Adam M.

Colle de la semaine 14

Exercice 2. *Étudier la limite éventuelle en 0 de*

$$f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{x - \frac{3}{2}\sin(2x)}.$$

Solutions :

$$f(x) = \frac{2\mathrm{sh}(x)}{x - \frac{3}{2}\sin(2x)} = \frac{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(0)}{x - 0} \times \frac{2}{1 - 3\frac{\sin(2x)}{2x}}$$

$$\frac{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \mathrm{ch}(0) = 1$$ (taux d'accroissement)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sin(X)}{X} \xrightarrow[X \to 0]{} 1 \\ 2x \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{array}\right\}$$

par composée $\Longrightarrow$ de limite $$\frac{\sin(2x)}{2x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

donc $$\frac{2}{1 - 3\frac{\sin(2x)}{2x}} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

Donc $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

Léa N.

Colle de la semaine 14

Énoncé

$(a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

1/ Calculer $M(a,b)^2$ et l'écrire sous forme de combinaison linéaire de I_3 et $M(a,b)$

2/ CNS pour que $M(a,b)$ soit inversible.

Solution

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

1/

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$M(a,b)^2 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & b^2+2ab & b^2+2ab \\ b^2+2ab & a^2+2b^2 & b^2+2ab \\ b^2+2ab & b^2+2ab & a^2+2b^2 \end{pmatrix}$$

$$M(a,b)^2 = (2b^2 - a^2 - ab)\, I_3 + (2a+b)\, M(a,b)$$

2/ Montrons que : $M(a,b)$ inversible $\Longleftrightarrow 2b^2 - a^2 - ab \neq 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $2b^2 - a^2 - ab \neq 0$

$$M(a,b)^2 - (2a+b)\, M(a,b) = (2b^2 - a^2 - ab)\, I_3$$

$$\Longrightarrow M(a,b)\left(M(a,b) - (2a+b)\, I_3\right) = (2b^2 - a^2 - ab)\, I_3$$

$$\times \frac{1}{2b^2 - a^2 - ab} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad M(a,b)\, \frac{\left(M(a,b) - (2a+b)\, I_3\right)}{2b^2 - a^2 - ab} = I_3$$

Donc $M(a,b)$ est inversible d'inverse :

$$\frac{M(a,b) - (2a+b)\, I_3}{\underbrace{2b^2 - a^2 - ab}_{\neq 0}}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $M(a,b)$ est inversible.

Montrons que $2b^2 - a^2 - ab \neq 0$ par l'absurde.

Supposons $2b^2 - a^2 - ab = 0$

$\Rightarrow \quad M(a,b)^2 = (2a+b)\,M(a,b)$

$\Rightarrow \quad M(a,b)\big(M(a,b) - (2a+b)\,I_3\big) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

$\Rightarrow \quad M(a,b) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$ ou $M(a,b) - (2a+b)\,I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

i.e $M(a,b) = (2a+b)\,I_3$

Ce qui faux dans les deux cas

d'où une contradiction.

Donc $2b^2 - a^2 - ab \neq 0$.

Lina A. Colle de la semaine 14.

Exercice 3 :

a) Soient A et M deux matrices carrées. Montrer que si $M^3 = A$ alors A et M commutent.

b) On pose $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $M^3 = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution:

a) Soit A et M deux matrices carrées.

Supposons $M^3 = A$

Montrons que $MA = AM$, i.e A et M commutent.

D'une part $MA = MM^3 = M^4$

Et d'autre part $AM = M^3 M = M^4$.

Donc $MA = AM$.

Posons $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$ où $(m_1, m_2, m_3, m_4) \in \mathbb{R}^4$.

b). $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Résolvons: $(E) : M^3 = A$.

D'après a) si $M^3 = A$ alors $AM = MA$.

$$AM = MA$$

$$\iff \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

def du produit matriciel

$$\iff \begin{pmatrix} 8m_1 & 8m_2 \\ -m_3 & -m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8m_1 & -m_2 \\ 8m_3 & -m_4 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{cases} 8m_1 = 8m_1 \\ 8m_2 = -m_2 \\ \cancel{8}m_3 = -8m_3 \\ -m_4 = -m_4 \end{cases}$$

$$\iff M \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_4 \end{pmatrix} \quad \text{où } (m_1, m_4) \in \mathbb{R}^2$$

En revenant à l'équation (E),

$$M^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

M est une matrice diagonale

$$\iff \begin{pmatrix} m_1^3 & 0 \\ 0 & m_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{cases} m_1^3 = 8 \\ m_4^3 = -1 \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_4 = -1 \end{cases} \qquad (\Rightarrow \sqrt[3]{\cdot} \;,\; \Leftarrow \text{on élève au cube.})$$

Donc $Sol_{(E)} = \left\{ M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Eliott S.V.

SEMAINE 14

Exercice 2 : Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

1. Déterminer une relation entre A^2 , A et I_3

2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

3. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n\in\mathbb{N}, A^n=a_n A+b_n I_3$

1/ $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix} = A^2$$

Et donc $A^2 = A + 2I_3$.

2/ Comme $A^2 = A + 2I_3$,

Il vient $A^2 - A = 2I_3$.

donc $A(A - I_3) = 2I_3$

Soit $A\left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) = I_3$.

A est donc Inversible à droite, d'inverse $\frac{1}{2}(A - I_3)$.

De même, $A^2 - A = 2I_3$

donc $(A - I_3)A = 2I_3$

Soit $\left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right)A = I_3$

A est donc Inversible à gauche, d'inverse $\frac{1}{2}(A - I_3)$

Ainsi, A est inversible, et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

3) Par récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = $ " $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \exists (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ A^n = a_n A + b_n I_3$ "

Initialisation à $n=0$

$A^0 = I_3 = 0 \times A + 1 \times I_3$ et donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tq $P(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &:= A \times A^n = A(a_n A + b_n I_3) \\
&\overset{\text{(HR)}}{=} a_n A^2 + b_n A \\
&= a_n(A + 2I_3) + b_n A \\
&= a_n A + 2a_n I_3 + b_n A \\
A^{n+1} &= (a_n + b_n)A + 2a_n I_3 .
\end{aligned}$$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$. □

Facultatif.

Comme $b_n = 2a_{n-1}$, il vient que $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, soit que :

$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.

