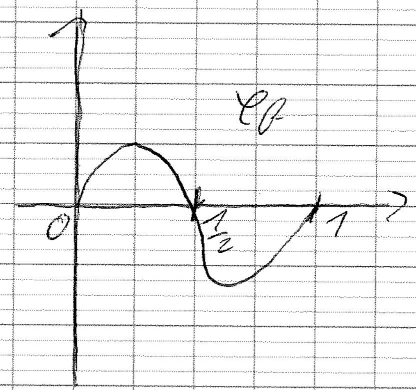
Si il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\Delta(\frac{k}{n}) > 0$ alors il existe $q \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\Delta(\frac{q}{n}) < 0$.

Δ est continue sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$ (somme de deux fonctions continues)

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe c_n entre $\frac{q}{n}$ et $\frac{k}{n}$ tel que $\Delta(c_n) = 0$

donc il existe $c_n \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$
tel que $f(c_n) = f(c_n + \frac{1}{n})$

2)



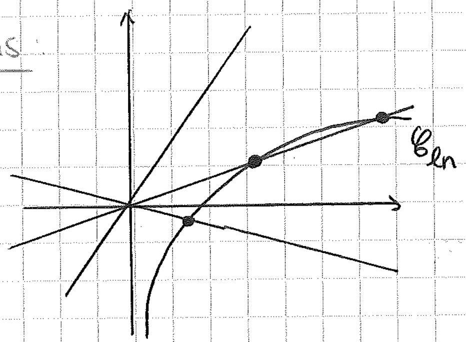
$\forall x \in]0, \frac{1}{3}]$ $f(x) > 0$.
$\forall x \in [\frac{2}{3}, 1[$ $f(x) < 0$
donc il n'existe pas c_n tel que
$f(c_n) = f(c_n + \frac{2}{3})$.

ELIOTT S.V. ÉNONCÉ : SEMAINE 15

Soit $a \in \mathbb{R}$ déterminer le nombre de solutions à l'équation (E_a) $\ln(x) = ax$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_{>0}$

SOLUTION :

Conjecturons :



On suppose que l'équation (E_a) admet 0, 1 ou 2 solutions selon le signe et la valeur du paramètre a.

On pose : $\Delta_a \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x) - xa \end{array} \right.$ et on cherche les valeurs de $x \in \mathbb{R}_{>0}$ en lesquelles Δ_a s'annule. On procède par disjonction de cas selon le signe de a.

Cas 1 : $a = 0$

$(E_a) \iff \ln(x) = 0$. $Sol_{(E_a), a=0} = \{1\}$ (clairement).

Cas 2 : $a > 0$

On étudie la fonction Δ_a, dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_{>0}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$, $\Delta_a'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$

$\Delta_a'(x)$ dépend donc du signe de $1 - ax$, car $x > 0$.

Ainsi, $1 - ax > 0$

$\iff \quad 1 > ax$

$\iff \quad \frac{1}{a} > x \qquad a > 0.$

<u>Il vient :</u>

x	0		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
$\Delta'_a(x)$		$+$	0	$-$	
Δ_a		$\nearrow$		$\searrow$	

Le nombre de solutions dépend donc du signe de $\Delta_a(\frac{1}{a})$.

$\Delta_a(\frac{1}{a}) = \ln(\frac{1}{a}) - \frac{1}{a} \times a = \ln(\frac{1}{a}) - 1 = -\ln(a) - 1.$

$\rightsquigarrow \quad -\ln(a) - 1 > 0 \iff -\ln(a) > 1 \qquad \times(-1) < 0$

$\iff \ln(a) < -1 \qquad e \nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

$\iff a < e^{-1}$

$\iff a < \frac{1}{e}$

Trois sous-cas se dégagent :

<u>Sous-cas 1 : $a \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$</u>

Alors $\Delta_a(\frac{1}{a}) > 0$.

La fonction : $\Delta_a^+ \left| \begin{array}{l} \left]0, \frac{1}{a}\right] \longrightarrow \left]-\infty, \Delta_a(\frac{1}{a})\right] \\ x \longmapsto \Delta_a(x) \end{array}\right.$

est bijective et strictement croissante et atteint son maximum en $\Delta_a^+(\frac{1}{a}) > 0$. Il existe donc une unique sol $x_+ \in \mathbb{R}_{>0}$ tq $\Delta_a^+(x_+) = 0$

La fonction : $\Delta_a^- \quad \left[\frac{1}{a}, +\infty\right[\longrightarrow \left[\Delta_a(\frac{1}{a}), -\infty\right[$

$x \longmapsto \Delta_a(x)$

est bijective et strictement décroissante et atteint son max en $\Delta_a^-(\frac{1}{a}) > 0$. Il existe donc une unique sol $x_- \in \mathbb{R}_{>0}$ tq

ELLIOTT S.V.

$\Delta_a(x) = 0$.

Ainsi, si $a \in]0, \frac{1}{e}[$, (E_a) admet deux solutions x_-, x_+.

Sous-cas 2 : $a = \frac{1}{e}$

Alors $\Delta_a(\frac{1}{a}) = 0$, et par continuité et variations, Δ_a ne s'annule qu'en $\frac{1}{a}$, i.e. (E_a) admet une unique solution x_0.

Sous cas 3 : $a \in]\frac{1}{e} ; +\infty[$

Alors $\Delta_a(\frac{1}{a}) < 0$, et par continuité et variations, Δ_a ne s'annule jamais, i.e. $Sol_{(E_a)} = \emptyset$.

$\leadsto$ Conclusion du cas 2 : $a > 0$.

$a \in]0; \frac{1}{e}[$, $\quad Card(Sol_{(E_a)}) = 2$

$a = \frac{1}{e}$, $\quad Card(Sol_{(E_a)}) = 1$

$a \in]\frac{1}{e}, +\infty[$, $\quad Card(Sol_{(E_a)}) = 0$.

Cas 3 : $a < 0$

On reprend comme au cas 2, en étudiant Δ_a. On sait que Δ'_a dépend du signe de $1 - ax$.

Ainsi, $1 - ax > 0$

$\iff 1 > ax$

$\iff \frac{1}{a} < x$ $\quad a < 0$.

Comme $a < 0$, cela est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Il vient

x	0		$+\infty$
$\Delta'_a(x)$		$+$	
Δ_a		$\nearrow$	

Le nombre de solutions dépend donc de la limite de Δ_a en 0 et $+\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$, $\Delta_a(x) = \ln(x) - xa$

et donc $\Delta_a(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} -\infty$

et alors $\Delta_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ $(a < 0)$

Ainsi, la fonction

$$\hat{\Delta}_a \quad \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow &]-\infty, +\infty[\\ x & \longmapsto & \ln(x) - xa \end{array} \quad \text{est bijective}$$

sur $\mathbb{R}_{>0}$. L'equation $\hat{\Delta}_a(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_{>0}$ admet une unique solution.

Tous les cas ont été analysés, on peut en tirer la conclusion suivante à propos du nombre de solutions de l'équation (E_a) :

- si $a < 0$, $\mathrm{Card}(Sol_{(E_a)}) = 1$, l'equation admet une unique sol
- si $a = 0$, $Sol_{(E_a)} = \{1\}$ et l'équation admet une unique sol
- si $a > 0$, on distingue plusieurs cas :
  - ↳ si $a \in]0, \frac{1}{e}[$, $\mathrm{Card}(Sol_{(E_a)}) = 2$, l'equation admet 2 sol
  - ↳ si $a = \frac{1}{e}$, $\mathrm{Card}(Sol_{(E_a)}) = 1$, l'equation admet une unique sol
  - ↳ si $a \in]\frac{1}{e}, +\infty[$, $\mathrm{Card}(Sol_{(E_a)}) = 0$, l'equation n'a aucune sol.

Billy. 6

Semaine de
Colle 15

Exercice : Que dire d'une fonction continue de $[0; +\infty[$ dans lui-même telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$?

Solution:

On cherche les fonctions telles que $f \circ f = id$
On cherche les fonctions telles que ses fonctions soient les mêmes que leurs réciproques.
Les fonctions doivent alors être bijectives.

Si f est bijective et continue, elle est strictement monotone.

