Billy. G

Colle de la semaine 13

EXERCICE 12 — On pose, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$SO_2(\mathbb{R}) := \left\{ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.

Solution :

• Mq $(SO_2(\mathbb{R}), \times) \subset (GL_2(\mathbb{R}), \times)$

Soit $R(\theta) \in (SO_2(\mathbb{R}), \times)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Det}(R) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$

Donc $(SO_2(\mathbb{R}), \times) \subset (GL_2(\mathbb{R}), \times)$

• Mq $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ stable par produit

Soit $(R_1(\theta_1), R_2(\theta_2)) \in (SO_2(\mathbb{R}), \times)^2$ avec $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

$$R_1(\theta_1) \times R_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\underbrace{\theta_1+\theta_2}_{\in\mathbb{R}}) & -\sin(\underbrace{\theta_1+\theta_2}_{\in\mathbb{R}}) \\ \sin(\underbrace{\theta_1+\theta_2}_{\in\mathbb{R}}) & \cos(\underbrace{\theta_1+\theta_2}_{\in\mathbb{R}}) \end{pmatrix}$$

Donc $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ stable par produit.

• Mq $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ stable par passage à l'inverse.

Soit $R(\theta) \in (SO_2(\mathbb{R}), \times)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

$$R^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Avec $\theta \leftarrow -\theta$, on a :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Donc $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est stable par passage à l'inverse.

Donc $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est un sous grpe de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.

Tiguin, David. Colle de la semaine 13

Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que M^2 est une combinaison linéaire de M et de I_3
2. Montrer que M est inversible
3. Montrer que pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, il existe a_K et b_K réels tels que : $M^K = a_K M + b_K I_3$
4. Déterminer une expression explicite de a_K et b_K puis de M^K en fonction de $K \in \mathbb{N}^*$

1. $M \times M = \begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -3 & 7 & -3 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

Ainsi M^2 peut s'écrire comme $M^2 = 3M - 2I_3$

2. D'après 1 et comme I_3 et M, M et M commutent on obtient d'une part :

$2I_3 = 3M - M^2$ donc $I_3 = \frac{3}{2}M - \frac{1}{2}M^2$ alors

$I_3 = M\left(\frac{2}{3}I_3 - \frac{1}{2}M\right)$ et $I_3 = \left(\frac{2}{3}I_3 - \frac{1}{2}M\right)M$

d'où M est inversible.

3. Démontrons par récurrence simple que pour tout $K \in \mathbb{N}^*$ $P(K)$: " il existe a_K et b_K tel que $M^K = a_K M + b_K I_K$ " :

Initialisation au rang 1 :

$M^1 = \underset{a_1}{1} M + \underset{b_1}{0} I_3$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $P(k)$ vraie, montrons $P(k+1)$:

$M^{k+1} = M^k \times M$

$\underset{HR}{=} (a_k M + b_k I_3) M$ (bilinéarité)

$= a_k M^2 + b_k M$

$= a_k (3M - 2I_3) + b_k M$ (factorisation)

$= a_k 3M + b_k M - 2a_k I_3$

$= \underbrace{(3a_k + b_k)}_{a_{k+1} \in \mathbb{R}} M \underbrace{-2a_k}_{b_{k+1} \in \mathbb{R}} I_3$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $\exists (a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^k = a_k M + b_k I_3$

4. $a_1 = 1$ $b_1 = 0$

$a_2 = 3$ $b_2 = -2$

$a_3 = 7$ $b_3 = -6$

On conjecture que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $a_k = 2^k - 1$ et $b_k = -2^k + 2$

Vérifions par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$;

$P_2(k) : M^k = (2^k - 1)M + (-2^k + 2) I_3$

Initialisation au rang 1 :

$M = (2-1)M + (-2+2) I_3 = M$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(k)$ vraie. Montrons $P(k+1)$ vraie.

$M^{k+1} = M^k \times M$

$\underset{(HR)}{=} [(2^k - 1)M + (-2^k + 2) I_3] \times M$

$= (2^k - 1)M^2 + (-2^k + 2)M$ (développement)

$= (2^k - 1)(3M - 2I_3) + (-2^k + 2)M$ $(M^2 = 3M - 2I_3)$

$= 2^k 3M - 2^{k+1} I_3 - 3M + 2I_3 - 2^k M + 2M$

$= 2^k 3M - 2^k M - M + (-2^{k+1} + 2) I_3$ $(-2^{k+1} I_3 + 2I_3)$

$= 2^k (3M - M) - M + (-2^{k+1} + 2) I_3$ (fact par 2^k)

$= (2^{k+1} - 1) M + (-2^{k+1} + 2) I_3$ $(2^k \times 2M = 2^{k+1} M)$

$P(k+1)$ est vérifiée et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $M^k = (2^k - 1) M + (-2^{k+1} + 2) I_3$

Anaé. D

Rapport de colle S13

Soient un entier $n \geq 2$. Démontrer que
$$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A \times A^T = I_n\}$$
est un sous groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), +)$

Solution : Soit $n \geq 2$

- $I_n \in SO_n(\mathbb{R})$ car $I_n \times I_n^T = I_n \times I_n = I_n$ (I_n symétrique)
- Soit $(A_1, A_2) \in SO_n(\mathbb{R})^2$. Montrons que $A_1 \times A_2^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$

$A_1 \in SO_n(\mathbb{R})$ d'où $A_1 \times A_1^T = I_n$

$A_2 \in SO_n(\mathbb{R})$ d'où $A_2 \times A_2^T = I_n$

Donc A_2 est inversible à droite. Donc A_2 est inversible et $A_2^{-1} = A_2^T$.

D'où $A_1 \times A_2^{-1} = A_1 \times A_2^T$.

On calcule
$$\begin{aligned}
(A_1 \times A_2^T) \times (A_1 \times A_2^T)^T &= A_1 \times A_2^T \times (A_2^T)^T \times A_1^T && \text{(transposé d'un produit)}\\
&= A_1 \times A_2^T \times A_2 \times A_1^T && \text{(caractère évolutif)}\\
&= A_1 \times I_n \times A_1^T && (A_2 \in SO_n(\mathbb{R}) \text{ + inversibilité à gauche})\\
&= A_1 \times A_1^T\\
&= I_n && (A_1 \in SO_n(\mathbb{R}))
\end{aligned}$$

Donc $SO_n(\mathbb{R})$ est stable par produit tordu. Donc $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), +)$

Pierre V. Colle de la semaine 13

Soit $E = (\mathbb{R} \setminus \{2\}, *)$ avec $x * y = xy - 2x - 2y + 6$
Montrer que $(E, *)$ est un groupe abélien

Solution

• Montrons que $*$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ Montrons que $x * y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par l'absurde

Supposons que $x * y = 2$

$\Rightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 2$

$\Rightarrow x(y-2) - 2y + 4 = 0$

$\Rightarrow (y-2)(x-2) = 0$

$\Rightarrow y = 2$ ou $x = 2$ ($\mathbb{R}$ est intègre)

Or $x \neq 2$ et $y \neq 2$ donc $x * y \neq 2$ Donc $*$ est une loi de composition interne

• Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\})^3$

$(x * y) * z = (xy - 2x - 2y + 6) * z$

$= xyz - 2xz - 2yz + 6z - 2xy + 4x + 4y - 12 - 2z + 6$

$= xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$

$x * (y * z) = x * (yz - 2y - 2z + 6)$

$= xyz - 2xy - 2xz + 6x - 2x - 2yz + 4y + 4z - 12 + 6$

$= xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$

$\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\})^3 \quad (x * y) * z = x * (y * z)$

Donc la loi $*$ est associative

• Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}\setminus\{2\})^2$

$x * y = xy - 2x - 2y + 6 \underset{\uparrow}{=} yx - 2y - 2x + 6 = y * x$

+ et x sont commutatives

Donc <u>la loi * est commutative</u>

• <u>Analyse</u> : Supposons qu'il existe $e \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ tel que

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \qquad x * e = x \ (= e * x)$

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$x * e = x$

$\Rightarrow xe - 2x - 2e + 6 = x$

$\Rightarrow e(x-2) = 3x - 6$

$\underset{(x-2\neq 0)}{\Rightarrow} e = 3$

Nous avons un candidat $e = 3$

<u>Synthèse</u> Vérifions si 3 satisfait les conditions

$3 \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$x * 3 = 3 * x = 3x - 2\times 3 - 2x + 6 = x$

Donc <u>la loi * possède un neutre qui est 3</u>

· Analyse : Supposons qu'il existe $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tel que

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $\quad x * y = 3 \ (= y * x)$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$x * y = 3$$
$$\Rightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 3$$
$$\Rightarrow y(x-2) = 2x - 3$$
$$\underset{(x-2 \neq 0)}{\Rightarrow} y = \frac{2x-3}{x-2}$$

Nous avons un candidat $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$

Synthèse : Vérifions si y satisfait les conditions

Montrons que $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Par l'absurde, supposons que $y = 2$

$$y = 2$$
$$\Rightarrow \frac{2x-3}{x-2} = 2$$
$$\Rightarrow 2x - 3 = 2x - 4$$
$$\Rightarrow -3 = -4 \quad ↯$$

Donc $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$x * y = y * x = \left(\frac{2x-3}{x-2}\right) * x = \frac{2x-3}{x-2} \times x - 2 \times \frac{2x-3}{x-2} - 2x + 6$$
$$= \frac{2x-3}{x-2}(x-2) - 2x + 6 = 3$$

Donc $\underline{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \ \exists y \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad x * y = 3 = y * x}$

Donc $\boxed{(E, *) \text{ est un groupe abelien}}$

MATHEO.N. Exercice de colle semaine 14.