On pose (Ecar) $x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1$ ou $x = 2$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists \lambda_1, \lambda_2,\ a_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 (-1)^n$

$$\begin{array}{l} a_0 = 0, \text{ il vient} \\ a_1 = 1, \text{ il vient} \end{array} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_2 = 1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{-1}{3} \quad L_2 \leftarrow \frac{-1}{3} L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{3} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \lambda_2 = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + (-1)^{n+1}\right)$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 2a_{n-1} = \frac{2}{3}\left(2^{n-1} + (-1)^n\right)$

Par conséquent,

$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n I_3 = \frac{1}{3}\left(2^n + (-1)^{n+1}\right) A + \frac{2}{3}\left(2^{n-1} + (-1)^n\right) I_3$.

Mouchonnet Raphaël colle semaine n°14

Rappeler pourquoi toute combinaison linéaire de matrices symétrique est symétrique. Donner un contre-exemple pour le produit. Trouver et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices S_1 et S_2 soit symétrique.

Solution:

$$S_n := \{ M \in M_n(\mathbb{K}) : M = M^T \}$$

Soit $(A,B) \in S_n(\mathbb{K}) (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$

$$(\lambda_1 A + \lambda_2 B)^T = \lambda_1 A^T + \lambda_2 B^T = \lambda_1 A + \lambda_2 B \in S_n(\mathbb{K})$$

Donc $S_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire

$E_{11} \in S_2(\mathbb{K})$ et $P_{12} \in S_2(\mathbb{K})$

Or $E_{11} \times P_{12} = E_{12} \notin S_2(\mathbb{K})$

Soit $(A,B) \in S_n(\mathbb{K})$ tel que $AB \in S_n(\mathbb{K})$

$$AB = (AB)^T \iff AB = B^T A^T$$

$$\iff AB = BA \quad ((B,A) \in S_n(\mathbb{K})^2)$$

Donc le produit de deux matrices symétiques est symétique si et seulement si les deux matrices commutent.

Anaé D.

Rapport de colle S14

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} x^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, $\lim\limits_{x \to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

Solution:

- $\lim\limits_{x \to 0} x^x$

$x^x = e^{x \ln(x)}$

$$\left.\begin{array}{ll} x\ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 & (CC) \\ e^x \xrightarrow[x \to 0]{} 1 & \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{de lim}]{\text{comp}} \boxed{x^x \xrightarrow[x \to 0]{} 1}$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

$\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

Par produit $\boxed{x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$

- $\lim\limits_{x \to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

D'après la définition de la partie entière

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

$(\times x > 0)$ $\quad 1 - \frac{1}{x} \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$

Par théorème d'encadrement : $\boxed{x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow[x \to 0]{} 1}$

Jules R.

Colle de la semaine 14

Énoncé : Étudier les limites éventuelles en 0^+ et en $+\infty$ des trois fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad$ $f_2 : x \longmapsto \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$f_3 : x \longmapsto \cos(x)\,\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Solution :

$f_1 : x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$f_1 : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+ \\ \\ \sin(X) \xrightarrow[X \to 0^+]{} 0 \end{array}\right\} \overset{\text{composition}}{\underset{\text{de limites}}{\Longrightarrow}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

(continuité de sinus en 0)

Posons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$U_n = \frac{1}{2\pi(n+1)} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{2\pi_n + \frac{\pi}{2}}$$

On a :

$$U_n \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad v_n \longrightarrow 0$$

Or, on a : $f_1(U_n) = \sin(2\pi(n+1))$ $\quad$ et $\quad$ $f_1(v_n) = \sin(2\pi_n + \frac{\pi}{2})$

$$f_1(U_n) \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad f_1(v_n) \longrightarrow 1$$

Ainsi, par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que f_1 n'a pas de limite en 0^+.

$f_2 : x \longmapsto \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

On a :

$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq |\sin(x)|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |\sin(x)|$$

propriété algébrique de |.|

$$\Rightarrow 0 \leq \left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |\sin(x)|$$

$0 \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ et $|\sin(x)| \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ (continuité de sin en 0)

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin(x) \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq |\sin(x)|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

$0 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ (Q1)

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

$f_3 : x \longmapsto \cos(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$f_3 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

Posons $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$U_n = \frac{1}{2\pi(n+1)} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

On a :

$$U_n \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad v_n \longrightarrow 0$$

Or, on a : $f_3(U_n) = \cos\left(\frac{1}{2\pi(n+1)}\right)\cos(2\pi(n+1))$

$$f_3(v_n) = \cos\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right)\cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$$

Jules R. $f_3(U_n) \longrightarrow 1$ et $f_3(v_n) \longrightarrow 0$

Ainsi, par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que f_3 n'a pas de limite en 0^+

Posons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les suites définies par:

$$U_n = 2\pi(n+1) \text{ et } v_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$

On a:

$$U_n \longrightarrow +\infty \quad \text{et} \quad v_n \longrightarrow +\infty$$

Or, on a: $f_3(U_n) = \cos(2\pi(n+1))\cos\left(\frac{1}{2\pi(n+1)}\right)$

$$f_3(v_n) = \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right)$$

$$f_3(U_n) \longrightarrow 1$$

$$f_3(v_n) \longrightarrow 0$$

Ainsi, par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que f_3 n'a pas de limite en $+\infty$.

Léon. 5 Énoncé. Semaine 44

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer $A^2 - 5A + 6I_2$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-2)(X-3)$

c) En déduire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A^n

Solution

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 5A + 6I_2 = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 0_2$$

b) Soit q un polynome de degrés $n-2$.
soit r un polynome de degrés 1 tels que
$X^n = q(X-2)(X-3) + r(X)$
$r(X) = aX + b$ $(a, b) \in \mathbb{K}$.
(E) $X^n = q(X-2)(X-3) + a(X) + b$.
(E) $X \leftarrow 2$: $2^n = a \times 2 + b$.
(E) $X \leftarrow 3$: $3^n = 3a + b$.

$$\begin{cases} 2a + b = 2^n \\ 3a + b = 3^n \end{cases}$$

donc $\begin{cases} 2a + b = 2^n \\ a = -2^n + 3^n \end{cases}$

donc $\begin{cases} b = 2^n - 2(-2^n + 3^n) \\ a = 2^n - 3^n \end{cases}$

$r(X) = (2^n - 3^n)X + 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Si $n = 1$: $A^n = A$

Si $n \geq 2$, Soit q un polynome tel que

$$A^n = q(A)(A - 2I_2)(A - 3I_2) + 3 \times 2^n I_2 - 2 \times 3^n I_2$$

donc $A^n = q(A)(A^2 - 5A + 6I_2) + 3 \times 2^n I_2 - 2 \times 3^n I_2$

donc $A^n = \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 2 \times 3^n & 0 \\ 0 & 2 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}$ (d'après a))

Tiguin, David

Colle de la semaine 14

Soit $a \in]1, +\infty[$, Calculer, si elle existe, $\lim\limits_{n \to +\infty} \lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}}$

Par propriété de la partie entière :

$$(a^n - 1)^{\frac{1}{n}} < \lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \leqslant a^n$$

En divisant par $a^n > 0$:

$$\left(1 - \frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} < \frac{\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}}}{a} \leqslant 1$$

Puis $\frac{1}{a^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc

$\left(1 - \frac{1}{a^n}\right) \longrightarrow 1$ et donc

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} < \frac{\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}}}{a} \leqslant \underbrace{1}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$$

Par théorème d'encadrement :

$$\frac{\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}}}{a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

et donc $\lfloor a^n \rfloor^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$

Antoine B.

colle de la semaine 14.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A^2, A^3, puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) A est-elle inversible?