Supposons f strictement décroissante:

On pose: $f(0) = b$, avec $b \in [0, +\infty[$
D'où: $0 = f(b)$
Or: si f est $\searrow\searrow$, alors pour un $c \in [0, +\infty[$ tel que $b < c$
$f(c) < 0$ ↯

Supp f strictement croissante:
On pose $f(0) = b$, avec $b \in]0, +\infty[$
D'où: $0 = f(b)$
Or: si $f \nearrow\nearrow$, alors pour un $c \in [0, +\infty[$ tel que $c < b$, alors $f(c) < 0$ ↯

Nous avons prouvé que la fonction est croissante, continue et que $f(0) = 0$, seule la fonction identité vérifie ces conditions.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) - f(x) = x$

Solution :

Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) - f(x) = x$

Soit : $\forall k \in \mathbb{N} \quad P(k) =$ " $\forall x \in \mathbb{R} \quad f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \frac{x}{2^{k+1}}$ "

Initialisation : on sait : $\forall x \in \mathbb{R} \; f(2x) - f(x) = x$

En prenant $x \leftarrow \frac{x}{2}$, on a l'initialisation.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tels que $P(k)$ est vraie.

On prend $x \leftarrow \frac{x}{2}$, l'égalité est toujours vraie
d'où l'hérédité.

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) - f(x) = x$

donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \frac{x}{2^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$.

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$,

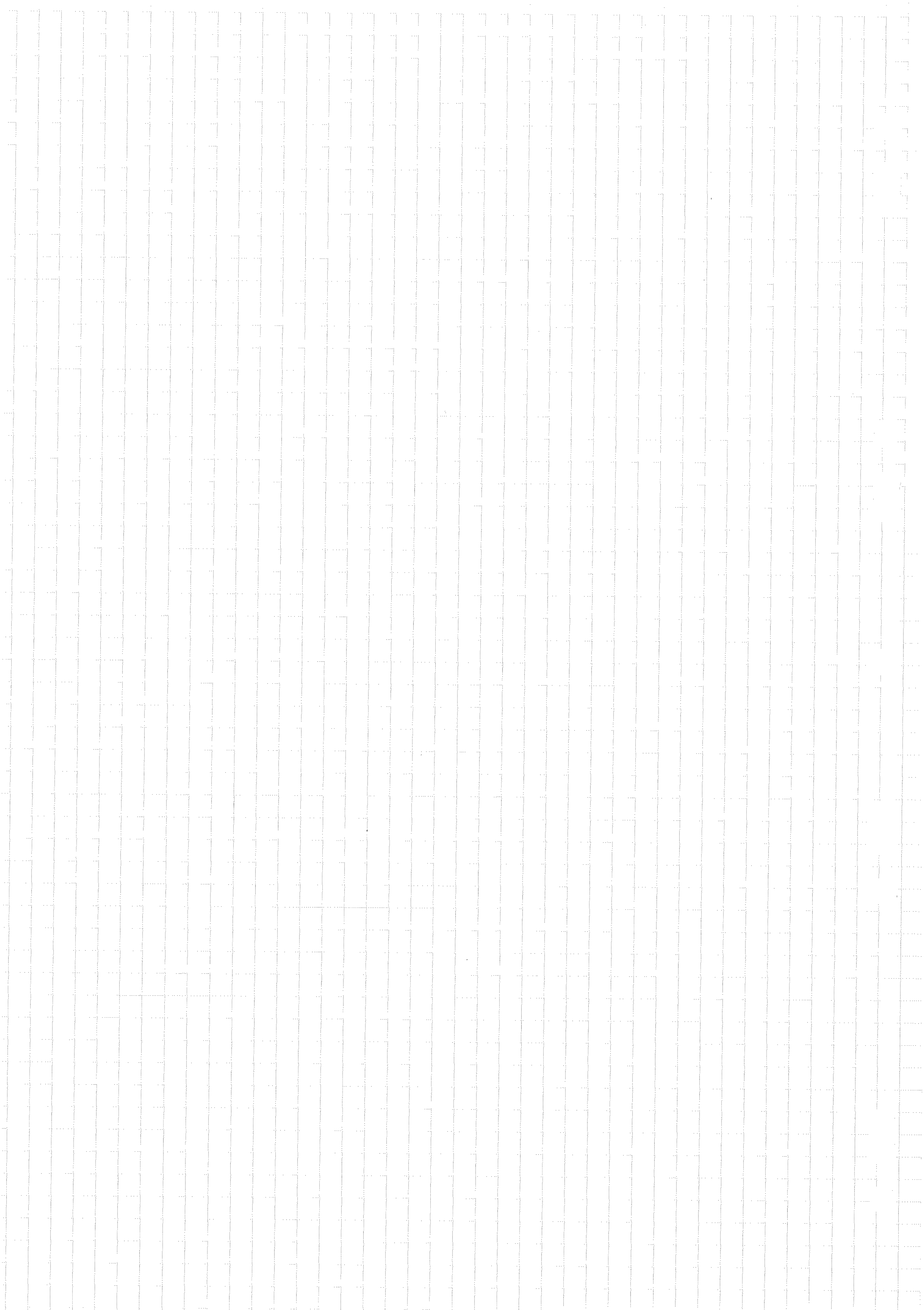
On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{2^{k+1}}$

$$\xrightarrow[\text{téléscopage}]{} \Rightarrow \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = x \, \frac{1}{2} \, \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Lorsque $n \to +\infty$: $\quad f(x) = f(0) + x$

On a donc pour candidat toutes fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0) + x$.

Synthèse : $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) - f(x) = f(0) + 2x - f(0) - x = x$



Maximilien. T.   Colle de la Semaine 15

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et positive. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, 1[$ telle que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.

Montrer que f possède au moins un point fixe.

Solution

Posons $\Delta \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - x \end{array} \right.$

$\Delta(0) \geq 0 \quad (f(0) \geq 0)$

Or nous savons que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$
$x \geq \alpha \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - \ell \right| \leq \varepsilon$

Ainsi en posant $\varepsilon = 1 - \underbrace{\ell}_{\in [0,1[} > 0$ nous avons

$\exists \alpha' \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x \geq \alpha' \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \leq 1$ (l'inégalité de gauche ne nous intéresse pas)

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $x \geq \alpha'$

$\frac{f(x)}{x} \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq x$

Ainsi $\exists b \in [\max(\alpha', 0), +\infty[$ tel que $\Delta(b) \leq 0$

Δ étant continue sur $\mathbb{R}^+$ par le théorème des valeurs intermédiaire $\Delta(b) \leq 0 \leq \Delta(0)$

$\exists c \in [0, b]$ tel que $\Delta(c) = 0$ $\square$.

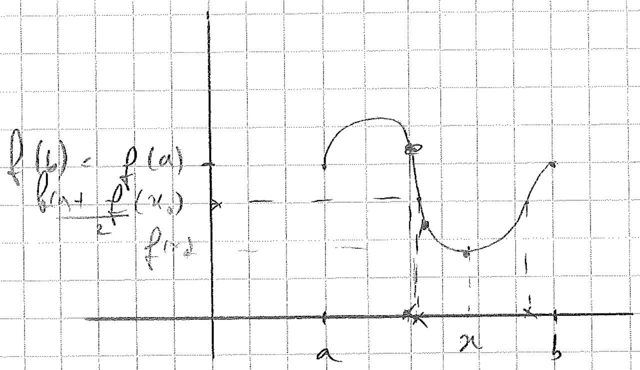
Ibrahim. K

Colle de la semaine 15

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $a < b$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$ tq $f(a) = f(b)$

Mq $\exists (c,d) \in]a,b[^2$ tq $f(c) = f(d)$



→ Si f est constante sur $[a,b]$ alors c'est clair

→ Si f est non constante sur $[a,b]$

ainsi : $\exists x_0 \in]a,b[$ tq $f(x_0) \neq f(a)$

on considère $f(x_0) < f(a)$

ainsi $f(x_0) < \dfrac{f(a) + f(x_0)}{2} < f(a)$

de plus f est $\mathcal{C}^0$ sur $]a, x_0[$ qui est intervalle donc

par Théorème des Valeurs Intermédiaires $\exists c \in]a, x_0[$ tq $f(c) = \dfrac{f(a)+f(x_0)}{2}$ $(*)$

de même $f(x_0) < \dfrac{f(b) + f(x_0)}{2} < f(b)$ $(f(a) = f(b))$

et puisque est $\mathcal{C}^0$ sur $]x_0, b[$ alors

par Théorème des Valeurs intermédiaire

$\exists d \in]x_0, b[$ $f(d) = \dfrac{f(a)+f(x_0)}{2}$ $(**)$

de $(*)$ et $(**)$ on déduit que $\exists (c,d) \in]a,b[^2$ tq

$f(c) = f(d)$.