Exercice 9 : Soit (G, *) un groupe tel que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x * x = e$. Montrer que le groupe G est un groupe commutatif.

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

On a : pour tout $z \in \mathbb{Z}$: $z * z = e$

$$\underset{\times z^{-1}}{\Longrightarrow} \quad z = z^{-1} \quad (*)$$

[G est un groupe]

Ainsi : $(x * y) * (x * y) = e$

$$\underset{-\times y^{-1}}{\Longrightarrow} \quad x * y * x = y^{-1}$$

$$\underset{-\times x^{-1}}{\Longrightarrow} \quad x * y = y^{-1} * x^{-1}$$

$$\underset{(*)}{\Longrightarrow} \quad x * y = y * x$$

Ainsi, (G, *) est un groupe commutatif.

Jules R. Colle de la semaine 13

Soient A et M deux matrices carrées.
a) Montrer que si $M^3 = A$ alors A et M commutent
b) On pose $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $M^3 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

SOLUTION :

a) Soient A et M deux matrices carrées.
Montrons que :
$$M^3 = A \Rightarrow AM = MA$$
Supposons $M^3 = A$.

$$M^3 = A \overset{\times M}{\Rightarrow} M^4 = AM$$
$$\Rightarrow M \times M^3 = AM$$
$$\underset{M^3 = A}{\Rightarrow} MA = AM$$

Donc A et M commutent.

b) Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On sait, d'après a, que si $M^3 = A$ alors A et M commutent.
On calcule donc AM et MA.

$$AM = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a & 8b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

$$MA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a & -b \\ 8c & -d \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} 8a & 8b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a & -b \\ 8c & -d \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{cases} 8a = 8a \\ 8b = -b \\ -c = 8c \\ -d = -d \end{cases} \iff \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = d \end{cases}$$

La matrice M devient donc :

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\text{et } M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & d^3 \end{pmatrix}$$

L'équation devient donc :

$$\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & d^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On doit donc résoudre les équations

$a^3 = 8$ d'inconnue $a \in \mathbb{R}$

et $d^3 = -1$ d'inconnue $d \in \mathbb{R}$

Par analyse - synthèse :

(A) On a les équations :

$a^3 = 8$

donc $a^3 - 8 = 0$

donc $(a-2)(a^2+2a+4) = 0$ (factorisation avec racine réelle)

Puisque $\mathbb{R}$ est intègre, il suffit que

$a - 2 = 0$ ou $(a^2 + 2a + 4) = 0$

Jules R. Pour $a^2+2a+4=0$, on calcule :

$$\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 4 = 4-16 = -12 < 0$$

Donc les racines sont complexes.

Nous avons donc pour unique candidat de l'équation $a^3=8$ ($a\in\mathbb{R}$) :

$$a = 2$$

Pour l'autre équation

$$d^3 = -1$$

donc $d^3+1=0$

donc $(d+1)(d^2-d+1)=0$ (factorisation par une racine réelle)

Par intégrité de $\mathbb{R}$ il suffit que :

$d+1=0$ ou $d^2-d+1=0$

Pour $d^2-d+1=0$, on calcule :

$\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times 1 = -3 < 0$

Donc les racines sont complexes.

Nous avons donc pour unique candidat de l'équation $d^3=-1$ ($d\in\mathbb{R}$).

$$d=-1.$$

(5) Vérifions que nos deux candidats fonctionnent :

Pour $a=2$: $a^3 = 2^3 = 8$ OK

Pour $d=-1$: $d^3 = (-1)^3 = -1$ OK

On a donc pour solution de l'équation $M^3=A$, l'unique

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ELIOTT SV. SEMAINE 13

Exercice 1. On définit l'ensemble de matrices suivant :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que G est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$.

SOLUTION :

On utilise la définition des sous groupes et on montre que :

- $I_3 \in G$ (1)
- G est stable par produit (2)
- G est stable par passage à l'inverse. (3)

(1) avec $x = 0$, il vient naturellement que $I_3 \in G$.

on notera par la suite $I_3 = M_0$.

(2) Soit $(M_x, M_y) \in G^2$ tq :

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -y^2 & 1 & y \\ -2y & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$M_x \times M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 - y^2 - 2xy & 1 & x+y \\ -2x - 2y & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(x+y)^2 & 1 & x+y \\ -2(x+y) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $M_x \times M_y \in G$ (comme $x+y \in \mathbb{R}$) et on remarque $M_x \times M_y = M_{x+y}$.

(3) Comme $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a la relation $M_a \times M_b = M_{a+b}$ dans G,

on peut spécialiser à $b \leftarrow -a$. Il vient $M_a \times M_{-a} = M_{a-a} = M_0 = I_3$.

Par conséquent, toutes matrices $M_a \in G$ sont inversibles, d'inverses M_{-a}. $\square$

Exercice : Soit M une matrice carrée commutant avec toutes les matrices de mêmes dimensions. Caractériser M.

Solution :

On conjecture que $M \in \mathrm{Vect}(I_n)$.

$\boxed{\subset}$ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ AM = MA$.

Soit $i \in [\![1;n]\!]$

Prenons $A = E_{ii}$

On a : $E_{ii} M = M E_{ii}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} [M]_{ik} E_{ik} = \sum_{k=1}^{n} [M]_{ki} E_{ki}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{\text{ième colonne}} \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ième ligne} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{\text{ième ligne}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{ième colonne} \end{array}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \leftarrow \text{ième},\ \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{ième} \end{array}$$

Nous avons cette égalité pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ donc :

$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $M = \mathrm{Diag}(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $(u;v) \in [\![1;n]\!]$, $u \neq v$ tels que $\lambda_u \neq \lambda_v$

Prenons $A = E_{uv} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$M E_{uv} = E_{uv} M$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} M_{ku} E_{kv} = \sum_{k=1}^{n} E_{vk} M_{vk} \leftarrow 0 \text{ si } k \neq v$$

0 si $k \neq 0$

$$\Rightarrow M_{uu} E_{uv} = E_{uv} M_{vv}$$

$$\Rightarrow \lambda_u = \lambda_v \ \lightning$$

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tels que $M = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda, \dots, \lambda}_{n \text{ fois}})$

d'où $M \in \mathrm{Vect}(I_n)$

$\boxed{\supset}$ Soit $M \in \mathrm{Vect}(I_n)$ alors : $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tels que $M = \lambda I_n$

or $\underbrace{\lambda I_n}_{M} A = \lambda A = A \lambda = A \underbrace{\lambda I_n}_{M}$

Stanislas G.

Colle de la semaine n°13

Exercice 12 — On pose, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$SO_2(\mathbb{R}) := \left\{ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.

Solution :

avec $\theta = 0 \in \mathbb{R}$ on a :

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad \text{donc } I_2 \in SO_2(\mathbb{R})$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$R(\theta) \times R(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \\ \sin(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\lambda) - \sin(\theta)\sin(\lambda) & -\cos(\theta)\sin(\lambda) - \cos(\lambda)\sin(\theta) \\ \cos(\lambda)\sin(\theta) + \sin(\lambda)\cos(\theta) & -\sin(\lambda)\sin(\theta) + \cos(\theta)\cos(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\lambda) & -\sin(\theta+\lambda) \\ \sin(\theta+\lambda) & \cos(\theta+\lambda) \end{pmatrix} \quad \text{(formule addition cos et sin)}$$

or $\theta + \lambda \in \mathbb{R}$ donc $R(\theta) \times R(\lambda) \in SO_2(\mathbb{R})$

on sait maintenant : ① $I_2 = R(0)$

② $R(\theta) \times R(\lambda) = R(\theta + \lambda)$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$: $R(\theta) \times R(-\theta) \overset{②}{=} R(\theta + (-\theta)) = R(0) \overset{①}{=} I_2$

et $R(-\theta) \times R(\theta) \overset{②}{=} R(-\theta + \theta) = R(0) \overset{①}{=} I_2$

or $-\theta \in \mathbb{R}$ donc $SO_2(\mathbb{R})$ stable par passage à l'inverse

$SO_2(\mathbb{R})$
- possède le neutre de $\times$ (I_2)
- stable par la loi $\times$
- stable par passage à l'inverse
- est une partie de $GL_2(\mathbb{R})$ (tout élément de $SO_2(\mathbb{R})$ inversible)

$$\boxed{SO_2(\mathbb{R}) \text{ est un sous groupe de } GL_2(\mathbb{R})}$$

Titouan Rapport de colle semaine 13

D

Soit $(G,.)$ un groupe. Pour tout $a \in G$ on définit

$$\tau_a \left| \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto a x a^{-1} \end{array} \right.$$

On note $Int(G) = \{\tau_a \mid a \in G\}$

1) Montrer que $\forall a \in G$, τ_a est un morphisme de groupe

Soit $a \in G$

τ_a morphisme de groupe si $\tau_a(x.y) = \tau_a(x).\tau_a(y)$ avec $(x,y) \in G^2$

Soit $(x,y) \in G^2$

$\tau_a(x.y) = a x y a^{-1}$

$\tau_a(x).\tau_a(y) = a x a^{-1}.a y a^{-1}$

$= a x y a^{-1}$

Donc $\boxed{\tau_a \text{ est un morphisme de groupe } \forall a \in G}$

2) Que vaut $\tau_a \circ \tau_b$

Soit $(a,b) \in G^2$

$\tau_a \circ \tau_b = \tau_a(\tau_b)$

Donc $\boxed{\tau_a \circ \tau_b \left| \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto \tau_a(\tau_b(x)) = a b x . b^{-1} a^{-1} \end{array} \right.}$