Solution:

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = A.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Hypothèse : $P(n)$: " $A^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n = 0 \\ A & \text{si } n = 2k+1 \\ A^2 & \text{si } n = 2(k+1) \end{cases}$ où $k \in \mathbb{N}^{\cancel{*}}$ "

Vérifions par récurrence P pour $n \in \mathbb{N}$,

Initialisation au rang $n=0$:

$$A^0 = I_3 \qquad P(0) \text{ vraie.}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ vraie.

montrons que $P(n+1)$ vraie.

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{cases} A & \text{si } n = 0 \\ A^2 & \text{si } n = 2k+1 \\ A^3 = A & \text{si } n = 2(k+1) \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{N}.$$

$$= \begin{cases} A & \text{si } (n+1) = 2k+1 \\ A^2 & \text{si } (n+1) = 2(k+1) \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{N}.$$

donc $P(n+1)$ vraie.

b/ Montrons que A n'est pas inversible par l'absurde :
Suppose A inversible.

Comme $A^2 \times A = A$ $\quad (\_ \times A^{-1})$

alors $A^2 = I_3$

or $A^2 \neq I_3$ ↯

donc A n'est pas inversible.

Maximilien T.

Colle de la Semaine 9

$$\boxed{\lim_{x\to1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}}$$

<u>Solution :</u>

$$\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}\left(x^{3/2}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(\sum_{k=0}^{2}\sqrt{x}^{k}\right)}{x^{1/2}-1}$$

(factorisation d'une différence de puissance)

$$= \underbrace{\sqrt{x}}_{\xrightarrow{x\to1}\,1}\left(\underbrace{\boxed{1+\sqrt{x}+x}}_{\xrightarrow{x\to1}\,3}\right)$$

Par opérations sur les limites

$$\boxed{\lim_{x\to1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 3}$$

Paul C. Semaine de Colle 14

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln(1+e^x)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\ln(1+e^x)}$

Solution :

Soit $x\in\mathbb{R}^*$,

$$\frac{x}{\ln(1+e^x)} = \frac{x}{\ln\left(e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)\right)}$$

$$= \frac{x}{x+\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{e^x}+1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \textcircled{1} \\ \ln(x) \xrightarrow[x\to\textcircled{1}]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$ (composée de limites)

de plus, $x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, par opération sur les limites, $\frac{\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to\textcircled{0}]{} 1 \\ \frac{\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \textcircled{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}{x}} = \frac{x}{\ln(1+e^x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

(composée de limites)

$$\left.\begin{array}{l} e^{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \\ \ln(1+x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln(1+e^{x}) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$ (composée de limits)

de plus, $x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$, par opération sur les limites,

$$\frac{x}{\ln(1+e^{x})} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$$

d'où $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln(1+e^{x})} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\ln(1+e^{x})} = -\infty \end{cases}$$

Ibrahim.K

Colle de la Semaine

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante

$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \quad f(AB) = f(A)f(B)$

Mq $f(A) = 0 \Rightarrow A$ non inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $f(A) = 0$

par l'absurde on suppose A inversible.

$f(A) \times f(A^{-1}) = 0$

et $f(A A^{-1}) = 0$

donc $f(I_n) = 0$

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$f(B) = f(B \cdot I_n) = f(B) . f(I_n) = 0$

or f est non constante donc par l'absurd

A non inversible

Rayan. G

Colle de la semaine n° 14

Soient a et b des réels strictement positifs.
Etudier la limite éventuelle de la fonction

$$f : x \longmapsto \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

en 0^+

Solution:

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}$$ (Ecriture exp-log)

$$\boxed{= e^{\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}}}$$

On remarque que:

(notation) $\nearrow$

$$A = \frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x} = \frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) - \ln\overbrace{\left(\frac{a^0+b^0}{2}\right)}^{=1}}{x - 0}$$

On reconnaît un taux d'accroissement:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \frac{\ln(a)e^{x\ln(a)} + \ln(b)e^{x\ln(b)}}{a^x+b^x}}$$

En $x = 0$:

$$\frac{\ln(a)e^{x\ln(a)} + \ln(b)e^{x\ln(b)}}{a^x+b^x} =$$

$$\frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{b})$$

propriété logarithme népérien

$$\left.\begin{array}{l} A \xrightarrow[x \to 0]{} \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{b}) \\ \\ e^{X} \xrightarrow[X \to \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{b})]{} \sqrt{ab} \quad (*) \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \sqrt{ab}}$$

Composé de limites

↑

exp φ°

$(*)\ e^{\ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{b})} = e^{\ln(\sqrt{a})} \times e^{\ln(\sqrt{b})} = \sqrt{ab}$ (propr. exp / $\sqrt{a}$ et
$\sqrt{b}$ appartient à $\mathbb{R}_+^*$ et
exp application réciproque
de ln sur $\mathbb{R}_{>0}$)

Youssef B

Colle de la semaine 14

Exercice : Déterminer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en fonction de ses coefficients. En déduire une solution au système linéaire associé dans le cas général.

Solution :

Soit $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d des réels tq $a \neq 0$ et $ad-cb \neq 0$

On cherche à déterminer l'inverse de A en fonction de ses coefficients

$$(A \mid I_2) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ad-cb}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - \frac{c}{a} L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{a} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{a}{ad-cb} L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \middle| \underbrace{\begin{array}{cc} \frac{d}{ad-cb} & -\frac{b}{ad-cd} \\ -\frac{c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{array}}_{B} \right) L_1 \leftarrow L_1 - \frac{b}{a} L_2$$

B est alors l'inverse de A

Dans le cas général, si on a une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que $ad-cb \neq 0$, alors A possède un inverse et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

et si $ad-cb=0$, alors A ne possède pas d'inverse.