Raphaël Mouchonnet colle semaine n°15

<u>Enoncé</u> : Soient a et b des réels tels que $a<b$. On considère un couple de fonctions $(f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})^2$ tel que $f(x) > g(x)$. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$. $f(x) \geq g(x) + \delta$

<u>Solutions</u> :

$$\Delta \left| \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - g(x) \end{array} \right.$$

Δ est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$ un <u>segment</u> par <u>combinaison linéaire de fonction $\mathcal{C}^0$</u>

Donc d'après le théorème des bornes atteintes

$\exists (x_m) \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$ $\Delta(x_m) \leq \Delta(x)$

On pose $\delta = \Delta(x_m)$

Alors pour tout $x \in [a,b]$

$$\Delta(x_m) \leq \Delta(x) \implies \Delta(x_m) \leq f(x) - g(x)$$

$$\implies \boxed{g(x) + \Delta(x_m) \leq f(x)}$$

Tiguin, David — Colle de la semaine

> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \neq x$. Démontrer $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

On pose la fonction $\Delta \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) - x \end{array} \right.$ telle que Δ ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\left| \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(x) > 0 \\ \text{ou} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(x) < 0 \end{array} \right.$

Montrons que : $\Delta(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ ou $\Delta(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

Par l'absurde, supposons $\exists x_1 \in \mathbb{R}$ $\Delta(x_1) \leq 0$ et $\exists x_2 \in \mathbb{R}$ $\Delta(x_2) \geq 0$

Donc $\Delta(x_1) \leq 0 \leq \Delta(x_2)$

- $\mathbb{R}$ est un intervalle
- $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 < x_2$
- $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$
- 0 point de $\mathbb{R}$ entre $\Delta(x_1)$ et $\Delta(x_2)$

Donc par TVI $\exists c \in [x_1, x_2]$ tel que $f(c) = 0$

$\longrightarrow$ Contradiction : Δ ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}$

Ainsi si $\Delta(x) < 0$ et Δ strictement croissante

Par théorème de limite monotone $\Delta(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} x$

si $\Delta(x) < 0$ et Δ strictement décroissant

Par théorème de limite monotone. $\Delta(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} x$

si $\Delta(x) > 0$ et Δ strictement croissante

$\Delta(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \Longrightarrow f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} x$

si $\Delta(x) < 0$ et Δ strictement décroissant

$\Delta(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \Longrightarrow f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} x$

Adam M. Colle de la semaine 15

Exercice 1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -e^{\frac{1}{x}}$ pour $x < 0$ et $f(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ pour $x > 0$.*

1. *Montrer que f se prolonge par continuité en 0. Par la suite, on désignera par f ce prolongement.*
2. *La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?*

Solution :

1. $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ x^2\ln(1+\frac{1}{x}) & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array} \right.$

* Soit $x>0$

$f(x) = (x+1)x\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{1+\frac{1}{x}}$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\ln(X)}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{(cc)} 0 \\ 1+\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty \end{array}\right\} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f(0)$

* Soit $x<0$

$f(x) = -e^{\frac{1}{x}}$

$\left.\begin{array}{l} -e^{X} \xrightarrow[X\to-\infty]{} 0 \\ \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty \end{array}\right\} f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 = f(0)$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 tel que $f(0)=0$

2. Soit $x>0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= (x+1)\,\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f'_d(0)$$

Soit $x<0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty \\ Xe^{X} \xrightarrow[X\to -\infty]{CC} 0 \end{array}\right\} \quad \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$

donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 = f'_g(0)$

donc f est dérivable en 0 et donc sur $\mathbb{R}$

$$f' \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Soit $x>0$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \\ 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

$$\left.\begin{array}{l} X^2e^{X} \xrightarrow[X\to -\infty]{CC} 0 \\ \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty \end{array}\right\} \text{par composée de limites} \Rightarrow f'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$

Donc f' est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$

Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Ahmed
Amine

Semaine 15

Enoncé

Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée.
Mq $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Solution :

On a : $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée
Soit $A \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $|g(x)| < A$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $|g \circ f(x)| = |g(f(x))| = |g(y)|$ avec $y = f(x)$

or $|g(y)| < A$ car g est borné.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f \circ g(x) = f(g(x))$ or $|g(x)| < A$.

Appliquons $f \circ g$ à $\mathbb{R}$, on a : $f \circ g(\mathbb{R}) \subset f([-A, A])$
De plus, f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{C}^0$ sur $[-A, A]$.
Donc elle est bornée sur $[-A, A]$ par thm des bornes atteintes.
Donc $f \circ g(\mathbb{R})$ est bornée. Donc $f \circ g$ bornée sur $\mathbb{R}$

Rapport de Colle, Semaine 15

Wassim
M.

> Combien l'équation (E) : $x^7 - 7x + 2 = 0$ possède-t-elle de solutions sur $\mathbb{R}$

On considère $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^7 - 7x + 2 \end{array} \right.$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 7x^6 - 7$$

$$= 7(x^6 - 1)$$

$$= 7(x^3 - 1)(x^3 + 1)$$

$$= 7(x - 1)(x^2 - x + 1)(x^3 + 1)$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x + 1 > 0$
$\forall x \in [1, +\infty[\quad x - 1 \geq 0$
$\forall x \in [-1, +\infty[\quad x^3 + 1 \geq 0$

On a donc

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^3 + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(x) = x^7 - 7x + 2$$

$$= x^7\left(1 - \frac{7}{x^6} + \frac{2}{x^7}\right)$$

- f est continue sur $]-\infty, -1]$
  $0 \in]-\infty, 8]$
  f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$

Par le TVI, $\exists ! c \in]-\infty, -1]$ $f(c) = 0$

- f est continue sur $]-1, 1]$
  $0 \in [-4, 8[$
  f est strictement decroissante sur $]-1, 1]$

Par le TVI, $\exists ! c \in]-1, 1]$ $f(c) = 0$

- f est continue sur $]1, +\infty[$
  $0 \in]-4, +\infty[$
  f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$

Par le TVI, $\exists ! c \in]1, +\infty[$ $f(c) = 0$

Ainsi, (E) possède 3 solutions sur $\mathbb{R}$

Titouan Rapport de colle semaine 15

D

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

1) Montrer que f est définie, dérivable et continue sur I

f définie sur I si $\forall x \in I$ $\cos(x) \neq 0$ ie $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

donc $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} [2\pi] \notin I \\ \text{ou} \\ x \neq -\frac{\pi}{2} [2\pi] \notin I \end{cases}$

comme cos et sin dérivables sur I,

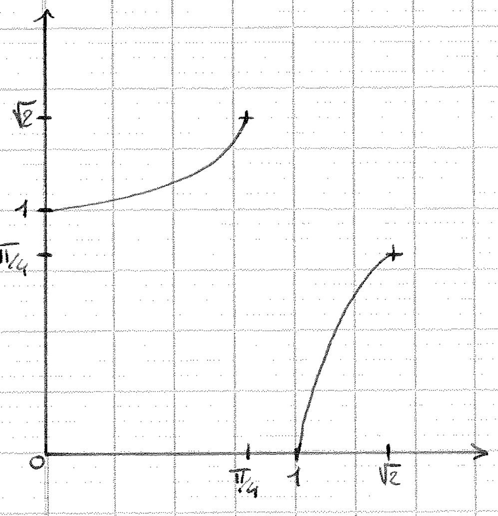
$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ définie sur } I \\ \\ f \text{ continue et dérivable sur } I \end{array}}$

2) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

f dérivable sur I et $\forall x \in I$ $f'(x) = -(-\sin(x)) \times \frac{1}{\cos^2(x)}$ > 0 sur I

comme f continue et strictement croissante sur I, elle réalise une bijection de I dans $J = \left[f(0); f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$
$= [1; \sqrt{2}]$

3) On note f^{-1} la bijection réciproque. Donnez sur le même graphique l'allure des courbes de f et f^{-1}



Soit $x \in I$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$f^{-1}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = x$

Donc $f^{-1}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$

4) Justifier que $\forall x \in J$, $\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x}$ et $\sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

Soit $x \in J$

$$\cos(f^{-1}(x)) = \cos(\text{Arccos}(\tfrac{1}{x}))$$
$$= \frac{1}{x} \qquad (\cos(\text{Arccos}(x)) = x)$$

Soit $y \in I$ $\qquad \sin(y) = |\sin(y)|$ (strictement positif)

$$\underbrace{\sin(f^{-1}(x))}_{\in I} = |\sin(f^{-1}(x))|$$
$$= \sqrt{1-\cos^2(f^{-1}(x))}$$
$$= \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$$

5) Montrer que f^{-1} est derivable sur $J\setminus\{1\}$ et que $\forall x \in J\setminus\{1\}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Soit $x \in J$

f^{-1} derivable en $x \iff f'(f^{-1}(x)) \neq 0$

$$\iff \frac{\sin(f^{-1}(x))}{\underbrace{\cos^2(f^{-1}(x))}_{>0}} \neq 0$$

$$\iff \sin(f^{-1}(x)) \neq 0$$

$$\iff x \neq -1 \notin J \text{ et } x \neq 1 \in J$$

d'où $\boxed{f^{-1} \text{ derivable sur } J\setminus\{1\}}$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

(on fait passer x dans la racine)

Jules R.   Colle de la semaine 15

Énoncé : Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée. Montrez que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Solution :

Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée.

Puisque g est bornée, on a :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad m \leq g(x) \leq M$$

Or :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \in \mathbb{R}$$

On a donc :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad m \leq g(f(x)) \leq M$$

Donc $g \circ f$ est bornée

Soit $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $m < M$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad m \leq g(x) \leq M$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur le segment $[m, M]$.

Donc, d'après le théorème des bornes atteintes,

$$\exists (x_m, x_M) \in [m, M] \quad \forall x \in [m, M] \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

Soit $(x_m, x_M) \in [m, M]$ tel que pour tout $x \in [m, M]$, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$. Or,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) \in [m, M]$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

Donc $f \circ g$ est bornée

Youssef
Boumaiza

TD15.17

Solution :

On pose la fonction suivante :

$$\Delta \left| \begin{array}{ccc} [0, \frac{1}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(x+\frac{1}{2}) \end{array} \right.$$

$\Delta(0) = f(0) - f(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2})$
$\Delta(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1) = -(f(1) - f(\frac{1}{2}))$

- $\Delta(0) = -\Delta(\frac{1}{2})$ ($\Delta(0)$ et $\Delta(\frac{1}{2})$ ont un signe inverse)
- $[0, \frac{1}{2}]$ intervalle
- Δ continue sur $[0, \frac{1}{2}]$

D'après le théorème des valeurs intermediaires :
$\exists\, c \in [0, \frac{1}{2}]$ tq $\Delta(c) = 0$

Donc $f(c) - f(c+\frac{1}{2}) = 0$
i.e. $f(c) = f(c+\frac{1}{2})$

Anaé D <u>Rapport de colle S15</u>

2.13

Etudier la continuité de :
$f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

<u>Solution</u>: Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

On sait que la fonction partie entière n'est pas continue en tous points de $\mathbb{Z}$
Pour montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ il suffit de montrer que f est continue en tous points de $\mathbb{Z}$
Soit $a \in \mathbb{Z}$

• Etudions la limite de f quand x tend vers a^-
On sait que $f(x) = \lfloor a \rfloor + \sqrt{x - \lfloor a \rfloor}$
Or pour tous $a \in \mathbb{R}$ $a - 1 \leq \lfloor a \rfloor \leq a$
D'où $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} a - 1 + \sqrt{x - a + 1}$

$$f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} a - 1 + 1$$

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} a}$$

• Etudions la limite de f quand x tend vers a^+
On sait que $f(x) = \lfloor a \rfloor + \sqrt{x - \lfloor a \rfloor}$
Or pour tous $a \in \mathbb{R}$ $a - 1 \leq \lfloor a \rfloor \leq a$
D'où $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} a + \sqrt{x - a}$

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} a}$$

On remarque que f tend vers la même limite finie quand x tend vers a^- et quand x tend vers a^+.
Donc f est continue en a. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Louis D.   Semaine de colle n° 15

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que f ait une limite finie en $+\infty$ et g soit périodique.

Montrer que si g a une limite finie en $+\infty$, alors elle est constante.

Solution

Par l'absurde on suppose qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_1) \neq g(0)$. Cqfs $g(x_1) > g(0)$.

Soit $\varepsilon = \dfrac{g(x_1) - g(0)}{3}$.

Soit $\overset{\in \mathbb{R}}{l} := \lim\limits_{+\infty} g$ et $\overset{\in \mathbb{R}_{>0}}{T}$ la période de g.

Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R} \; \forall x \geqslant \alpha \quad |g(x) - l| \leqslant \varepsilon$

Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x_1 + n_1 T \geqslant \alpha$ et $n_2 T \geqslant \alpha$ on a alors :

$$l - \varepsilon \leqslant \overbrace{g(x_1 + n_1 T)}^{g(x_1)} \leqslant l + \varepsilon \quad (*)$$

$$l - \varepsilon \leqslant \overbrace{g(0 + n_2 T)}^{g(0)} \leqslant l + \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon - l \leqslant g(0) \leqslant \varepsilon - l \quad (**)$$

En additionnant membre à membre $(*)$ et $(**)$ on a :

$$-2\varepsilon \leqslant g(x_1) - g(0) \leqslant 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow -2/3 \leqslant 1 \leqslant 2/3 \quad ↯$$

Exercice : Soit $a \in]1,+\infty[$. Calculer, si elle existe, $\lim_{n\to+\infty} \lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}}$.

Solution :

$$\underbrace{a^n - 1}_{a^n\left(1-\frac{1}{a^n}\right)} < \lfloor a^n \rfloor \leqslant a^n$$

$$\underset{\substack{\frac{1}{n}\nearrow \\ \text{sur }]1,+\infty[}}{\Longrightarrow} \quad a\left(1-\frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \leqslant a \quad (*)$$

or $\left.\begin{array}{l} 1-\dfrac{1}{a^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\ X^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ X\to 1}]{} 1 \end{array}\right\}$ composé $\Longrightarrow$ de limite $\quad \left(1-\dfrac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

donc $\quad a\left(1-\dfrac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

Par passage à la limite dans $(*)$

On a :

$$\boxed{\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a}$$

Célia A. Rapport de colle n°15

énoncé :

2.6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{3/2}|ln(|x-y|)|$.
Montrer que f est constante.

solution: Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{y\}$.

Nous cherchons à démontrer que la fonction f est dérivable en y. Si elle l'est et que son nombre dérivé est 0 en y, alors nous aurons prouvé que f est constante sur $\mathbb{R}$ par caractérisation différentielle.

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|$$

$x \neq y$ donc $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \frac{|x-y|^{3/2}\,|\ln(|x-y|)|}{|x-y|}$

D'où $-|x-y|^{1/2}\,|\ln(|x-y|)| \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq |x-y|^{1/2}\,|\ln(|x-y|)|$

Or, par composition de limites :

$$\left.\begin{array}{l} x-y \xrightarrow[x \neq y]{x \to y} 0 \\ |X|^{1/2}\,|\ln(|X|)| \xrightarrow[X \neq 0]{X \to 0} 0 \\ \text{(croissances comparées)} \end{array}\right\} \Longrightarrow |x-y|^{1/2}\,|\ln(|x-y|)| \xrightarrow[x \to y]{} 0$$

Par encadrement,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \xrightarrow[x \to y]{} 0$$

Donc la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et constante sur $\mathbb{R}$.