3) En déduire que $(Int(G), \circ)$ est un groupe

Soit e le neutre du groupe $(G,.)$

$$\tau_e \left| \begin{array}{l} G \to G \\ x \mapsto e x e^{-1} = x \end{array} \right.$$

Soit $a \in G$

$\tau_e \circ \tau_a(x) = \tau_e(axa^{-1}) = axa^{-1} = \tau_a(x)$

$\tau_a \circ \tau_e(x) = \tau_a(x)$

Donc $Int(G)$ possède un neutre par $\circ$: τ_e

Soit $(a,b,c) \in G^3$

$\tau_a \circ (\tau_b \circ \tau_c) = \tau_a\ (\tau_b \circ \tau_c) = \tau_a(\tau_b(\tau_c))$

$(\tau_a \circ \tau_b) \circ \tau_c = \tau_a \circ \tau_b\ (\tau_c) = \tau_a(\tau_b(\tau_c))$

Donc $\circ$ est une loi associative

Soit $a \in G$ donc a inversible et $a^{-1} \in G$ car G groupe. Soit $x \in G$

$\tau_a \circ \tau_{a^{-1}}(x) = a a^{-1} x (a^{-1})^{-1} a^{-1}$

$= x a a^{-1}$

$= x$

$\tau_{a^{-1}} \circ \tau_a = a^{-1} a x a^{-1} (a^{-1})^{-1}$

$= x$

Donc $\forall a \in G$ τ_a est inversible par $\circ$ et son inverse appartient à $Int(G)$

Donc $\boxed{(Int(G), \circ) \text{ est un groupe}}$

Louis D. Semaine de colle n°13

Soit $(G,\cdot)$ un groupe. Soit $a \in G$ et H un sous-groupe de G. Démontrer que :

$$aHa^{-1} := \{aha^{-1} ; h \in H\}$$

est un sous groupe de G.

- H ss-gpe de G donc $e_G \in H$, ainsi $a e_G a^{-1} = e_G \in aHa^{-1}$, donc $aHa^{-1} \neq \emptyset$.

- Soit $(x,y) \in (aHa^{-1})^2$.
$\exists h_1 \in H \quad x = a h_1 a^{-1}$
$\exists h_2 \in H \quad y = a h_2 a^{-1}$

$$\begin{aligned} & a h_1 a^{-1} \cdot (a h_2 a^{-1})^{-1} \\ = \; & a h_1 a^{-1} \cdot a h_2^{-1} a^{-1} \\ = \; & a h_1 h_2^{-1} a^{-1} \end{aligned}$$

Or, H ss-gpe de G, donc H stable par $\cdot$ et ainsi $h_1 h_2^{-1} \in H$.

Ainsi $a h_1 h_2^{-1} a^{-1} \in aHa^{-1}$.

Il vient alors la stabilité de aHa^{-1} par produit tordu.

On conclut que aHa^{-1} est bien un sous-groupe de G.

Sophie G. Colle de la semaine 13

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Posons } j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } \mathbb{Z}[j] := \{a+bj ; (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}\\ \text{1. Demontrer que } \mathbb{Z}[j] \text{ est un sous anneau de } \mathbb{C}\\ \text{2. On note U l'ensemble des inversibles de } \mathbb{Z}[j].\\ \quad\text{Demontrer que pour tout } z\in\mathbb{Z}[j],\ z\in U\\ \quad\text{si et seulement si } |z|=1. \text{ Determiner U.}\end{array}}$

Solution :

1. $\left.\begin{array}{l}a\in 0\\ b\in 0\end{array}\right\}\ 0\in\mathbb{Z}[j]$

-

$\left.\begin{array}{l}a\in 1\\ b\in 0\end{array}\right\}\ 1\in\mathbb{Z}[j]$

- Soit $\underbrace{(x,y)\in\mathbb{Z}[j]^2}_{\text{ie}}$ Montrons $\begin{array}{l}x+y\in\mathbb{Z}[j]\\ x\times y\in\mathbb{Z}[j]\end{array}$

$\exists(a_1,b_1)\in\mathbb{Z}^2,\ x=a_1+jb_1$

$\exists(a_2,b_2)\in\mathbb{Z}^2,\ y=a_2+jb_2$

$x+y=\underbrace{a_1+a_2}_{\mathbb{Z}}+j\underbrace{(b_1+b_2)}_{\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}[j]$

$x\times y=a_1a_2+j(a_1b_2+a_2b_1)+\underbrace{j^2b_1b_2}$ $\hookrightarrow$ Or $1+j+j^2=0$ $\hookrightarrow=(-1-j)b_1b_2$

$=\underbrace{a_1a_2-b_1b_2}_{\in\mathbb{Z}}+j\underbrace{(a_1b_2+a_2b_1-b_1b_2)}_{\in\mathbb{Z}}\quad\in\mathbb{Z}[j]$

- Soit $x\in\mathbb{Z}[j]$ ie $\exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2\ x=a+bj$

$-x=\underbrace{-a}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{(-b)}_{\in\mathbb{Z}}j\in\mathbb{Z}[j]$

$\boxed{\text{Donc } \mathbb{Z}[j] \text{ est un sous anneau de } \mathbb{C}}$

2. Montrons
$$\forall z \in \mathbb{Z}[j], z \in U \Leftrightarrow |z| = 1$$

Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$, $\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2$ $z = a + jb$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $\underline{z \in U}$ *

$$|z|^2 = z \times \bar{z} = a^2 + ab\underbrace{(e^{-\frac{2i\pi}{3}} + e^{2i\frac{\pi}{3}})}_{} + b^2 e^0$$

$$\left(\underbrace{\bar{j}}_{} + j = \underbrace{j - 1 - j}_{} = -1 \right. \quad (**)$$

car $e^{-\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2 = -1-j$

$$= \underbrace{a^2}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{- ab}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{b^2}_{\in \mathbb{Z}}$$

Comme (*) $\exists z' \in U$, $z \times z' = 1 = z' = z$

$|zz'|^2 = 1 \Rightarrow |z|^2 |z'|^2 = 1$

Les diviseurs de 1 sont 1 et -1

Or $|z|^2 \geq 0$ ~~Donc~~ $|z| = 1$

Donc $\boxed{z \in U \Rightarrow |z| = 1}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $|z| = 1$

Montrons $z \in U$ (ie z inversible)

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, $z = a + jb$

$|z| = 1$

$\Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z \times \bar{z} = 1 = \bar{z} \times z$ et $\bar{z} = a + e^{-\frac{2i\pi}{3}} b$

Donc $z^{-1} = \bar{z}$

$= a + j^2 b$

Alors $z \in U$

$(**)$

$= a + (-1-j) b$

d'où

$= \underbrace{a - b}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(-b)}_{\in \mathbb{Z}} j$

$\boxed{|z| = 1 \Rightarrow z \in U}$

Par $\boxed{\Rightarrow}$ et $\boxed{\Leftarrow}$

$$\forall z \in \mathbb{Z}[j], z \in U \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Colle de la semaine 13

Adam M.

Exercice 1. On note, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$M(a,t) = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{ch}(t) & -a\,\mathrm{sh}(t) \\ -a\,\mathrm{sh}(t) & a\,\mathrm{ch}(t) \end{pmatrix},$$

$$G = \{M(a,t) \mid a \in \mathbb{R}_+^*, t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Solution :

Montrons que G sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$

* $M(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in G$

* Soit $(M_1(a_1,t_1), M_2(a_2,t_2)) \in G^2$

Montrons que $M(a_1,t_1) \times M(a_2,t_2) \in G$

$M(a_1,t_1) \times M(a_2,t_2)$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2(ch(t_1)ch(t_2)+sh(t_1)sh(t_2)) & -a_1a_2(ch(t_1)sh(t_2)+ch(t_2)sh(t_1)) \\ -a_1a_2(ch(t_2)sh(t_1)+sh(t_2)ch(t_1)) & a_1a_2(ch(t_1)ch(t_2)+sh(t_1)sh(t_2)) \end{pmatrix}$$

$ch(t_1)ch(t_2)+sh(t_1)sh(t_2)$

$= \frac{1}{4}\left((e^{t_1}+e^{-t_1})(e^{t_2}+e^{-t_2})+(e^{t_1}-e^{-t_1})(e^{t_2}-e^{-t_2})\right)$

$= \frac{1}{4}\left(e^{t_1+t_2} + \cancel{e^{t_1-t_2}} + \cancel{e^{-(t_1-t_2)}} + e^{-(t_1+t_2)} + e^{t_1+t_2} \cancel{- e^{t_1-t_2}} \cancel{- e^{-(t_1-t_2)}} + e^{-(t_1+t_2)}\right)$

$= ch(t_1+t_2)$

De même $ch(t_1)sh(t_2)+sh(t_1)ch(t_2) = sh(t_1+t_2)$

Donc $M(a_1,t_1) \times M(a_2,t_2)$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2ch(t_1+t_2) & -a_1a_2sh(t_1+t_2) \\ -a_1a_2sh(t_1+t_2) & a_1a_2ch(t_1+t_2) \end{pmatrix}$$

$= M(a_1a_2, t_1+t_2)$

* Vu que $M(a_1,b_1) \times M(a_2,b_2) = M(a_1a_2, b_1+b_2)$

On cherche donc $(a_2,b_2) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ tel que

$$M(a_1,b_1) \times M(a_2,b_2) = M(1,0)$$

$$\begin{cases} a_1 a_2 = 1 \\ b_1 + b_2 = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a_1 = \frac{1}{a_2} \\ b_1 = -b_2 \end{cases} \quad (a_2 \neq 0)$$

Donc $M(\frac{1}{a}, -b)$ est l'inverse de $M(a,b)$

$\forall M(a,b) \in G$

$$M(a,b)^{-1} = M(\tfrac{1}{a}, -b) \in G$$

Donc G est bien un sous groupe de $GL_2(\mathbb{R})$

Rapport de colle, semaine 13

Wassim
M.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.
Montrer que A n'est pas inversible

On raisonne par l'absurde:

On sait que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

donc $(AA)^{-1} = A^{-1} \times A^{-1}$ et A^2 est inversible

Montrons, par recurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$ A^p est inversible

- Initialisation à ~~soit~~ $p=0$

$A^0 = I_n$ ✓

- Heredité : Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé ~~montrons que~~ tel que A^p inversible

montrons que A^{p+1} inversible.