Hugo D. Colle de la semaine 14

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad |[A]_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |[A]_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible

<u>Solution</u> : Montrons que $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}$ en raisonnant par l'absurde.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}}$ et $AX = 0$

Comme $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}}$, on pose $B = \{ |x_i| : i \in [\![1,n]\!] \text{ et } |x_i| \neq 0 \}$
et on note i_0 l'indice du max de B

$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad |x_k| \leq |x_{i_0}|$

On note : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j} = [A]_{i,j}$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{C_k}_{\begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \cdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ où $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de A.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 a_{1,1} + x_2 a_{1,2} + \dots + x_n a_{1,n} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k a_{2,k} = 0 \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{n} x_k a_{n,k} = 0 \end{cases}$$

A la i_0 ème ligne :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k a_{i_0 k} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} x_k a_{i_0,k} + x_{i_0} a_{i_0,i_0} = 0$$

$$\Rightarrow a_{i_0,i_0} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} a_{i_0,k} \frac{x_k}{x_{i_0}}$$

$$\Rightarrow |a_{i_0,i_0}| = \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} a_{i_0,k} \frac{x_k}{x_{i_0}} \right|$$

$$\Rightarrow |a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} \left| a_{i_0,k} \frac{x_k}{x_{i_0}} \right|$$ (Inégalité triangulaire)

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,k}| < \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,k}| \left| \frac{x_k}{x_{i_0}} \right|$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} \underbrace{|a_{i_0,k}|}_{>0} \underbrace{\left(1 - \underbrace{\left|\frac{x_k}{x_{i_0}}\right|}_{<1}\right)}_{>0} < 0$$

↯ Contradiction car $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\frac{|x_k|}{|x_{i_0}|} \leq 1$

Donc $\mathrm{Ker}(A) = \left\{ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \right\}$

A est inversible.

EXERCICE 1 — Soient $n \geqslant 2$ un entier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$\left|[A]_{i,i}\right| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|[A]_{i,j}\right| .$$

Démontrer que la matrice A est inversible.

Solution:

Montrons que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

$\boxed{\supset}$ $0 \in \mathrm{Ker}(A)$ car $A \times 0 = 0$

$\boxed{\subset}$ Soit $M \in \mathrm{Ker}(A)$. Montrons que $M = 0$.

$M \in \mathrm{Ker}(A)$ donc $AM = 0$

Ecrivons $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et supposons par l'absurde que $M \neq 0$ donc qu'il existe $m \in [\![1,n]\!]$ tels que $|\lambda_m| > 0$ et $|\lambda_m| = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]}(\lambda_i)$.

$$AM = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1n}\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{nn}\lambda_n = 0 \end{cases}$$

À la ième ligne, on a $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j = 0$

Prenons $i = m$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}\lambda_j = 0$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} a_{mj}\lambda_j = - a_m \lambda_m$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} a_{mj}\lambda_j\right| = |a_{mm}\lambda_m|$$

or selon l'hypothèse sur A,

$$|a_{mm}\lambda_m| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} |a_{m,j}||\lambda_m|$$

$$> \sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} |a_{mj}||\lambda_j|$$

car $\lambda_m \geqslant \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

On déduit $\left|\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} a_{mj}\lambda_j\right| > \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{n} |a_{mj}\lambda_j|$.

Ce qui contredit l'inégalité triangulaire.

On a donc $\ker(A) = \{0\}$ d'où A est inversible.

Mehdi B Colle de la semaine 14

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et on définit la matrice

$$A = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

On note $\overline{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A.
Calculer $A\overline{A}$ et conclure sur l'inversibilité de A.

Solution : • Calculons d'une part les coefficients diagonaux de la matrice $A\bar{A}$ (qui est bien définie car A et $\bar{A}$ sont de format (n, n)).

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$[A\bar{A}]_{k,k} = \sum_{l=1}^{n} [A]_{kl} [\bar{A}]_{lk}$$

$$\overset{\circledast}{=} \sum_{l=1}^{n} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)(l-1)}\right)\left(e^{-i\frac{2\pi}{n}(l-1)(k-1)}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} e^{i0}$$

Il vient alors :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!] \quad [A\bar{A}]_{kk} = n}$$

• Calculons maintenant les coefficients diagonaux de la matrice $A\bar{A}$.
Soit $(k, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $k \neq j$. En reprenant l'égalité $\circledast$:

$$[A\bar{A}]_{kj} = \sum_{l=1}^{n} \left(\omega^{(k-1)(l-1)} \overline{\omega^{(l-1)(j-1)}}\right)$$

$$[A\bar{A}]_{kj} = \sum_{l=1}^{n} e^{i\frac{2\pi}{n}[(k-1)(l-1)-(l-1)(j-1)]}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} e^{i\frac{2\pi}{n}(l-1)[(k-1)-(j-1)]}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} e^{i\frac{2\pi}{n}(l-1)(k-j)}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left(\omega^{(k-j)}\right)^{(l-1)}$$

Le changement d'indice $l'=l-1$ donne :

$$[A\bar{A}]_{kj} = \sum_{l'=0}^{n-1} \left(\omega^{(k-j)}\right)^{l}$$

Comme $k \neq j$, $e^{i\frac{2\pi}{n}(k-j)} \neq 1$ ie $\omega^{(k-j)} \neq 1$. Donc :

$$[A\bar{A}]_{kj} = \frac{1-(\omega^{(k-j)})^{n}}{1-\omega^{(k-j)}} = \frac{1-(\omega^{n})^{k-j}}{1-\omega^{(k-j)}} \underset{\omega\in\mathbb{U}_n}{\underset{\uparrow}{=}} 0$$

$$\boxed{A\bar{A} \text{ est donc diagonale}}$$

<u>Conclusion</u> : des deux points précédents nous déduisons

$$A\bar{A} = nI_n \overset{n\in\mathbb{N}^*}{\Longrightarrow} A\frac{1}{n}\bar{A} = I_n$$

A est donc inversible à droite. D'après le cours, A est inversible et : $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{n}\bar{A}}$

Pierre T.

Colle de la semaine 14

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique qui converge en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Solution :

Montrons que f est constante par l'absurde. On suppose f non constante.

. f converge en $+\infty$ donc : $\exists l \in \mathbb{R} \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$.