MATHEO. N.

Semaine de colle 15.

Solution :

2.12

Etudier les limites à droite en 0 de :
$f : x \mapsto \lfloor 1/x \rfloor$
$g : x \mapsto x\lfloor 1/x \rfloor$
$h : x \mapsto x^2\lfloor 1/x \rfloor$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{x}-1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$$

Or $\frac{1}{x} - 1 \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$

Par <u>lemme de minoration</u> : $\boxed{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty}$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{x}-1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$$

$$\underset{\times x > 0}{\Longrightarrow} \quad 1-x < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1$$

Or : $1-x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$ et $1 = 1$.

Par <u>théorème d'encadrement</u> :

$$\boxed{g(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

On remarque que $h(x) = x\,g(x)$

Ainsi, par <u>opération sur les limites</u> : $g(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$
$x \longrightarrow 0^+$

$$\boxed{h(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0}$$

2.16

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) < g(x)$.
1)a Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$.
b) Montrer que l'on n'a pas nécessairement une inégalité stricte dans la question précédente.
2) On suppose désormais que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Q}^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Montrer que f est strictement croissante.

Solution : 1) a) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \longrightarrow a$ [Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$]

Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n \in \mathbb{Q}$ on a :

$f(u_n) < g(u_n)$ pour tout n.

Par passage à la limite dans une inégalité stricte :

$f(a) \leq g(a)$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$

b) En prenant : $f \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -|x - \sqrt{2}| \end{vmatrix}$ et $g \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{vmatrix}$

f et g sont continues sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{Q}$ $x - \sqrt{2} \neq 0$ donc $-|x - \sqrt{2}| < 0$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{Q}$ $f(x) < g(x)$

Or, Pour $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $-|x - \sqrt{2}| = 0 = g(\sqrt{2})$

Dans ce cas, nous avons bien une inégalité large et non une stricte

MATHEO.N

2) Soit $(x,y) \in (\mathbb{Q}\setminus\mathbb{R})^2$ tels que $x<y$

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $\exists$ M_1 et M_2 deux rationnels tels que $x < M_1 < M_2 < y$

Soient $(U_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $U_n \longrightarrow x$

$(V_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $V_n \longrightarrow y$

Alors : $\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_1 \quad U_n < M_1 < M_2$

et $\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_2 \quad V_n > M_2 > M_1$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$

Par caractérisation séquentielle : pour tout $n > N$

$f(U_n) < f(V_n)$

Par passage à la limite dans une inégalité stricte :

$$f(x) \leq f(M_1) \quad \text{et} \quad f(y) \geq f(M_2)$$

or : $f(M_1) < f(M_2)$ $\quad [\underset{\mathbb{Q}}{M_1} < \underset{\mathbb{Q}}{M_2}]$

donc : $f(x) \leq f(M_1) < f(M_2) \leq f(y)$

$\Longrightarrow$ $f(x) < f(y)$
[Transitivité de la relation d'ordre]

$\Longrightarrow$ f est strictement croissante.

Pierre V. Colle de la semaine 15

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $f([a,b])$ est totalement contenue dans $[a,b]$ ou le contient totalement, alors f admet un point fixe

Solution

Posons $\Delta \left| \begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - x \end{array} \right.$ continue sur $[a,b]$ car somme de fonctions continues

*) Montrons que si $f([a,b]) \subset [a,b]$ alors $\exists x \in [a,b] \quad f(x) = x$

$\Delta(a) = \underbrace{f(a)}_{\in [a,b]} - a \in [0, b-a]$

$\Delta(b) = \underbrace{f(b)}_{\in [a,b]} - b \in [a-b, 0]$

Δ est continue sur l'intervalle $[a,b]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires

$\exists x \in [a,b] \quad \Delta(x) = 0$

Donc f admet un point fixe

*) Montrons que si $[a,b] \subset f([a,b])$ alors $\exists x \in [a,b] \quad f(x) = x$

Alors il existe $(\alpha, \beta) \in [a,b]^2$ tel que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$

Soit $(\alpha, \beta) \in [a,b]^2$ tel que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$

$\Delta(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = a - \underbrace{\alpha}_{\in [a,b]} \in [a-b, 0]$

$\Delta(\beta) = f(\beta) - \beta = b - \underbrace{\beta}_{\in [a,b]} \in [0, b-a]$

Δ est continue sur l'intervalle $[a,b]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists x \in [a,b] \quad \Delta(x) = 0$

Donc f admet un point fixe

Sophie G.

Colle de la semaine 15

Exercice 1. On définit l'application $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

1. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0.
2. Montrer que ce prolongement est dérivable sur $]-1,1[$.
3. Montrer qu'il est même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}$

$= \dfrac{2x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})}$, $2x^2 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$, $2x^2 \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0^-$; $\xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$, $\xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$

$\left.\begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+ \\ f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0^- \end{array}\right\}$ Donc f prolongeable par continuité en 0.

D'où $f \left| \begin{array}{l} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

2. Soit $x \in [-1,1]$

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

$= \dfrac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$ $\xrightarrow[x\to 0]{} 2$; $\xrightarrow[x\to 0]{} 2$

$\xrightarrow[x\to 0]{} 1$ Donc f dérivable en 0

et f dérivable sur ~~$[-1,1] \setminus \{0\}$~~ $]-1;1[\setminus \{0\}$ (Par composition de fonctions dérivables sur $]-1;1[\setminus \{0\}$)

Donc f dérivable sur $]-1;1[$

3. Par 2. f dérivable sur $]-1,1[$ *
$\forall x \in]-1,1[$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{f(x)}{x}$$

$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ continue sur $]-1,1[\setminus\{0\}$
$x \mapsto f(x)$ ______
$x \mapsto \frac{1}{x}$ ______ $]-1;0[$ et $]0;1[$

Donc f' continue sur $]-1,1[$ (**)

Soit $x \in]-1,1[$ on fait $f'(0)=1$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}_{\xrightarrow[x\to 0^-,\ x\to 0^+]{} 1} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\xrightarrow[x\to 0^-,\ x\to 0^+]{} 1} - \frac{f(x)}{x}$$

$$= \frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)} \xrightarrow[x\to 0^+,\ x\to 0^-]{} -1$$

Donc comme
$f'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$
$f'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$, f' continue en 0 (*)
$f'(0)=0$

Par (*) et (**) f' continue sur $]-1,1[$

Mehdi B. Colle de la semaine 15.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y)), \quad (*)$$

1. Calculer $f(0)$, quelle est la parité de f ?
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = n^2 f(x)$.
3. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = r^2 f(1)$.
4. En déduire f.

Solution : 1/ • On applique $(*)$ à $x \leftarrow 0$, $y \leftarrow 0$

$$f(0+0) + f(0-0) = 2(f(0) + f(0))$$

donc $2f(0) = 4f(0)$

On obtient :

$$\boxed{f(0) = 0}$$

• Soit $y \in \mathbb{R}$. On applique $(*)$ avec $x = 0$:

$$f(y) + f(-y) = 2(\overbrace{f(0)}^{=0} + f(y))$$

$$\Rightarrow f(y) = f(-y)$$

Comme $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 :

$$\boxed{f \text{ est paire}}$$

2/ Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Démontrons le prédicat $\mathcal{P}(n)$: " $f(nx) = n^2 f(x)$ ".

• À $n = 0$, $\mathcal{P}(n)$ s'écrit " $f(0) = 0$ " qui est vrai par 1/.

$\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$

• Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que vraies.

$$f((n+1)x) = f(nx + x)$$

$$\overset{(*)}{=} 2\left(f(nx) + f(x)\right) - \overbrace{f(nx - x)}^{= f((n-1)x)}$$

$$\overset{HR}{=} 2\left(n^2 f(x) + f(x)\right) - \left((n-1)^2 f(x)\right)$$

$$= 2n^2 f(x) + 2f(x) - n^2 f(x) + 2n f(x) - f(x)$$

$$= n^2 f(x) + 2n f(x) + f(x)$$

$$f((n+1)x) = (n+1)^2 f(x).$$

Par parité de f et de $t \mapsto t^2$, nous pouvons propager l'identité à $\mathbb{Z}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(nx) = n^2 f(x)}$$

3/ Soit $r \in \mathbb{Q}$. $\exists (n, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \quad r = \frac{n}{d} = n \times \frac{1}{d}$.
Grâce à 2/ :

$$f(r) = f\left(n \times \frac{1}{d}\right) = n^2 f\left(\frac{1}{d}\right)$$

De même : $f(1) = f\left(d \times \frac{1}{d}\right) = d^2 f\left(\frac{1}{d}\right)$

Ainsi : $f(r) = n^2 \frac{f(1)}{d^2} = \left(\frac{n}{d}\right)^2 f(1)$ d.