$A^{p+1} = A^p \times A$

$(A^{p+1})^{-1} = \cancel{(A^p)^{-1} \times A^{-1}}\ A^{-1} \times (A^p)^{-1}$ (HR)

donc d'après (HR) A^{p+1} est inversible

l'heredité est donc verifiée

A^p est inversible $\forall p \in \mathbb{N}$.

or on sait qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = O_n$

et donc pour ce p A^p n'est pas inversible

Par conséquent, A n'est pas inversible

Mehdi B.

Colle de la semaine 13

Déterminer A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solution : Démontrons dans un premier temps que la matrice A est inversible

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -9 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

Après avoir appliqué l'algorithme du pivot de Gauß à la matrice A, on remarque qu'elle possède 3 pivots. <u>A est donc inversible</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow -L_3$$

Ainsi :

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}}$$

Nicolas H — Colle de la semaine 13

Énoncé :

Soit $(A,+,\times)$ un anneau tel que

$$\forall x \in A \quad x^2 = x$$

Montrer que pour tout $x \in A$, $2x = 0$ puis que $\times$ est commutative

Solution : Soit $(A,+,\times)$ un anneau tel que $\forall x \in A\ x^2 = x$

Soit $x \in A$

$x + x \in A$ (Anneau)

Donc $(x+x)^2 = x + x$

$\Rightarrow x^2 + xx + xx + x^2 = x^2 + x^2$

$\Rightarrow 2x^2 + 2xx = 2x^2$

$\Rightarrow 2x^2 = 0$ $\quad (-2x^2$ et $xx = x^2)$

$\underset{x^2=x}{\Rightarrow} 2x = 0$

Soit $(x,y) \in A$

$(x+y) \in A$, $(xy) \in A$

$(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + y$

$\Rightarrow x^2 + xy + yx = x^2 + y^2$

$\Rightarrow xy + yx = 0$

$\Rightarrow xy + yx = 2xy = xy + xy$ $\quad (\forall x \in A\ 0 = 2x)$

$\Rightarrow yx = xy$

donc $\times$ est commutative

Rayon. 6 Colle de la semaine n°13

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une relation entre A^2, A et I_3.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
3. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n A + b_n I_3$
4. Expliciter A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. Calculons A^2 :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

On remarque :

$$\boxed{A^2 = A + 2I_3}$$

2. Par q1, nous savons:

$$A^2 = A + 3I_3$$

$$\underset{-A}{\Rightarrow} \quad A^2 - A = 3I_3 \qquad \text{(Commutativité)}$$

$$\Rightarrow \quad A(A - I_3) = 3I_3 \qquad \text{(Distributivité de } \times \text{ par rapport à la loi } +)$$

$$\underset{\frac{1}{3}\times}{\Rightarrow} \quad A\left(\frac{1}{3}(A - I_3)\right) = I_3 \qquad \text{(Compatibilité de . et } \times)$$

Calculons :

$$\left(\frac{1}{3}(A - I_3)\right)A = \frac{1}{3}(A^2 - A)$$

$$= \frac{1}{3}(A + 3I_3 - A)$$

$$= I_3$$

Ainsi A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}(A - I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

②

Rayan. 6 I. Pour montrer l'existence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \quad A^n = a_n A + b_n I$$

On raisonne par récurrence simple :

Soit $n \in \mathbb{N}$

$P(n)$: " Il existe deux réels a_n et b_n tel que $A^n = a_n A + b_n I_3$ "

Initialisation à $n=0$:

$A^n = A^0 = I_3$

Il suffit de prendre $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. (Δ)

Ainsi $P(0)$ vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ vrai.

Vérifions si $P(n+1)$ est vrai :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \quad \text{(propriété notation puissance)} \\ &= (a_n A + b_n I_3) \times A \quad \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ &= a_n A^2 + b_n A \\ &= a_n (A + 3 I_3) + b_n A \quad (Q,1) \\ &= a_n A + b_n A + 3 a_n I_3 \\ &= (a_n + b_n) A + 3 a_n I_3 \quad (\Delta) \end{aligned}$$

$a_n + b_n \in \mathbb{R}$ et $3 a_n \in \mathbb{R}$ conviennent

Donc $P(n+1)$ vrai

③

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \quad A^n = a_n A + b_n I_3$

On en déduit l'existence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$\boxed{A^n = a_n A + b_n I_3}$$

4. Considérons les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme telles de la Q3.

Nous déduisons de Δ que les suites sont définies comme ceci :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cdot\ a_0 = 0 \text{ et} \\ \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \ (*) \\ \cdot\ b_0 = 1 \text{ et} \\ \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = 3a_{n-1} \ (**) \end{array}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$\boxed{a_n \underset{*}{=} a_{n-1} + b_{n-1} \underset{**}{=} a_{n-1} + 3a_{n-2}}$$

On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

On étudie son équation caractéristique :

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 = 0$$

Rayan. G

$\iff \left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)=0$

Comme $\mathbb{R}$ intègre:

$$\boxed{x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}$$

Comme l'équation caractéristique possède deux solutions réelles :

$\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$

$$a_n=\lambda_1\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n+\lambda_2\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n$$

Identifions les valeurs de λ_1 et λ_2 :

- $a_0=0$

Donc $\lambda_1+\lambda_2=0$

Donc $\lambda_1=-\lambda_2$

Ainsi

$\forall n\in\mathbb{N} \quad a_n=\lambda_1\left(\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right)$

- $a_1=a_0+b_0=1$

Donc

$$\lambda_1\left(\frac{1+\sqrt{13}-(1-\sqrt{13})}{2}\right)=1$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1\sqrt{13}=1$

$\Rightarrow \quad \lambda_1=\frac{1}{\sqrt{13}}$

J

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right)}$$

On en déduit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = 3a_{n-1} = \frac{3}{\sqrt{13}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1}\right)}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} A^n &= a_n A + b_n I_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right) A \\ &\quad + \frac{3}{\sqrt{13}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1}\right) I_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A^n = \frac{1}{\sqrt{13}}\Bigg(&\left(\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right) A \\ &+ 3\left(\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^{n-1}\right) I_3\Bigg) \end{aligned}}$$

Puisque $A^0 = I_3$, on a explicité A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Léa Nass

Colle de la semaine 15

Énoncé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, J^n et A^n.

Solution :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\quad J^n = J^3 \times J^{n-3} = 0_{M_3(\mathbb{K})}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad J^n = 0_{M_3(\mathbb{K})}$

On remarque que
$$A = I_3 + aJ + bJ^2$$
$$= I_3 + J(aI_3 + bJ)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
$$A^n = (I_3 + J(aI_3 + bJ))^n$$

Or I_3 et J commutent.

Donc
$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k (aI_3 + bJ)^k$$
$$= I_3 \times \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k (aI_3 + bJ)^k$$
$$= I_3 + nJ(aI_3 + bJ) + \frac{(n-1)n}{2} J^2 (a^2 I_3 + b^2 J^2 + 2abJ)$$
$$= I_3 + naJ + nbJ^2 + \frac{(n-1)n}{2} a^2 J^2$$
$$= I_3 + naJ + \left(nb + \frac{(n-1)n}{2} a^2\right) J^2$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + \frac{(n-1)n}{2} a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Robin G. Colle de la semaine 13

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M^2 est une combinaison linéaire de M et de I_3.
2. En déduire que si $(-a^2 - a + 2) \neq 0$ alors M est inversible et préciser M^{-1}.
3. En discutant selon la valeur de a, résoudre le système $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solution :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a^2+2) & 2a+1 & 2a+1 \\ 2a+1 & (a^2+2) & 2a+1 \\ 2a+1 & 2a+1 & (a^2+2) \end{pmatrix}$$

Soient $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tq $M^2 = bM + cI_3$

Les coefficients non-diagonaux donnent $b = 2a+1$

ainsi $a^2 + 2 = (2a+1)a + c$ (coefficients diagonaux)

d'où $c = -a^2 - a + 2$

$M^2 = (2a+1)M + (-a^2 - a + 2)I_3$.

on pose $u := -a^2 - a + 2$.

2) D'après 1), $(M - (2a+1)I_3)M = u I_3$

et $M(M - (2a+1)I_3) = u I_3$ (car $(2a+1)$ scalaire).

si $u \neq 0$, alors $\underbrace{\frac{1}{u}(M - (2a+1)I_3)}_{B} M = I_3 = \frac{1}{u} M(M - (2a+1)I_3)$

donc M est inversible et $M^{-1} = B$.