. f est périodique donc : $\exists T \in \mathbb{R}_{>0} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$

. f est non constante donc : $\exists x_1 \in \mathbb{R} \quad f(x_1) \neq l$.

$$\left.\begin{array}{l} f(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} l \\ nT + x_1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \overset{\text{comp}}{\underset{\text{de lim}}{\Longrightarrow}} f(nT + x_1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

$$\Rightarrow f(x_1) = l \quad \mathcal{E}$$

On suppose maintenant f constante. Montrons que f est périodique et converge en $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) = f(x)$ donc f est 1-périodique.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq 0 \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$

donc f converge vers $f(0)$ en $+\infty$.

f est donc bien une fonction constante.

Semaine de colle n°14.

MATHEO.N

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des nombres complexes. Donner une CNS pour que la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

soit inversible.

On conjecture que pour que V soit inversibles, λ_1, λ_2 et λ_3 doivent être deux à deux distincts.

Echelonnons V et si l'on trouve 3 pivots elle sera inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_3-\lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2-\lambda_1^2 & \lambda_3^2-\lambda_1^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_1 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \lambda_1^2 L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_3-\lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2-\lambda_1^2 - \frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{\lambda_2-\lambda_1}(\lambda_3-\lambda_1) \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - \frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{\lambda_2-\lambda_1} L_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_3-\lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2-\lambda_1^2-(\lambda_2+\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1) \end{pmatrix}$$

Or : $\lambda_3^2-\lambda_1^2-(\lambda_2+\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)$

$= (\lambda_3-\lambda_1)\left[\lambda_3+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_1\right]$

$= (\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) \neq 0$

Ainsi on a :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\lambda_2-\lambda_1}^{*} & \lambda_3-\lambda_1 \\ 0 & 0 & \boxed{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}^{*} \end{pmatrix}$$

* non nuls car $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ deux à deux distincts.

Ainsi, on obtient une matrice échelonnées à 3 pivots donc V est inversible si λ_1, λ_2 et λ_3 sont deux à deux distincts.

Ahmed
Amine

Colle semaine 14

Énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et } J = \frac{1}{4}(A + 3I_3)$$

1) Calculer J^2. En déduire J^n $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminez une expression matricielle de A^n en fct° de n, I_3, J.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de A^n

---

Solution :

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1) $$A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 0 & 16 \\ -8 & 1 & -8 \\ -8 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$J = \frac{1}{4} A + \frac{3}{4} I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & 0 & -2 \\ 1 & 1/4 & 1 \\ 1 & 0 & 5/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque que $J^2 = J$

Mq "$J^n = J$"

I) Pour $n = 1$: $J^1 = J$

H) Supp $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (P_n) vraie. Mq (P_{n+1}) vraie.

On a : $J^n = J$

$$\underset{\times J}{\Leftrightarrow} J . J^n = J^2 \Leftrightarrow J^{n+1} = J^2$$

$$\Leftrightarrow J^{n+1} = J \text{ car } J^2 = J.$$

C) $J^n = J$

2) $J = \frac{1}{4} A + \frac{3}{4} I_3$

Donc $-\frac{1}{4} A = -J + \frac{3}{4} I_3$

Donc $A = 4J - 3 I_3$

$$A^n = (4J - 3I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4J)^k (-3 I_3)^{n-k}$$

3) $$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4J)^k (-3 I_3)^{n-k}$$

$$= (-3 I_3)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k J^k (-3)^{n-k} I_3$$

$$= (-3 I_3)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k J (-3)^{n-k} I_3$$

$$= (-3 I_3)^n + J \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k}$$

$$= (-3 I_3)^n + J\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} - (-3)^n \right)$$

$$= (-3 I_3)^n + J\left((4-3)^n - (-3)^n \right)$$

$$= (-3 I_3)^n + J - J(-3)^n$$

$$= (-3)^n (I_3 - J) + J.$$

$$I_3 - J = I_3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $$A^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 2 \\ -(-3)^n & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix}$$

Nicolas . H Colle de la semaine 14

Énoncé

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{pmatrix}$. Est-elle inversible ? (on rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$). Et si j est un complexe quelconque ?

Solution :

À l'aide de matrice augmentée et du pivot de Gauß :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & j & j^2 & 1 & 0 & 0 \\ j^2 & 1 & j & 0 & 1 & 0 \\ j & j^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & j & j^2 & 1 & 0 & 0 \\ j & 1 & j & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - jL_1$$

(car $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ et $j^3 = 1$).

La matrice ne possède donc pas 3 pivots et n'est donc pas inversible.

Soit $j \in \mathbb{C}$ (quelconque).

Analyse : Supposons A est inversible, alors

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & j & j^2 & 1 & 0 & 0 \\ j^2 & 1 & j & 0 & 1 & 0 \\ j & j^2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & j & j^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-j^3 & j-j^4 & -j^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-j^3 & -j & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - j^2 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - jL_1 \end{pmatrix}$$

On sait que si il y a 3 pivots de Gauß, A est inversible,
il faut donc $1-j^3 \neq 0$
Donc $j \in \mathbb{C} \setminus \{e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}, 1\}$
Les candidats pour j est $j \in \mathbb{C} \setminus \{e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}, 1\}$
Synthèse : Soit $j \in \mathbb{C} \setminus \{e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}, 1\}$, donc $1-j^3 \neq 0$

$$\left(\begin{matrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \sim \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & j & j^2 \\ 0 & 1-j^3 & j-j^4 \\ 0 & 0 & 1-j^3 \end{matrix}}_{A'} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -j^2 & 1 & 0 \\ -j & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

~~Apres le pivot de Gauß~~

Après avoir appliqué le pivot de Gauß sur la matrice A, la matrice A' possède 3 pivots $(A \in M_3(\mathbb{C}))$ donc A est inversible

Alexandre M. Colle de la semaine 14

EXERCICE 2 — Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des nombres complexes. Donner une CNS pour que la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{pmatrix}$$

soit inversible.

$*$ désigne un coefficient complexe quelconque.

Les opérations élémentaires conservent l'inversibilité.