Donc :

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = r^2 f(1)}$$

Mehdi B.

4/ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\exists (a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \quad a_n \longrightarrow x$$

Par continuité de f sur $\mathbb{R}$:

$$f(a_n) \longrightarrow f(x)$$

Comme $a_n \in \mathbb{Q}$, et f est continue sur $\mathbb{R}$, par 3/ :

$$f(a_n) \longrightarrow x^2 f(1)$$

Il vient par unicité de la limite :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 f(1)}$$

Notre analyse livre :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto kx^2 \end{array} \right. \quad \text{où } k = f(1)$$

Vérifions que le candidat trouvé pour f vérifie ⊛.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= k(x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + y^2 - 2xy) \\ &= k\, 2x^2 + k\, 2y^2 \\ &= 2(f(x) + f(y)) \end{aligned}$$

Nous en déduisons finalement f:

$$\boxed{f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k\,x^2 \end{array} \right.}$$

avec $k = f(1)$.

MARGIALOMINI
Amélien

Colle semaine 18

$$\lim_{x \to a} \frac{\cos(ax) - \cos(a^2)}{x^2 - a^2}$$

$$\frac{\cos(ax) - \cos(a^2)}{x^2 - a^2} = \underbrace{\frac{\cos(ax) - \cos(a^2)}{ax - a^2}}_{1} \times \underbrace{\frac{a}{x+a}}_{2}$$

$$\lim_{x \to a} (1) = \frac{d\cos}{da}(a^2) = -2a\sin(a^2)$$

$$\lim_{x \to a} (2) = \frac{1}{2}$$

Par opérations sur les lim on a :

$$\lim_{x \to a} \frac{\cos(ax) - \cos(a^2)}{x^2 - a^2} = -a\sin(a^2)$$

Rapport de colle semaine 15 Uta Bayer de Neyer

Exercice 2 :

Soit f définie sur $]-1;1[\setminus \{0\}$ par

$f(x) = \frac{|x|}{x} \ln(1-|x|)$ et $f(0) = 0$

Montrer successivement que :

a. f est continue sur $]-1;1[$

b. f est dérivable sur $]-1;1[$

c. f' est continue sur $]-1,1[$.

Soit f définie sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ par $\left| \begin{array}{l} f(x) = \frac{|x|}{x} \ln(1-|x|) \\ \text{et } f(0) = 0 \end{array} \right.$

a. On montre que f est continue en 0.

- Soit $x > 0$,

Alors, $f(x) = \ln(1-x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \boxed{\ln(1) = 0 = f(0)}$

- Soit $x < 0$,

Alors, $f(x) = -\ln(1+x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} \boxed{-\ln(1) = 0 = f(0)}$

Donc f est continue en 0.

Au final, f est continue sur $]-1,1[$ intervalle.

b. On montre que f est dérivable sur $]-1,1[$ intervalle.

- Soit $x \in]0,1[$,

Alors, $f(x) = \ln(1-x)$

Louis B — Colle de la semaine 15

Soit f définie sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ par
$f(x) = \frac{|x|}{x} \ln(1-|x|)$ et par $f(0)=0$.
Montrer successivement que :
1) f est $\mathcal{C}^0$ sur $]-1,1[$
2) f est dérivable sur $]-1,1[$
3) f' est $\mathcal{C}^0$ sur $]-1,1[$

---

1) Par composition et produit de fonctions continues sur $]-1,1[\setminus\{0\}$, f est continue sur $]-1,1[\setminus\{0\}$. Montrons que f est $\mathcal{C}^0$ en 0.

en 0^+ : $f(x) = 1 \times \ln(1-x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f(0)$

en 0^- : $f(x) = -1 \times \ln(1+x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 = f(0)$

Donc f est continue en 0 et donc sur $]-1,1[$.

2) Par composition de fonctions dérivable, f est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$
Considérons le taux d'accroissement au voisinage de 0 :

en 0^+ : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1 \in \mathbb{R}$

en 0^- : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -1 \in \mathbb{R}$

$\Big\}$ limite finie

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$.
f est donc dérivable sur $]-1,1[$

3) $\forall x \in]-1,1[\quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ -\dfrac{1}{1-x} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{1+x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Par composition et $\otimes$ de fonctions $\mathcal{C}^0$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$
f' est $\mathcal{C}^0$ sur $]-1,1[\setminus\{0\}$, montrons que f' est continue en 0

en 0^+ $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{1-x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1 = f'(0)$

en 0^- $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1 = f'(0)$

Donc f' est continue en 0 et donc $\mathcal{C}^0$ sur $]-1,1[$.

Soit f une fonction continue en 0 et en 1 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x^2) \quad (*)$$

1. Montrer que f est paire.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(x) = f(x^{2^{-n}})$$

3. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. f est défini sur $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.
- Montrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(-x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = f((-x)^2) \quad (*)$$
$$= f(x^2)$$
$$\boxed{f(-x) = f(x)} \quad (*)$$

Ainsi f est paire.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$

<u>On raisonne par récurrence simple:</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$: " $f(x) = f(x^{2^{-n}})$ "

<u>Initialisation à $n=1$:</u>

$$\boxed{f(x) = f((x^{\frac{1}{2}})^2) \underset{(*)}{=} f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x^{2^{-1}})}$$

Donc $P(1)$ vrai

<u>Hérédité:</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $P(n)$ vrai

Vérifions pour $n+1$:

$$f(x^{2^{-(n+1)}}) = f(x^{2^{-n} \times 2^{-1}})$$
$$= f((x^{2^{-n}})^{\frac{1}{2}})$$
$$\underset{(*)}{=} f(x^{2^{-n}})$$

$$\boxed{f(x^{2^{-(n+1)}}) \underset{HR}{=} f(x)}$$

Donc $P(n+1)$ vrai

<u>Conclusion:</u>

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(x) = f(x^{2^{-n}})}$$

3. Montrons que f est constante nulle

i.e $\exists \ell \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = \ell$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$:

Nous savons par Q2 que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(x) = f(x^{2^n}) = f(x^{\frac{1}{2^n}}) \quad (*)$$

$2^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car $2 > 1$)

$\frac{1}{X} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Par composition de limite $\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$

$\frac{1}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$x^X \underset{X \to 0}{\longrightarrow} 1$ ($x \neq 0$)

Par composition de limite $\Rightarrow \boxed{x^{\frac{1}{2^n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1}$

Par continuité de f en 1 et la caractérisation séquentielle de la limite,

$$f(x^{\frac{1}{2^n}}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(1)$$

On pose $(*)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x^{\frac{1}{2^n}}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Par unicité de la limite :

$$f(x) = f(1)$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = f(1)}$

Montrons que $f(0)=f(1)$

Raisonnons par l'absurde et supposons:

$$f(0) \neq f(1)$$

Par hypothèse:

f continue en 0

i.e $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in \mathbb{R} \cap \underbrace{]0-\delta, 0+\delta[}_{]-\delta;\delta[}\ |f(x)-f(0)| \leq \varepsilon$

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2} \underbrace{|f(1)-f(0)|}_{\neq 0 \text{ car } f(1)\neq f(0)}$

$\exists \delta>0\ \forall x \in]-\delta;\delta[\ \ |f(x)-f(0)| \leq \frac{1}{2}|f(1)-f(0)|$

Soit $x \in]-\delta;\delta[$ tel que $x \neq 0$:

$f(x) = f(1)$

Donc $|f(1)-f(0)| \leq \frac{1}{2}|f(1)-f(0)|$

$\underset{|f(1)-f(0)|>0}{\Longrightarrow}\ 1 \leq \frac{1}{2}$ ↯

Ainsi:

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = f(1)_{\in \mathbb{R}}$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists \ell \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x)=\ell \\ \text{i.e } f \text{ est constante sur } \mathbb{R} \end{array}}$$

4

Antoine B. colle de la semaine 15.