3)

$(S) : M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(S) \sim \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1-a^2) & (1-a) \\ 0 & (1-a) & (a-1) \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1-a) & (a-1) \\ 0 & (1-a^2) & (1-a) \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & (1-a) & (a-1) \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) \end{pmatrix}$$

- Si $a = 1$, $Sol(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} : (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

- Si $a = -2$:

$$(S) \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a = -2$, $Sol(S) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$

- Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$:

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{1-a} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{(1-a)(a+2)} L_3}}{(S) \sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \left(1-a \neq 0 \text{ et } (1-a)(a+2) \neq 0 \right)$$

Robin G.

$$(S) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - aL_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, $Sol_{(S)} = \{ 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})} \}$.

3/3

MANGIALOMINI
Aurélien

Colle semaine 13

Exercice : Soit M une matrice carrée commutant avec toutes les matrices de mêmes dimensions. Caractériser M.

Par analyse - synthèse ; Supp $\left| \begin{array}{l} M \in M_n(\mathbb{K}) \\ \exists n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \end{array} \right.$

D'abord on remarque que $0_{M_n(\mathbb{K})}$ et I_n sont solutions évidentes.

(A) Supposons que $\forall N \in M_n(\mathbb{K})$ $NM = MN$ en particulier pour $N = E_{i_0 i_0}$, $i \in [\![1, n]\!]$ où

on a ; Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$;

$$ME_{i_0 i_0} = E_{i_0 i_0} M$$

$\Rightarrow$ $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ $\sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k} [E_{i_0 i_0}]_{k,j}$
(Produit Matriciel)
$= \sum_{k=1}^{n} [E_{i_0 i_0}]_{i,k} [M]_{k,j}$ (1)

$\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } i \neq i_0 \text{ et } j \neq i_0 \text{ on a } 0 = 0 \\ \text{Pour } i = i_0 \text{ ou } j = i_0 \text{ on a ; } ① \end{array} \right.$

① $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } i \neq j \text{ ; sans perte de généralité supp } i = i_0 \\ \text{on a d'après (1) ; } 0 = M_{i,j} \text{ (2)} \\ \text{Si } i = j = i_0 \text{ on a d'après (1) ; } M_{i,j} = M_{j,i} \\ (i = j) \qquad \Rightarrow M_{i,i} = M_{j,j} \text{ (3)} \end{array} \right.$

1

Le cas $i \neq i_0$ et $j \neq i_0$ n'est pas intéressant : il ne nous permet pas de trouver des C.N. sur M.

Par contre lorsque $i = i_0$ ou $j = i_0$ on a ;

② $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \; i \neq j \Rightarrow [M]_{i,j} = 0$
donc M est diagonale.

③ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \; [M]_{i,i} = [M]_{j,j}$, ie les coefficients de la diagonale sont deux-à-deux similaires.

On trouve comme candidat à la fin de cette analyse ; $M = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$
ou encore $M \in \mathrm{Vect}(I_n)$.

Ⓢ Soit $M \left| \begin{array}{l} \in \mathrm{Vect}(I_n) \\ \in M_n(\mathbb{K}) \end{array} \right.$ alors $\forall N \in M_n(\mathbb{K})$ on a ;

$$\begin{aligned} NM &= N \times (\lambda . I_n) \\ &= \lambda . (N \times I_n) \quad (\text{Libertí des scalaires}) \\ &= (\lambda . I_n) \times N \quad (I_n \text{ commutant avec toutes les matrices } M_n(\mathbb{K})). \\ &= NN. \end{aligned}$$

De plus, $\left. \begin{array}{l} 0_{M_n(\mathbb{K})} = 0 \times I_n \\ I_n = 1 \times I_n \end{array} \right\} \in \mathrm{Vect}(I_n).$

Ibrahim .K Colle de la semaine

on note ; $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$M(a,t) = \begin{pmatrix} a\,ch(t) & -a\,sh(t) \\ -a\,sh(t) & a\,ch(t) \end{pmatrix}$$

$$G = \{ M(a,t) \,,\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ t \in \mathbb{R} \}$$

Montrer que G est sous groupe de $GL_2(\mathbb{R})$

---

on rappelle que $ch : t \to \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

$sh : t \to \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

- $0_{M_{2,2}} \in G$: en effet si on considère

$$M(0,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$$

- Soit $(M_1, M_2) \in G^2$ ainsi

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1\,ch(t_1) & -a_1\,sh(t_1) \\ -a_1\,sh(t_1) & a_1\,ch(t_1) \end{pmatrix} ; a_1 \in \mathbb{R}_+^* \quad t_1 \in \mathbb{R}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_2\,ch(t_2) & -a_2\,sh(t_2) \\ -a_2\,sh(t_2) & a_2\,ch(t_2) \end{pmatrix} \quad a_2 \in \mathbb{R}_+^* \quad t_2 \in \mathbb{R}$$

tout d'abord Mq $M_2 \in GL_2(\mathbb{R})$

$$Det(M_2) = a_2^2 (ch(t_2))^2 - a_2^2\, sh(t_2)^2$$

$$= a_2^2 \left(ch(t_2) + sh(t_2) \right) \left(ch(t_2) - sh(t_2) \right)$$

$$= a_2^2 e^{t_2} e^{-t_2} = a_2^2 > 0$$

ainsi M_2 est inversible et $M_2^{-1} = \frac{1}{a_2^2} \begin{pmatrix} a_2\,ch(t_2) & a_2\,sh(t_2) \\ a_2\,sh(t_2) & a_2\,ch(t_2) \end{pmatrix}$

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{ch(t_2)}{a_2} & \frac{sh(t_2)}{a_2} \\ \frac{sh(t_2)}{a_2} & \frac{ch(t_2)}{a_2} \end{pmatrix}$$

Calculons

$$M_1 \times M_2^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 ch(t_1) & -a_1 sh(t_1) \\ -a_1 sh(t_1) & a_1 ch(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{ch(t_2)}{a_2} & \frac{sh(t_2)}{a_2} \\ \frac{sh(t_2)}{a_2} & \frac{ch(t_2)}{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_2}\left(ch(t_1)ch(t_2) - sh(t_1)sh(t_2)\right) & \frac{a_1}{a_2}\left(ch(t_1)sh(t_2) - sh(t_1)ch(t_2)\right) \\ \frac{a_1}{a_2}\left(ch(t_1)sh(t_2) - sh(t_1)ch(t_2)\right) & \frac{a_1}{a_2}\left(-sh(t_1)sh(t_2) + ch(t_1)ch(t_2)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_2} ch(t_1 - t_2) & -\frac{a_1}{a_2} sh(t_1 - t_2) \\ -\frac{a_1}{a_2} sh(t_1 - t_2) & \frac{a_1}{a_2} ch(t_1 - t_2) \end{pmatrix} \in G \text{ car}$$

$\frac{a_1}{a_2} \in \mathbb{R}_+^*$ $\left(a_2 \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*\right)$

$t_1 - t_2 \in \mathbb{R}$ $\left(t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}\right)$

par caractérisation des sous groupes G est sous groupe de $GL_2(\mathbb{R})$

Louis Guillaume S. Colle de la semaine 13

8.
Déterminer A^{-1} :

$$a.\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution : Intéressons nous à la matrice augmentée $(A|I_3)$, sur laquelle nous appliquerons des opérations élémentaires afin de déterminer si A est inversible, et alors le cas échéant déterminer son inverse.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ \end{array}$$

La matrice une fois echelonnée possède 3 pivots, comme elle est de dimension (3;3), elle est inversible et son inverse est :

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}$$

<u>Vérifions notre résultat</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous retrouvons bien I_3.

Paul C. Semaine de colle 13

Soit un entier $n \geq 2$, démontrer que
$$O_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \times A^T = I_n\}$$
est un sous groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Solution :

- Montrons que $O_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ et $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

$I_n \times I_n^T = I_n$ donc $I_n \in O_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $A \times A^T = I_n$ donc A est inversible, $A^{-1} = A^T$.
d'où $A \in GL_n(\mathbb{R})$; donc $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$

- Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est stable par produit tordu :

Soient $(A, B) \in O_n(\mathbb{R})^2$, montrons que $AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, soit

$$AB^{-1}(AB^{-1})^T = I_n.$$

$$(AB^{-1})^T = (B^{-1})^T A^T = (B^T)^T A^{-1} = BA^{-1}.$$

d'où $AB^{-1}BA^{-1} = AA^{-1} = I_n$; $(AB^{-1}) \in O_n(\mathbb{R})$

$O_n(\mathbb{R})$ est donc un sous groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Paul C. Semaine de colle 13

Determiner tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$

Solution :

On raisonne par analyse et synthèse :

• Analyse :

Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$

Soit $n\in\mathbb{Z}$, $f(n) = \underbrace{n f(1)}_{\hookrightarrow\, n \mid f(1)}$ (f morphisme de groupes)

Par l'absurde montrons que $f(1)=0$.

tout entier n divise $f(1)$, donc $f(1)+1$ divise $f(1)$

ce qui est absurde,

d'où $f(1)=0$.

Soient $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, $f(\frac{p}{q}) = p f(\frac{1}{q})$.

montrons que pour tout $q\in\mathbb{Z}^*$, $f(\frac{1}{q})=0$.

Soit $q\in\mathbb{Z}^*$, $f(1)=f(\frac{q}{q}) = q f(\frac{1}{q}) = 0$

comme $q\neq 0$, $\mathbb{Z}$ intègre, $f(\frac{1}{q})=0$.

donc $\forall (p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, $f(\frac{p}{q})=0$

Ainsi, $f(\mathbb{Q})=\{0\}$

On obtient un candidat, le morphisme nul.