Supposons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ deux à deux distincts.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \lambda_4 - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_1^2 & \lambda_3^2 - \lambda_1^2 & \lambda_4^2 - \lambda_1^2 \\ 0 & \lambda_2^3 - \lambda_1^3 & \lambda_3^3 - \lambda_1^3 & \lambda_4^3 - \lambda_1^3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_1 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \lambda_1^2 L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \lambda_1^3 L_1 \end{matrix}$$

Or $\lambda_2 \neq \lambda_1$ donc $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & * & * & * \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 + \lambda_1 & \lambda_3 + \lambda_1 & \lambda_4 + \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 & \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_3^2 & \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_4^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} C_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} C_3 \\ C_4 \leftarrow \frac{1}{\lambda_4 - \lambda_1} C_4 \end{matrix}$$

car $\lambda_2^2 - \lambda_1^2 = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 + \lambda_1)$

et $\lambda_2^3 - \lambda_1^3 = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3^2)$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & * & * & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda_2 & \lambda_4-\lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2-\lambda_2^2+\lambda_1(\lambda_3-\lambda_2) & \lambda_4^2-\lambda_2^2+\lambda_1(\lambda_4-\lambda_2) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3-(\lambda_1+\lambda_2)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2) \end{matrix}$$

Or $\lambda_3^2-\lambda_2^2+\lambda_1(\lambda_3-\lambda_2) = (\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1)$

donc

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & * & * & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3+\lambda_2+\lambda_1 & \lambda_4+\lambda_2+\lambda_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_3 \neq \lambda_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{1}{\lambda_3-\lambda_2} C_3 \\ C_4 \leftarrow \frac{1}{\lambda_4-\lambda_2} C_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & * & * & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{\lambda_4-\lambda_3}_{\neq 0 \text{ par hypothèse.}} \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4-(\lambda_3+\lambda_2+\lambda_1)L_3$$

Cette matrice a la même inversibilité que V et est échelonnée avec $r = 4 = n$, avec n le nombre de lignes (et de colonnes)

Elle est donc inversible.

Par conséquent : $\boxed{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \text{ deux à deux distincts} \implies V \text{ est inversible}}$

Mauer
Leon

Rapport de colle de la semaine 14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $\tilde{A}$ la matrice $(a_{n+1-i,\, n+1-j})_{1 \leq i, j \leq n}$

1 Montrons que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\widetilde{AB} = \tilde{A}\hat{B}$

2. Montrons que pour tout $A \in GL_m(\mathbb{K})$, $\tilde{A} \in GL_m(\mathbb{K})$

1 Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

$$[\widehat{AB}]_{ij} = [AB]_{n+1-i,\, n+1-j}.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{[A]_{n+1-i,\, k}}_{[\tilde{A}]_{ik}} \underbrace{[B]_{k,\, n+1-j}}_{[\tilde{B}]_{kj}}$$

$$= [\hat{A}\hat{B}]_{ij}.$$

2. Soit $A \in GL_m(\mathbb{K})$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_m$$

on a $\hat{A}\widetilde{A^{-1}} = \widehat{A^{-1}}A = \underbrace{\hat{I}_n}_{I_n}$ (par 1).

$$\boxed{\hat{A} \in GL_m(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \hat{A}^{-1} = \widehat{A^{-1}}}$$

Louis D. Semaine de colle n°14

Exercice 1

Pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C(B)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec B (appelé commutant de la matrice B).

$$C(B) = \{M \in \mathscr{M}_n | BM = MB\}.$$

1. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On désire prouver quelques propriétés sur $C(B)$.
    (a) Donner deux éléments évidents de $C(B)$.
    (b) Montrer que si M et M' sont deux éléments de $C(B)$ et λ et μ deux réels alors $\lambda M + \mu M'$ est encore un élément de $C(B)$. On dit que l'ensemble $C(B)$ est stable par combinaison linéaire.
    (c) Montrer que si M et M' sont dans $C(B)$ alors MM' est dans $C(B)$.
    (d) En déduire que tout polynôme en B, ie tout matrice de la forme $\sum_{k=0}^{p} a_k B^k$ avec $p \geq 0$, est un élément de $C(B)$.
    (e) Montrer que si M est dans $C(B)$ et M est inversible alors M^{-1} est encore un élément de $C(B)$.
2. Soit D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux λ_i sont distincts deux à deux. Soit $M \in \mathbb{C}(D)$.

Solution 1) a) $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et I_n sont dans $C(B)$

b) Soit $(M, M') \in C(B)^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} B(\lambda M + \mu M') &= \lambda BM + \mu BM' && (\text{compatibilité de } \cdot \text{ et } \times) \\ &= \lambda MB + \mu M'B && (M \text{ et } M' \in C(B)) \\ &= (\lambda M + \mu M')B \end{aligned}$$

Donc $C(B)$ est stable par combinaison linéaire

c) Soit $(M, M') \in C(B)^2$

$$B M M' \underset{M \in C(B)}{=} M B M' \underset{M' \in C(B)}{=} M M' B \text{, donc } MM' \in C(B)$$

d) Soit $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p) =$ " $\sum_{k=0}^{n} a_k B^k \in C(B)$ "
On raisonne par récurrence simple.
__Initialisation à $p = 0$__

$a_0 I_n \in C(B)$ (Q1) Donc $\mathcal{P}(0)$ vrai.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(p)$ est vrai.
Montrons que $P(p+1)$ est vrai.

$$\sum_{k=0}^{p+1} a_k B^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{p} a_k B^k}_{\in C(B) \text{ par HR}} + a_{p+1} B^{p+1}$$

$$= \underline{\qquad\qquad} + a_{p+1} B^{p} B$$

Or $B^p \in C(B)$ d'après HR
et ainsi $B^p B \in C(B)$ d'après c).

Comme $C(B)$ est stable par combiné
linéaire, $\sum_{k=0}^{p+1} a_k B^k \in C(B)$.

$P(n+1)$ est ainsi vrai.

$\forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{p} a_k B^k \in C(B)$

e) Soit $M \in C(B)$ tq $M \in GL_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}
& BM = MB \\
\Rightarrow\ & B = MBM^{-1} && (\_ \times M^{-1}) \\
\Rightarrow\ & M^{-1}B = BM^{-1} && (M^{-1} \times \_) \\
\Rightarrow\ & M^{-1} \in C(B)
\end{aligned}$$

2) Non résolue en colle (question tronquée à l'impression)

Titouan : Rapport de colle semaine 14

D

Determiner la limite eventuelle en $+\infty$ de

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 5\ln(x)} - \sqrt{x^2 + 7x - 3}$$

$\ln(x)$ definie en $+\infty$

$x^2 - x + 5\ln(x) > 0$ quand x tend vers $+\infty$

$x^2 + 7x - 3 > 0$ quand x tend vers $+\infty$

f bien definie en $+\infty$

On multiplie par le conjugué

$$\left(\sqrt{x^2 - x + 5\ln(x)} + \sqrt{x^2 + 7x - 3}\right) f : x \mapsto -8x + 3 + 5\ln(x)$$

On note g cette fonction

$$-8x + 3 + 5\ln(x) = x\left(-8 + \underbrace{\frac{3}{x}}_{\xrightarrow{x \to +\infty} 0} + 5\underbrace{\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}_{\xrightarrow{x \to +\infty} 0}\right)$$