On définit l'application $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [-1;1] \setminus \{0\},\ f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x}$$

1. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0.

2. Montrer que ce prolongement est dérivable sur $]-1;1[$.

3. Montrer qu'il est même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$.

Une Solution :

1. Soit $x \in [-1;1] \setminus \{0\}$.

1er cas : $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 1 - 1}{x} = \left(\underbrace{\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}}_{\xrightarrow[x^2 \to 0]{} 1/2} + \underbrace{\frac{\sqrt{1+(-x^2)} - 1}{(-x^2)}}_{\xrightarrow[(-x^2) \to 0]{} 1/2} \right) \underbrace{x}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}$$

$$\left(\frac{(1+y)^\alpha - 1}{y}\right) \xrightarrow[y \to 0]{} \alpha$$

$$\xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

2e cas : $x < 0$ identique.

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 et $f(0) = 0$.

2. f est dérivable sur $]-1;1[\setminus\{0\}$

(car composée de fonction dérivable sur $]-1;1[\setminus\{0\}$)

$$\forall x \in]-1;1[\setminus\{0\},\ f'(x) = \frac{\left(\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}\right) - \left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}\right)$$

- $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} ?$

$\rightarrow$ $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} + \frac{\sqrt{1-x^2} + 1}{(-x^2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2} \\ x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{de lim}]{\text{composition}} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$$

ainsi $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 1$.

de plus $f'(x) = \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 1} + \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 1} - \underbrace{\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}\right)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 1} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}]{} 1$

Ainsi, d'après le théorème de la limite de la dérivée,

f est dér en a

et f' est $\mathcal{C}^0$ en a i.e. f $\mathcal{C}^1$ en a.

f est dér sur $]-1;1[\setminus\{0\} \cup \{0\} =]-1;1[$

3. f' $\mathcal{C}^0$ sur $]-1;1[$ et en a donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$.

Paul C. Semaine de colle 15

> Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $f([a,b])$ est totalement contenu dans $[a,b]$ ou le contient totalement, alors f admet un point fixe

Solution :

On veut démontrer : $\left.\begin{array}{l} f([a,b]) \subset [a,b] \\ \text{ou} \\ [a,b] \subset f([a,b]) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \alpha \in [a,b],\ f(\alpha) = \alpha$

• 1er cas :

Supposons $[a,b] \subset f([a,b])$.
f est continue sur le segment $[a,b]$, le théorème des bornes atteintes livre alors :
$\exists (x_m, x_M) \in [a,b]^2,\ \forall x \in [a,b], \quad f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M)$
Ainsi, comme $(x_m, x_M) \in [a,b]^2$ et $(a,b) \in f([a,b])^2$,
$f(x_m) \leqslant a \leqslant x_m$
et $f(x_M) \geqslant b \geqslant x_M$
Posons $\Delta : x \mapsto f(x) - x$, $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$ (composée de fonctions $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$)

Alors, $\Delta(x_m) = f(x_m) - x_m \leqslant 0$
$\Delta(x_M) = f(x_M) - x_M \geqslant 0$

d'où $\Delta(x_m) \leqslant 0 \leqslant \Delta(x_M)$. De plus, Δ est continue sur $[a,b]$ intervalle, par le théorème des valeurs intermédiaires,
$\exists \alpha \in [a,b],\ \Delta(\alpha) = 0$
i.e. $f(\alpha) = \alpha$.

f admet donc un point fixe

• 2ième cas :

Supposons $f([a,b]) \subset [a,b]$

Comme $[a,b]$ est un intervalle,

$\forall x \in [a,b],\ a \leqslant f(x) \leqslant b$

Posons $\Delta : x \mapsto f(x) - x$, $\Delta \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$

$\Delta(a) = f(a) - a$, or $a \leqslant f(a)$

$\Delta(a) \geqslant 0$

$\Delta(b) = f(b) - b$, or $f(b) \leqslant b$

$\Delta(b) \leqslant 0$

Δ est continue sur $[a,b]$ intervalle et $\Delta(b) \leqslant 0 \leqslant \Delta(a)$,

le théorème des valeurs intermédiaires livre alors :

$\exists \alpha \in [a,b],\ \Delta(\alpha) = 0$

i.e. $f(\alpha) = \alpha$

f admet donc un point fixe.

Youssef B

Colle de la semaine 15

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0$ si $x \geqslant 0$ et par $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ si $x<0$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, puis que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Solution :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \end{cases} \end{array} \right.$$

- f est continue sur $\mathbb{R}_+$ (fonction nulle continue sur $\mathbb{R}$)
- f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ (composition de deux fonctions continues)

Reste à étudier la limite en 0^- :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty \\ e^X \xrightarrow[X \to -\infty]{} 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{de lim}]{\text{Compo}} e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (fonction nulle)
- f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ (composition de fonctions dérivables)

en 0^-,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -\infty \\ Xe^X \xrightarrow[X \to -\infty]{} 0 \ (cc) \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{de lim}]{\text{compo}} \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$$

Donc f est dérivable en 0^-.
" f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Colle semaine 15

Abrcanda M.

Exercice 2 1

On note $\star$ l'équation $(1-x)y' = y + 2x$.

1. Résoudre cette équation sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
2. En déduire la solution sur $\mathbb{R}$.

$(1-x)y' = y + 2x$

Donc $y' - \frac{1}{(1-x)}y = \frac{2x}{1-x}$

EDL 1

On résout l'homogène

$y' - \frac{1}{(1-x)}y = 0$ $A(x) = \ln(1-x)$

Par thm $]-\infty, 1[$

$S_{ol} = \mathrm{Vect}\left(e^{\ln(1-x)}\right)$

$= \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

recherche une sol part de la forme $ax + b$

$a - \frac{1}{(1-x)}(ax+b) = \frac{2x}{1-x}$

$a - ax - ax - b = 2x$

$\mathrm{Vect}\ \frac{1}{x-1}$

$-2ax + a - b = 2x$

$\Rightarrow \begin{cases} -2a = 2 \\ a - b = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

$-x-1$

$$\mathcal{S}ol = \left\{ \left| x \mapsto \frac{k}{1-x} - x - 1,\ k \in \mathbb{R} \right. \right\}$$

De manière analogue, on obtient

$$\mathcal{S}ol_{E,\,]1,+\infty[} = \left\{ x \mapsto \frac{k}{x-1} - x - 1,\ k \in \mathbb{R} \right\}$$

2) (A) Soit $y \in \mathcal{S}ol_{E,\mathbb{R}}$

$\exists k_1 \in \mathbb{R} \quad \forall x > 1 \quad y(x) = \frac{k_1}{x-1} - x - 1$

$\exists k_2 \in \mathbb{R} \quad \forall x < 1 \quad y(x) = \frac{k_2}{1-x} - x - 1$

or $(1-x)y' = y + 2x$

donc en $x = 1$ $\quad y = -2$

$$y \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{k_1}{x-1} - x - 1 & \text{si } x > 1 \\ -2 & \text{si } x = 1 \\ \frac{k_2}{1-x} & \text{si } x < 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

or y dérivable en 1 donc

$$\frac{y(x) - y(1)}{x-1} \underset{x \to 1^+}{\longrightarrow} f'(1)$$

$$\frac{y(x) - y(1)}{x-1} \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} f'(1)$$

donc $k_1 \times \left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) - 1 = k_2 \times \frac{1}{(1-x)^2} - 1$

or $(x-1)^2 = (1-x)^2$

donc $k_1 = -k_2$

Léa Nam

Colle de la semaine n° 15

Énoncé :

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

1/ Montrer que

a/ f continue $\Longrightarrow$ f a un point fixe

b/ f croissante $\Longrightarrow$ f a un point fixe

2/ A-t-on " f décroissante $\Longrightarrow$ f a un point fixe " ?

Solution :

1/ a/ Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$ un intervalle

Montrons que f a un point fixe.