Synthèse : Soit $f \left| \begin{array}{l} (\mathbb{Q},+) \longrightarrow (\mathbb{Z};+) \\ x \longmapsto 0 \end{array} \right.$

Soit $(x,y) \in \mathbb{Q}$;

$f(\underbrace{x+y}_{\in \mathbb{Q}}) = 0$

$f(x)+f(y) = 0+0 = 0$

donc $f(x+y) = f(x)+f(y)$

f est un morphisme de groupes.

L'unique morphisme de groupes de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$ est le morphisme nul.

Raphaël Mouchonnet colle de la semaine n° 13

Exercice 2

1. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
   On suppose que G a trois éléments et on note $G = \{1, a, b\}$.
   Montrer que $a^2 = b$ et $a^3 = 1$.
2. Combien y-a-t-il de sous groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$ de cardinal 3 ?

Solution :

1) Soit G un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ tel que $G = \{1, a, b\}$ où $(a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2$.

×	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a

Le fait que 1 soit le neutre du groupe nous permet de compléter les cases ◻
La présence d'un "a" dans la colonne a limite les possibilités pour la case (a, a) à b et 1.
La présence d'un 1 dans la diagonale restreint alors à b
On déduis ensuite les autres cases.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Donc} & a \times a = b \\ \text{et} & a \times a \times a = b \times a = 1 \end{array}}$$

2) On cherche $(a,b) \in (\mathbb{C}^* \setminus \{1\})^2$ tel que

$$a \times a = b$$
$$b \times b = a.$$

On résonne par Analyse synthèse :
Supposons qu'un tel (a,b) existe.

$$\begin{cases} a \times a = b \\ b \times b = a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b \times b \times b \times b = b \\ a \times a \times a \times a = a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b^4 = b \\ a^4 = b \end{cases}.$$

On s'intéresse au polynôme $X^4 = X$.
Soit $x \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$.

$$x^4 - x = 0 \Longrightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

$$\underset{\substack{x \neq 0 \\ \text{intégrité}}}{\Longrightarrow} x^3 = 1$$

$$\underset{\substack{\text{racine } 3^{\text{ème}} \\ \text{de l'unité}}}{\Longrightarrow} x = e^{\frac{i 2\pi k}{3}}, \ k \in [\![0, 2]\!]$$

Donc $x = \begin{cases} e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ \text{ou} \\ e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{cases}$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ou} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

On décide de ne pas considérer les permutations du triplet de valeur comme des sous-groupes différent.

L'étude du polynôme nous donne un couple de candidats pour a et b.

$$a = \begin{cases} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ou} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad b = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ou} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Sachant que $a \neq b$ il y a deux couples candidats possible qui sont des permutations l'un de l'autre. On décide donc d'en considérer un seul. L'ensemble candidat est :

$$E_C = \left\{ \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} , -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$

<u>Synthèse</u> : Vérifions l'unique candidat obtenue

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le couple solution fonctionne.
On vérifie maintenant que $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) = \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^2\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right) = 1$$

Le couple de valeur rempli toutes les conditions donc $\boxed{\left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ de cardinal 3. D'après l'analyse il est <u>unique</u>.

Léon. S

Enoncé

Semaine 13

Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$

1) Démontrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$

2) On note U l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}[j]$

Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[j]$:

$z \in U$ si et seulement si $|z| = 1$

Déterminer U.

Solution

1) Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}[j] \times \mathbb{Z}[j]$

Soit $(a_x, b_x, a_y, b_y) \in \mathbb{Z}^4$ telque

$x = a_x + j b_x$ et $y = a_y + j b_y$

$x + y = \underbrace{a_x + a_y}_{\in \mathbb{Z}} + j\underbrace{(b_x + b_y)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}[j]$

$-x = \underbrace{-a_x}_{\in \mathbb{Z}} + j\underbrace{(-b_x)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}[j]$

$x \times y = a_x a_y + j^2(b_x b_y) + j(a_x b_y + a_y b_x)$

On remarque $j^2 = -1 - j$

donc $x \times y = \underbrace{a_x a_y - b_x b_y}_{\in \mathbb{Z}} + j\underbrace{(a_x b_y + a_y b_x - b_x b_y)}_{\in \mathbb{Z}}$

donc $x \times y \in \mathbb{Z}[j]$

$0 \in \mathbb{Z}[j]$ et $1 \in \mathbb{Z}[j]$ donc

$\mathbb{Z}[j]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

2) Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$, soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. $z = a + jb$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons z inversible.

Il existe $z^{-1} \in \mathbb{Z}[j]$ tel que $z z^{-1} = 1$

donc $|z z^{-1}|^2 = 1$

donc $|z|^2 |z^{-1}|^2 = 1$

Calculons $|z|^2$:

$|z|^2 = (a+bj)\overline{(a+bj)}$

$= (a+bj)(a+b\bar{j})$

$\bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

$= e^{\frac{4i\pi}{3}}$

$= j^2$

$= -1-j$

donc $|z|^2 = (a+bj)(a-b-bj)$

$= (a^2 - ab - jb^2 - b^2 j^2$

$= a^2 - ab - jb^2 - b^2(-1-j)$

$= a^2 - ab + b^2 \in \mathbb{N}$

De même $|z^{-1}|^2 \in \mathbb{N}$

Or $|z^{-1}|^2 |z|^2 = 1$

donc $|z|^2 = 1$

donc $|z| = 1$ $\quad (|z| \geq 0)$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $|z| = 1$

donc $|z|^2 = 1$

donc $(a+bj)\overline{(a+bj)} = 1$

donc $\underbrace{(a+bj)}_{=z}\underbrace{(\underset{\in \mathbb{Z}}{a-b} - \underset{\in \mathbb{Z}}{b}j)}_{\in \mathbb{Z}[j]} = 1$

donc z est inversible

Déterminons U.

<u>analyse</u>

Soit $z \in U$, soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : z = a+bj$

donc $|z| = 1$

donc $a^2 + b^2 - ab = 1$

donc $(a-b)^2 = 1 - ab$

donc $1 - ab \geq 0$ donc $1 \geq ab$

Léon. 5 Montrons $ab \geq 0$:

Si $ab < 0$ $|a| \geq 1$ et $|b| \geq 1$ donc :

$a^2 + b^2 - ab > 1$ ↯

donc $ab \geq 0$

donc $1 \geq ab \geq 0$

Les candidats sont $(1, j, -1-j, \cancel{0}, -1, -j, 1+j)$

<u>Synthèse</u>

$1 \times 1 = 1$

$j \times \cancel{j^2}(-1-j) = 1$

$(-1-j)\, j = 1$

$(1+j) \times (-j) = 1$

Donc $U = \{1, -1, j, -j, -1-j, 1+j\}$

Antoine B. colle de la semaine 13

On pose, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

$$SO_2(\mathbb{R}) := \left\{ \mathbb{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.

Solution:

- Montrons que $SO_2(\mathbb{R}) \subset GL_2(\mathbb{R})$.

Soit $S \in SO_2(\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$S = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$\det(S) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0.$$

$\boxed{\text{donc } S \in GL_2(\mathbb{R})}$

et $S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

- Montrons que $SO_2(\mathbb{R})$ ss gpe de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$

□ $\boxed{SO_2(\mathbb{R}) \neq \emptyset}$ car pour $\theta = 0 \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$

□ Soit $(S_1, S_2, \theta_1, \theta_2) \in SO_2(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

tels que : $S_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}$

$S_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}$.

Montrons que $S_1 \times S_2^{-1} \in SO_2(\mathbb{R})$.

$$S_1 \times S_2^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & -(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_2)\cos(\theta_1) & \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) & -\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) & \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix} \quad \text{(formules d'addition)}$$

$$(\theta_1 - \theta_2) \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\text{donc } S_1 \times S_2^{-1} \in SO_2(\mathbb{R}).}$$

Lina, A.

Colle de la semaine 13

Exercice 1. Soient a et b des réels. On pose

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $M(a,b)^2$. L'écrire comme une combinaison linéaire des matrices $M(a,b)$ et I_3.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $M(a,b)$ soit inversible. Dans ce cas, calculer son inverse.

Solution :

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a^2+2b^2 & b^2+2ab & b^2+2ab \\ b^2+2ab & a^2+2b^2 & b^2+2ab \\ b^2+2ab & b^2+2ab & a^2+2b^2 \end{pmatrix}}_{M^2}$$

Donc $M^2 = (b+2a)M + (-ab+2b^2-a^2)I_3$.

2. D'après Q1. $M^2 = (b+2a)M + (-ab+2b^2-a^2)I_3$.

Ainsi

$$M^2 - (b+2a)M = (-ab+2b^2-a^2)I_3.$$
$$M(M-(b+2a)I_3) = (-ab+2b^2-a^2)I_3$$

Si $-ab+2b^2-a^2 \neq 0$.

Alors

$$M\left(\frac{M-(b+2a)I_3}{(-ab+2b^2-a^2)}\right) = I_3.$$

Ainsi M est inversible et $M^{-1} = \left(\frac{M-(b+2a)I_3}{(-ab+2b^2-a^2}\right)$

Si $-ab+2b^2-a^2=0$
Alors on obtient
$$M^2=(b+2a)M$$
Raisonnons par l'absurde et supposons que M est inversible.
Comme $M^2=(b+2a)M$.
$$M=(b+2a)I_3 \quad (\times M^{-1})$$
Ce qui est absurde.