CC

donc $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

On étudie donc la limite de

$$* = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 - x + 5\ln(x)} + \sqrt{x^2 + 7x - 3}} = \frac{-8 + 3 + 5\ln(x)}{\sqrt{x^2 - x + 5\ln(x)} + \sqrt{x^2 + 7x - 3}}$$

On simplifie le denominateur

$$\sqrt{x^2 - x + 5\ln(x)} + \sqrt{x^2 + 7x - 3} = \sqrt{x^2 + 7x - 3}\underbrace{\left(1 + \underbrace{\sqrt{\frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{5\ln(x)}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}}}_{\xrightarrow{x \to +\infty} 1}\right)}_{\xrightarrow{x \to +\infty} 2}$$

et $\sqrt{x^2 + 7x - 3} = x\underbrace{\sqrt{1 + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}}}_{\xrightarrow{x \to +\infty} 1}$

$$\text{Donc } * = -8\left(\frac{x + 3 + 5\ln(x)}{x\sqrt{1 + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}}\left(\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{5\ln(x)}{x^2}}{1 + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}}} + 1\right)}\right)$$

$$= -8\left(\frac{\overbrace{1 + \frac{3}{x} + 5\frac{\ln(x)}{x}}^{\xrightarrow{x \to +\infty} 1}}{\underbrace{\sqrt{1 + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}}\left(\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{x} + 5\frac{\ln(x)}{x^2}}{1 + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}}}\right)}_{\xrightarrow{x \to +\infty} 2}}\right) \to -8 \times \frac{1}{2} = -4$$

ainsi $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -4}$

Louis B. Khôlle de la semaine 14

1) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des complexes, Donner une CNS pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$ soit inversible.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Etudier la limite eventuelle de $f : x \mapsto \dfrac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - a^n}$ en α.

---

1) On applique l'algorithme du Pivot de Gauß

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_3-\lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2-\lambda_1^2 & \lambda_3^2-\lambda_1^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_1 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \lambda_1^2 L_1 \end{matrix}$$

$$B = \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_3-\lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2-\lambda_1^2- \\ & & (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1) \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (\lambda_1+\lambda_2) L_2$$

Pour que cette matrice ($\in \mathcal{T}_n^+$) soit inversible suffit que $\lambda_2 \neq \lambda_1$ et $\lambda_3^2 - \lambda_1^2 - (\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1) \neq 0$

i.e. : $\lambda_3^2 - \cancel{\lambda_1^2} - \lambda_1\lambda_3 + \cancel{\lambda_1^2} - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_1 \neq 0$

Montrons par l'absurde que $\lambda_3 \neq \lambda_1$ et $\lambda_3 \neq \lambda_2$

① Supp $\lambda_3 = \lambda_2$ alors

$\Rightarrow \cancel{\lambda_3^2} - \cancel{\lambda_1\lambda_3} - \cancel{\lambda_3^2} + \cancel{\lambda_3\lambda_1} \neq 0$

$\Rightarrow \qquad 0 \neq 0$ ↯

② De même pour $\lambda_3 \neq \lambda_1$: $\Rightarrow 0 \neq 0$ ↯

Donc $\lambda_3 \neq \lambda_1$ et $\lambda_3 \neq \lambda_2$

Comme B est le produit de V et de matrices elementaires

Ainsi V inversible $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2 \neq$ 2 à 2.

2) Etudions la limite éventuelle de f en α.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$

$$f(x) = \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha} \times \frac{x - \alpha}{x^n - \alpha^n}$$

On reconnait 2 taux d'accroissement (à l'$\frac{1}{\cdot}$ près)

Ainsi, comme $g : x \mapsto x^{n+1}$ et $h : x \mapsto x^n$ sont dérivables en α :

$$\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha} \xrightarrow[x \to \alpha]{} (n+1)\alpha^n \qquad \text{et}$$

$$\frac{x - \alpha}{x^n - \alpha^n} \xrightarrow[x \to x]{} \frac{1}{n\alpha^{n-1}}$$

Ensuite, par opération sur les limites on déduit :

$$f(x) \xrightarrow[x \to \alpha]{} (n+1)\frac{\alpha}{n}$$

Rapport de colle, semaine 14

Wassim
n.

Exercice :

1) Montrer que toute combinaison linéaires de matrices symetriques est symetrique.

2) Trouver et demontrer une CNS pour que le produit de 2 matrices symetriques soit symétrique.

① Soit $(\lambda_1, \lambda_2, S_1, S_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times S_n \times S_n$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (S_1 + S_2) = \lambda_1 \cdot S_1 + \lambda_1 \cdot S_2 + \lambda_2 \cdot S_1 + \lambda_2 \cdot S_2$$

$$= \lambda_1 (S_1 + S_2) + \lambda_2 \cdot (S_1 + S_2)$$

Donc toute combinaison lineaire de matrices symetriques est symetrique

② Soit $(S_1, S_2) \in S_n^2(\mathbb{K})$

$$(S_1 \times S_2)^T = S_2^T \times S_1^T$$

$$= S_2 \times S_1 \quad \text{(matrices symetriques)}$$

donc le produit de deux matrices symétriques est symetrique si et seulement si les 2 matrices commutent

Robin G.

Colle de la semaine 14

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$, $\mathbb{K}$ corps, Déterminer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en fonction de ses coefficients. En déduire une solution au système linéaire associé.

Solution :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{si } a = 0 \longrightarrow (*)$$

• si $a \neq 0$:

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{c}{a} L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{c}{a} b & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right)$$

si $d - \frac{c}{a} b = 0$, L_2 est nulle, la matrice n'est pas inversible.

si $d - \frac{c}{a} b \neq 0$, on a 2 pivots, la matrice est inversible :

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{a} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{d - \frac{c}{a} b} L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \underbrace{\frac{1}{d - \frac{c}{a} b}}_{= \frac{a}{ad-bc}} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{b}{a} L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

Ainsi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2$

et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(*) : cas où $a=0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Si $c=0$ ou $b=0$, on n'a qu'un seul pivot et la matrice n'est pas inversible.

si $bc \neq 0$:

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{c}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{b}L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{d}{c} & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{d}{c}L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-d}{bc} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{-bc} & \frac{-b}{-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{-bc} & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $\frac{1}{-bc} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion :

Si : $a \neq 0$ et $d - \frac{b}{a}c \neq 0$ (ie $ad-bc \neq 0$)
ou $a=0$ et $bc \neq 0$ (ie $ad-bc \neq 0$)

Alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2/2

Robin G. 3) Soit (S) : $AX = B$, $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, $(e,f) \in \mathbb{R}^2$.