On pose $\Delta \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto f(x) - x \end{array} \right.$ $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1]$ un intervalle (car somme de fonctions continues)

Or

$\Delta(0) = f(0) \geq 0$

et $\Delta(1) = f(1) - 1 \leq 0$

On a donc $\Delta(1) \leq 0 \leq \Delta(0)$

Par théorème des valeurs intermédiaires :

$\exists \alpha \in [0,1]$ $\Delta(\alpha) = 0$

ie $f(\alpha) - \alpha = 0$

$f(\alpha) = \alpha$

b/ Supposons f est croissante.

Montrons que f a un point fixe.

On pose :

$A := \{ x \in [0,1] : f(x) \leq x \}$

On sait $f(1) \leq 1$ (définition de f)

et $\forall x \in [0,1]$

$0 \leq f(x)$

Donc A est un ensemble non vide et minoré.

Alors par propriété de la borne inférieure,

A admet une borne inférieure.

$\forall x \in A$

$\inf(A) \leq x$

$\Longrightarrow f(\inf(A)) \leq f(x) \leq x$

(f est croissante sur $[0,1]$)

Alors $f(\inf(A))$ minore A.

On $f(\inf(A)) \leq \inf(A)$

$\Longrightarrow f(f(\inf(A))) \leq f(\inf(A))$

(f est croissante sur $[0,1]$)

alors $f(\inf(A)) \in A$

On a trouvé un élément de A qui minore A.

Donc $f(\inf(A)) = \inf(A)$

Ainsi, f possède un point fixe.

2/ Supposons f est décroissante.

Montrons que f n'a pas nécessairement un point fixe.

Il suffit de donner un contre exemple :

Si $f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$

alors f est bien décroissante mais n'admet pas de point fixe.

Pierre T. Colle de la semaine 15

> Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
> $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{\frac{3}{2}} |\ln(|x-y|)|$
> Montrer que f est constante.

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que f est dérivable en x et que $f'(x) = 0$.
Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$.

$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{\frac{3}{2}} |\ln(|x-y|)|$

donc $0 \leq \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|^{\frac{1}{2}} |\ln(|x-y|)|$

Par passage à la limite dans une égalité $(y \to x)$:
$0 \leq |f'(x)| \leq 0$
donc $f'(x) = 0$.
donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0$
donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

Lina. A

Colle de la semaine 15.

Soit f continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(a) = a$.
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

Solution.

Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(f(a)) = a$$

Posons la fonction $\Delta : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - x \end{vmatrix}$.

$\Delta(a) = f(a) - a$.

$\Delta(f(a)) = a - f(a) = -\Delta(a)$.

* Si $\Delta(a) \geqslant 0$

Alors $\Delta(f(a)) \leqslant 0$.

- Δ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
- $\Delta(f(a)) \leqslant 0 \leqslant \Delta(a)$

Par le Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

$\exists c \in \mathbb{R} \quad \Delta(c) = 0$

Par conséquent : il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(c) = c$$

* Si $\Delta(a) \leqslant 0$

Alors $\Delta(f(a)) \geqslant 0$.

- Δ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
- $\Delta(a) \leqslant 0 \leqslant \Delta(f(a))$

Par le TVI, $\exists c \in \mathbb{R} \quad f(c) = c$.

* Si $\Delta(a) = \Delta(f(a)) = 0 \quad (f(a) = a)$

Donc $c_1 = a$ et $c_2 = f(a)$.

Léon .N

Colle de la semaine 15

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(5x) = f(x)$$

Montrer que f est constante

Soit $x \in \mathbb{R}$

Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = \frac{1}{5} x_n \end{cases}$$

On établit $\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n x$ car (x_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme x.

$$x_n \longrightarrow 0 \qquad \text{car } \left|\frac{1}{5}\right| < 1$$

Or f est continue en 0 donc

$$f(x_n) \longrightarrow f(0)$$

~~Par~~ Or $(f(x_n))$ est constante

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) = f(0)$

(Par l'absurde, on suppose $f(x_n) \neq f(0)$
$\exists \ell \in \mathbb{R} \setminus \{ f(0) \}$

~~Pour~~ Soit $\varepsilon = \left| \dfrac{\ell - f(0)}{2} \right|$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \ |\underbrace{f(x_n)}_{\ell} - f(0)| \leq \varepsilon$

Alors $\quad |\underbrace{\ell - f(0)}_{>0}| \leq \dfrac{1}{2} |\underbrace{\ell - f(0)}_{>0}|$

$$1 \leq \frac{1}{2} \quad ↯ \quad)$$

Ainsi $n \leftarrow 0$ nous donne $f(x) = f(0)$

$$\boxed{\text{On a montré pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ que } f(x) = f(0)}$$

Nicolas H — Colle de la semaine 15

Énoncé

Combien l'équation

$$x^7 - 7x + 2 = 0$$

possède-t-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?

Solution :

Posons $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^7 - 7x + 2 \end{array} \right.$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car fonction polynomiale).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 7x^6 - 7$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Posons $X = x^3$

$f'(x) = 7X^2 - 7 = 7(X-1)(X+1)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 7(x^3-1)(x^3+1)$

Résolvons $x^3 - 1 > 0$

$x^3 - 1 > 0$

$\Leftrightarrow x^3 > 1$

$\Leftrightarrow x > 1$

$(\Leftarrow \sqrt[3]{\cdot}$ croissante⊛ sur $\mathbb{R}$ et $\in \cdot^3$ injective sur $\mathbb{R})$

De même pour $x^3 + 1 > 0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^3-1			$-$		0	$+$	
x^3+1		$-$	0		$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

⊛ strictement

Soit $x < 0$

$$x^7 - 7x + 2 = x^7\left(1 - \frac{7}{x^6} + \frac{2}{x^7}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^7 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \\ 1 - \frac{7}{x^6} + \frac{2}{x^7} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1 \end{array}\right\} \text{opérations} \Rightarrow \text{sur les limites} \quad f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$$

Soit $x > 0$

$$\left.\begin{array}{l} x^7 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \\ 1 - \frac{7}{x^6} + \frac{2}{x^7} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \end{array}\right\} \text{opérations sur les limites} \quad f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc

$$f(x) \xrightarrow[x \to -1]{} f(-1) = 8$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to 1]{} f(1) = -4$$

Soit $x \in]-\infty; -1] = I_1$

f est strictement monotone et continue sur I_1

donc $\forall y \in f(I_1)$ $\exists! x_1 \in I_1$ $y = f(I_1)$

or $f(I_1) =]-\infty; 8]$, $0 \in f(I_1)$, donc

il existe un unique $x \in I_1$ tel que $f(x) = 0$ sur I_1.

De même sur $x_2 \in [-1; 1]$ et $x_3 \in [1; +\infty[$,

L'équation $x^7 - 7x + 2 = 0$ admet 3 solutions sur $\mathbb{R}$.

Robin G. Colle de la semaine 15

Étudier la dérivabilité de la fonction sur $\mathbb{R}$:

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Solution : Soit $x \geq 0$ et $x \neq 1$:

$$f(x) = \frac{x\,|x-1|}{x-1}$$

- si $0 \leq x < 1$: $f(x) = -x$
- si $x > 1$: $f(x) = x$

Soit $x < 0$:

$$f(x) = \frac{-x(1-x)}{x-1} = x$$

- Étudions la dérivabilité en 1 :

pour $0 \leq x < 1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1 - \dfrac{2}{x-1}$

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{2}{X} \xrightarrow[X \to 0^-]{} +\infty \\ x-1 \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0^- \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{limites}]{\text{composée}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$$

f n'est pas dérivable en 1 à gauche, donc f n'est pas dérivable en 1.

1/2

• Étudions la dérivabilité en 0.

pour $0 \leq x < 1$ $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$

donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -1$

pour $x < 0$ $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1$

donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 1$

f est dérivable à gauche et à droite.
$f_d'(0) \neq f_g'(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

• Étudions la dérivabilité sur $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.
Soit $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

• si $0 < a < 1$ $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{-x + a}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} -1$

• si $a < 0$ ou $a > 1$ $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} 1$

Donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

<u>Conclusion :</u>

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ (i.e. pas dérivable en 0 et 1) et

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\} \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

2/2