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible est $-ab+2b^2-a^2\neq 0$.
Dans ce cas

$$M^{-1}=\frac{M-(b+2a)I_3}{-ab+2b^2-a^2}.$$

Piero T. Colle de la semaine 13

> Exercice : Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif.
> x est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.
> 1. Montrer que si x et y sont nilpotents alors xy et $x+y$ sont nilpotents.
> 2. Montrer que si x est nilpotent, $1-x$ est inversible.

Solution :

1. Soit $(x,y) \in A^2$ et $(n_1,n_2) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $x^{n_1} = 0$ et $y^{n_2} = 0$.

$$(xy)^{n_1} = x^{n_1} y^{n_1} \quad (x \text{ et } y \text{ commutent})$$
$$= 0$$

donc xy est nilpotent.

$$(x+y)^{n_1+n_2} = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{k} x^{n_1+n_2-k} y^k \quad (x \text{ et } y \text{ commutent})$$
$$= \sum_{k=0}^{n_2} \binom{n_1+n_2}{k} x^{n_1+n_2-k} y^k + \sum_{k=n_2+1}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{k} x^{n_1+n_2-k} y^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n_2} \binom{n_1+n_2}{k} x^{n_1+n_2-k} y^k + \sum_{k=1}^{n_1} \binom{n_1+n_2}{n_2+k} x^{n_1-k} y^{n_2+k}$$
$$= x^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} \binom{n_1+n_2}{k} x^{n_2-k} y^k + y^{n_2} \sum_{k=1}^{n_1} \binom{n_1+n_2}{n_2+k} x^{n_1-k} y^k$$
$$= 0$$

donc $x+y$ est nilpotent.

2. Soit $(x,n) \in A \times \mathbb{N}^*$ tels que $x^n = 0$.

$$1 = 1^n - x^n = (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k \quad (1 \text{ et } x \text{ commutent})$$

or A est un anneau commutatif donc : $(1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)(1-x)$

donc $1-x$ est inversible.

Alexandre M.

Colle

semaine 13

Exercice 5. *On considère une suite (u_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$*

L'objectif est de trouver une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1 (sans utiliser les formules générales)

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

1. (a) *Trouver une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_{n+1} = AX_n$*
   (b) *Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = A^n X_0$*
   L'objectif devient donc le calcul de A^n.
2. *On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.*
   (a) *Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.*
   On pose pour la suite de l'exercice $D = P^{-1}AP$.
   (b) *Calculer D puis déterminer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.*
   (c) *Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$*
   (d) *En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Conclure.*

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\underbrace{X_{n+1}}_{(2,1)} = \underbrace{\underbrace{A}_{(2,2)}\ \underbrace{X_n}_{(2,1)}}_{(2,1)}$ [cherche le format de A]

Soit $(a_{1,1}; a_{2,1}; a_{1,2}; a_{2,2}) \in \mathbb{K}^4$

Donc $\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a_{11}u_{n+1} + a_{1,2}u_n \\ a_{2,1}u_{n+1} + a_{2,2}u_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ convient

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ = " $\boxed{X_n = A^n X_0}$ "

- Initialisation au rang $n=0$: $A^0X_0 = I_2X_0 = X_0$ ✓
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vrai. Montrons $P(n+1)$.

$X_{n+1} = AX_n \underset{(HR)}{=} AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$ ✓

2. (a) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(P) = 1\times 1 - (-1)\times 2 = 3 \neq 0$ donc P est inversible

$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

$D := P^{-1}AP$

(b) Calcul de $P^{-1}A$: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}}$ donc $P^{-1}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}$

Calcul de $D = P^{-1}AP$: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&0\\0&6\end{pmatrix}$ donc $D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&0\\0&6\end{pmatrix}$

Donc $\boxed{D = \begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}}$

On conjecture grâce aux propriétés des matrices diagonales : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{D^n = \begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}}$

- Initialisation au rang $n=0$: $D^0 = I_2$ et $\begin{pmatrix}(-1)^0&0\\0&2^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2$
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $D^n = \begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}$. Montrons que $D^{n+1} = \begin{pmatrix}(-1)^{n+1}&0\\0&2^{n+1}\end{pmatrix}$

$$D^{n+1} = DD^n \underset{(HR)}{=} \begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^{n+1}&0\\0&2^{n+1}\end{pmatrix}$$

c) On sait que $D = P^{-1}AP$ et P est inversible

donc $\boxed{A = PDP^{-1}}$ (*) $[P\times\_\_$ et $\_\_\times P^{-1}]$

- définition du prédicat : $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n) :$ " $\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$ "
- Initialisation au rang $n = 0$: $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2$
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$

$$A^{n+1} = AA^n \underset{\substack{(HR)\\ \text{et } (*)}}{=} PD\underbrace{P^{-1}P}_{I_2}D^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

d) $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$PD^n = \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&2^n\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}(-1)^n&2^{n+1}\\(-1)^{n+1}&2^n\end{pmatrix}}$$

$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix}(-1)^n&2^{n+1}\\(-1)^{n+1}&2^n\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)^n+2^{n+1} & (-1)^{n+1}\times 2+2^{n+1}\\(-1)^{n+1}+2^n & \underbrace{(-1)^{n+2}}_{(-1)^n}\times 2+2^n\end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n+2^{n+1} & (-1)^{n+1}\times 2+2^{n+1}\\(-1)^{n+1}+2^n & (-1)^n\times 2+2^n\end{pmatrix}}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ $X_n = A^nX_0$ d'après 1) b)

donc $X_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n+2^{n+1} & (-1)^{n+1}\times 2+2^{n+1}\\(-1)^{n+1}+2^n & (-1)^n\times 2+2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\U_0\end{pmatrix}$

$$X_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}((-1)^n+2^{n+1})U_1 + ((-1)^{n+1}\times 2+2^{n+1})U_0\\((-1)^{n+1}+2^n)U_1 + ((-1)^n\times 2+2^n)U_0\end{pmatrix}$$

donc $\boxed{U_n = \frac{1}{3}\left(((-1)^{n+1}+2^n)U_1 + ((-1)^n\times 2+2^n)U_0\right)}$

Uta Bougen de Neyer
MP2I

Rapport de colle

semaine 13

On note $u + v\mathbb{Z} = \{ u + vk \,;\, k \in \mathbb{Z} \}$.

À quelle condition est ce un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$

Analyse :

On suppose que $u + v\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, alors $u + v\mathbb{Z}$ vérifie les conditions suivantes :

1) $0 \in u + v\mathbb{Z}$, alors $\exists k' \in \mathbb{Z}$ tq $0 = u + vk'$
$\Rightarrow u = -vk'$

Soit $k' \in \mathbb{Z}$ fixe tq $u = -vk'$.
alors
$$u + v\mathbb{Z} = \{ u + vk : k \in \mathbb{Z} \}$$
$$= \{ -vk' + vk : k \in \mathbb{Z} \}$$
$$= \{ v\underbrace{(-k' + k)}_{\in \mathbb{Z}} : k \in \mathbb{Z} \}$$
$$= v\mathbb{Z}.$$

2) $u + v\mathbb{Z}$ est stable par $+$,
d'après 1) $u + v\mathbb{Z} = v\mathbb{Z}$;
Soit $(a, b) \in v\mathbb{Z}$.
$\exists \, l \in \mathbb{Z}$ tq $a = vl$
$\exists \, m \in \mathbb{Z}$ tq $b = vm$
$$a + b = vl + vm = v\underbrace{(l + m)}_{\in \mathbb{Z}} \in v\mathbb{Z}$$

3) $\forall a \in u + v\mathbb{Z}$, l'opposé de a ; $(-a) \in u + v\mathbb{Z}$.
d'après 1) $u + v\mathbb{Z} = v\mathbb{Z}$.
Soit $a \in v\mathbb{Z}$.
$\exists \, l \in \mathbb{Z}$ tq $a = vl$
$$-a = -vl = v\underbrace{(-l)}_{\in \mathbb{Z}} \in v\mathbb{Z}$$

Donc si $u + v\mathbb{Z}$ vérifie la première condition, elle vérifie les 2 autres.

Donc la condition est : $v | u$.

<u>Synthèse :</u>

Soit $u + v\mathbb{Z}$ tq $v | u$.

Alors, $u + v\mathbb{Z} = v\mathbb{Z}$ donc $(u + v\mathbb{Z}, +)$ est un sous groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.

Hugo D. Colle de la semaine 13

Soit $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$

Exercice : On note $u + v\mathbb{Z} = \{u + vk, k \in \mathbb{Z}\}$. À quelle condition est-ce un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$?

• Pour que $u + v\mathbb{Z}$ soit un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$, il faut que $0 \in u+vk$. Donc qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$u + vk = 0$$

Donc $u = (-k)v$

Il faut que $v | u$.

• Supposons que $v|u$. Montrons que $u + \mathbb{Z}v = v\mathbb{Z}$

Il existe $k_u \in \mathbb{Z}$ tel que $u = k_u v$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in u + v\mathbb{Z}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = u + kv$

Montrons que $x \in v\mathbb{Z}$

$$x = k_u v + kv$$
$$= v(\underbrace{k_u + k}_{\in \mathbb{Z}})$$

Donc $x \in v\mathbb{Z}$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in v\mathbb{Z}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = kv$

Montrons que $x \in u + v\mathbb{Z}$

$$x = k_u v - k_u v + kv$$
$$= u + v(\underbrace{k - k_u}_{\in \mathbb{Z}})$$

Donc $x \in u + v\mathbb{Z}$

Comme $v\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$, on en déduit que $u + v\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ si $v|u$.