Si $ad - bc \neq 0$, A est inversible et :

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{de - bf}{ad - bc} \\ \frac{af - ce}{ad - bc} \end{pmatrix}$$

$$Sol_{(S)} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{de - bf}{ad - bc} \\ \frac{af - ce}{ad - bc} \end{pmatrix} \right\} .$$

3/3

Colle de la semaine 14

Louis Guillaume S.

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & x & x^2 \\ 1/x & 0 & x \\ 1/x^2 & 1/x & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que $(A - \lambda I_3)(A - \mu I_3) = 0$.
2. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe α_n et β_n entiers tels que

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3.$$

Solution : Commençons par calculer A^2. $A \times A$ est bien défini donc :
$\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x^2 \\ x^{-1} & 0 & x \\ x^{-2} & x^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & x & x^2 \\ x^{-1} & 0 & x \\ x^{-2} & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & x & x^2 \\ x^{-1} & 2 & x \\ x^{-2} & x & 2 \end{pmatrix}$$

Rappel

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons alors que $A^2 = A + 2I_3$ (*)

Soient $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^*$ dont nous supposons l'existence.

$$(A - \lambda I_3)(A - \mu I_3) = 0$$
$$\Rightarrow A^2 - (\lambda + \mu)A + \lambda\mu I_3 = 0$$

De (*) nous déduisons que λ et μ vérifient :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\mu = -2 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases}$$

. Donc $\lambda;\mu$ existent et on trouve :

$$\boxed{\mathcal{S}ol(S) = \{(2;-1);(-2;1)\}}$$

2) D'après Q1 nous avons :

$$A^2-(\lambda+\mu)A+\lambda\mu I_3=0$$
$$\Rightarrow A\left(A-(\lambda+\mu)I_3\right)=-\underbrace{\lambda\mu}_{\neq 0} I_3 \quad \text{d'après Q1.}$$
$$\Rightarrow A\left(-\frac{1}{\lambda\mu}A+\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}I_3\right)=I_3$$
$$\Rightarrow A\underbrace{\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}I_3\right)}=I_3$$

Donc A est inversible par la droite et on pose

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I_3)}$$

3) Soit $n\in\mathbb{N}$. On raisonne par récurrence et on pose.

$$P(n)=\text{"}\exists(\alpha_n;\beta_n)\in\mathbb{R}^2\quad A^n=\alpha_n A+\beta_n I_3\text{"}$$

Initialisation à $n=0$

$$A^0=I_3.\quad\Rightarrow\quad\alpha_0=0\ \text{et}\ \beta_0=1$$

P(0) est donc vraie

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé tel que P(n) est vraie. Démontrons P(n+1)

$$A^{n+1}=A^n\times A=(\alpha_n A+\beta_n I_3)A$$

$$=\alpha_n A^2+\beta_n A$$

Or d'après (*) dans Q1 :

$$=\alpha_n(A+2I_3)$$
$$=\underbrace{(\alpha_n+\beta_n)}_{\alpha_{n+1}}A+\underbrace{2\alpha_n}_{\beta_{n+1}}I_3$$

Donc P(n+1) est vraie

Conclusion : La propriété a été initialisée et est héréditaire, alors d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 0.

Pierre V. Colle de la semaine 14

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et on definit la matrice $A = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

On note $\bar{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A. Calculer $A\bar{A}$ et conclure sur l'inversibilite de A

Solution

Soit $(u,v) \in [\![1,n]\!]^2$

$$[A\bar{A}]_{uv} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{uk} [\bar{A}]_{kv} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(u-1)(k-1)} \times \bar{\omega}^{(k-1)(v-1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{2\pi}{n}(u-1)(k-1)} \times e^{-i\frac{2\pi}{n}(k-1)(v-1)} = \sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)(u-v)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-v)} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{u-v})^k \quad \left(\text{changement d'indice } k' = k-1\right)$$

1e cas : $u = v$

$$[A\bar{A}]_{uu} = \sum_{k=1}^{n} \omega^{(k-1)(u-u)} = \sum_{k=1}^{n} \omega^0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

2e cas : $u \neq v$

$$[A\bar{A}]_{uv} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{u-v})^k \underset{(\circledast\ \omega^{u-v} \neq 1)}{=} \frac{1-(\omega^{u-v})^n}{1-\omega^{u-v}} = \frac{1-(\omega^n)^{u-v}}{1-\omega^{u-v}}$$

$$= 0 \quad (\omega \in \mathbb{U}_n)$$

⊛ Supposons que $\omega^{u-v} = 1$ par l'absurde. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$e^{i\frac{2\pi}{n}(u-v)} = e^{1.0}$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{2\pi}{n}(u-v) = 2\pi k$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{n}(u-v) = k$$

Or $1-n \leq u-v \leq n-1$ donc $\frac{u-v}{n} \notin \mathbb{Z}$ donc $\omega^{u-v} \neq 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

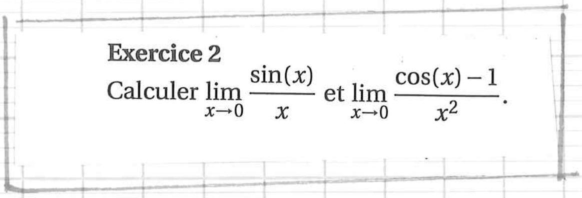
On a donc $A\bar{A} = n I_n$

donc $A.\left(\frac{1}{n}\bar{A}\right) = I_n$

A est inversible à droite donc $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{n}\bar{A}}$

Billy. G

Colle de la semaine
14



Exercice 2
Calculer $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}$.

Solution: On sait que $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$

Ainsi, par taux d'accroissement: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x} = \cos(0)=1$

On sait que: $\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \left(\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)\left(\frac{-(1-\cos(x))}{x^2}\right)$

$$= \frac{-(1-\cos^2(x))}{(1+\cos(x))x^2}$$

Or: $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$

$$= \frac{-1}{1+\cos(x)}\,\frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

Par taux d'accroissement, $\frac{\sin^2(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to0]{} 1^2=1$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{-1}{1+\cos(x)} \xrightarrow[x\to0]{\text{cos est continue en 0}} -\frac{1}{2}\\[2ex] \frac{\sin^2(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to0]{} 1\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{les limites}]{\text{opérations sur}} \frac{\cos(x)-1}{x^2} \xrightarrow[x\to0]{} -\frac{1}{2}$$