EXERCICE 4 — Démontrer que :

$$H := \left\{x + y\sqrt{3} : x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{Z},\ x^2 - 3y^2 = 1\right\}$$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$.

Solution : Montrons d'abord que $H \subset \mathbb{R}_{>0}$

Soit $h \in H$ $\exists (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $h = x + y\sqrt{3}$

Nous savons $\underbrace{(x - \sqrt{3}y)}_{\bar{h}}\underbrace{(x + \sqrt{3}y)}_{h} = 1$

Nous en déduisons que h et $\bar{h}$ sont de même signe
Par intégrité de $\mathbb{R}$ $h = 0$ est impossible.
Supposons $h < 0$ Ainsi $\left.\begin{array}{l} x + \sqrt{3}y < 0 \\ x - \sqrt{3}y < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x < 0$ ↯ $(x \in \mathbb{N})$

Ainsi $h \in \mathbb{R}_{>0}$

Montrons maintenant que H ~~est~~ - possède le neutre (1)
- est stable par passage à l'inverse
- est stable par produit

- $1 = \underbrace{1}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{0}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{3}$ donc $1 \in H$.

Soit $h \in H$ $\exists (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ $h = x + y\sqrt{3}$

$\bar{h} = \underbrace{x}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{y}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{3}$ est l'inverse de h (unicité de l'inverse d'une loi associative)

Donc $\bar{h} \in H$ $((-y)^2 = y^2)$

Soit $(h_1, h_2) \in H^2$ $\exists (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z}^2$ tq $h_1 = x_1 + y_1\sqrt{3}$
$h_2 = x_2 + y_2\sqrt{3}$

$$h_1 h_2 = \underbrace{x_1 x_2 + 3 y_1 y_2}_{x} + \sqrt{3}\underbrace{(x_1 y_2 + x_2 y_1)}_{y} > 0$$

H étant stable par passage à l'inverse $x_1 x_2 + 3 y_1 y_2 - \sqrt{3}(x_1 y_2 + x_2 y_1) > 0$

En additionnant les 2 lignes cela nous donne $2x > 0$ donc $x > 0$

Il reste à justifier que $x^2 - 3y^2 = 1$

$$x^2 - 3y^2 = x_1^2 x_2^2 + 6 y_1 y_2 x_1 x_2 + 9 y_1^2 y_2^2 - 3(x_1^2 y_2^2 + 2 x_1 y_2 y_1 x_2 + x_2^2 y_1^2)$$

$$= x_1^2 \underbrace{(x_2^2 - 3 y_2^2)}_{1} + 9 y_1^2 y_2^2 - 3 x_2^2 y_1^2$$

$$= \underbrace{x_1^2 - 3 y_1^2}_{1} \underbrace{(x_2^2 - 3 y_2^2)}_{1} = 1$$

Ainsi H est stable par passage à l'inverse, produit et possède le neutre. Et $H \subset \mathbb{R}_{>0}$

Donc H est un sous groupe de $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$

Louis B Khôlle de la semaine 13

Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure commute avec sa transposée si et seulement si elle est diagonale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Soit $M \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$

Mq $MM^T = M^TM \iff M \in \mathrm{Vect}(E_{11}, \dots, E_{nn})$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supp. $M \in \mathrm{Vect}(E_{11}, \dots, E_{nn})$

Alors $M = M^T$ et donc
$MM^T = M^2$
et $M^TM = M^2$
Donc $M^TM = MM^T$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supp. $MM^T = M^TM$
Montrons que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, $[M]_{ij} = 0$" $= P(n)$
Raisonnons par récurrence sur n:
Initialisation à $n = 1$:

Toute matrice $\in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est diagonale.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq $P(n)$ est vrai.
Montrons que $P(n+1)$ est vrai

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $MM^T = M^TM$

Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ tq $M = \begin{pmatrix} \alpha & X^T \\ 0_{\mathcal{M}_{n1}} & M_n \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

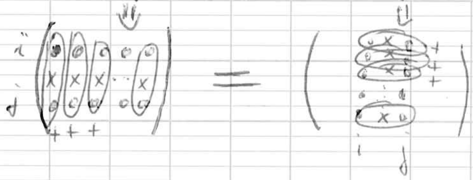
$X^T \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$

M_n vérifie $P(n)$

Comme $M \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, il suffit de montrer que $X^T = 0_{\mathcal{M}_{1n}}$

$MM^T = M^TM \Rightarrow \forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} M_{ik} M_{jk}} \overset{(*)}{=} \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} M_{ki} M_{kj}}$$



Comme $\mathbb{R}$ est intègre : $\forall j \in [\![1, n]\!]$

$(*) \Rightarrow \alpha \times X_{1j} = \alpha \times 0 = 0$

$\Rightarrow X_{1j} = 0$

Donc $M \in \mathrm{Vect}(E_{11}, \dots, E_{n+1\,n+1})$ $\square$

Donc $P(n+1)$ est vrai.

Rauer
Léon

Rapport de khôlle de la semaine 13.

Montrer que $H = \{ x + y\sqrt{3} : (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \quad x^2 - 3y^2 = 1 \}$
est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$

i) $\left.\begin{array}{l} 1 = 1 + 0y \\ 1^2 - 3\times 0^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \in H$

ii) Montrons que H est stable par passage à l'inverse.
Soit $h \in H$, alors il existe $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ $x^2 - 3y^2 = 1$
$h = x + y\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{l} h \times (x - y\sqrt{3}) = x^2 - 3y^2 = 1 \\ (x - y\sqrt{3}) \times h = x^2 - 3y^2 = 1 \\ \text{et } x^2 - 3y^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 3(-y)^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h^{-1} = (x - y\sqrt{3}) \\ \text{et } h^{-1} \in H \end{array}$$

iii) Montrons que $H \subset \mathbb{R}_{>0}$.
Soit $h \in H$, alors il existe $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ $x^2 - 3y^2 = 1$
$h = x + y\sqrt{3}$
Supposons $h \leq 0$
alors $h^{-1} \leq 0$ (car $hh^{-1} = 1 \geq 0$)

$$\left.\begin{aligned} x + y\sqrt{3} &\leq 0 \\ x - y\sqrt{3} &\leq 0 \end{aligned}\right\} \overset{\text{en sommant}}{\Longrightarrow} \quad 2x \leq 0 \ \lightning \ (x \in \mathbb{N})$$

Donc $h > 0$, $h \in \mathbb{R}_{>0}$.

iv) Montrons que H est stable par produit.

Soit $(h_1, h_2) \in H^2$, alors il existe $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} h_1 = x_1 + y_1\sqrt{3} \\ h_2 = x_2 + y_2\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$h_1 h_2 = \underbrace{x_1x_2 + 3y_1y_2}_{x'} + \sqrt{3}\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{y'}$$

$$x'^2 - 3y'^2 = x_1^2x_2^2 + 6x_1x_2y_1y_2 + 9y_1^2y_2^2 - 3x_1^2y_2^2 - 6x_1x_2y_1y_2 - 3x_2^2y_1^2$$

$$= x_1^2\underbrace{(x_2^2 - 3y_2^2)}_{\substack{1 \\ \text{car } h_2 \in H}} - 3y_1^2\underbrace{(x_2^2 - 3y_2^2)}_{\substack{1 \\ \text{car } h_2 \in H}}$$

$$= \underbrace{x_1^2 - 3y_1^2}_{\text{car } h_1 \in H} = 1$$

~~Alors~~ $\cancel{(x' + y'\sqrt{3})(x' - y'\sqrt{3}) = 1}$ $\cancel{(x' - y'\sqrt{3})(x' + y'\sqrt{3}) = 1}$ $\cancel{\Big\}\ (h_1h_2)^{-1} = x' - y'\sqrt{3}}$

~~Or~~ $\times$

Comme $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$ est un groupe et $(h_1, h_2) \in H^2 \subset \mathbb{R}_{>0}^2$

$h_1h_2 > 0$ ainsi $\left.\begin{aligned} x' + y'\sqrt{3} &> 0 \\ x' - y'\sqrt{3} &> 0 \end{aligned}\right\} \overset{\text{en sommant}}{\Longrightarrow} x' > 0$

$(h_1h_2)^{-1}$ de même signe que $h_1h_2 > 0$

$x' \in \mathbb{N}$, $y' \in \mathbb{Z}$, $x'^2 - 3y'^2 = 1$ alors H sous-groupe

Youssef B

Colle de la semaine 13

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et U_n une suite de $\mathcal{M}_2, 1(\mathbb{R})$ vérifiant $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$.

1. Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{M}_2, 1(\mathbb{R})$ tel que $V = AV + B$.
2. Préciser U_n en fonction de n.

Solution :

1) On pourra procéder par analyse-synthèse :

(A) Supposons qu'il existe $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $V = AV + B$

Alors $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut alors avoir le système suivant :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{5} a + 1 \\ b = 2b + 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{4} \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc on a le candidat $V = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$ qui vérifie l'analyse

(S)

$$AV + B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -1 \end{pmatrix} = V$$

2) On pose $W_n = U_n - V$

$W_{n+1} = U_{n+1} - V$

$= AU_n + B - (AV+B)$

$= A(U_n - V)$

$= AW_n$

Donc W_n est une suite geometrique de raison A
On pourra alors l'ecrire sous la forme :

$W_n = A^n W_0$

Donc $U_n = W_n + V$

$= A^n W_0 + V$

$= A^n (U_0 - V) + V$

$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$

$$U_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{5}{4} \\ 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$