Paul C. Semaine de colle 11

> 1) Calculer le PGCD de 637 et 595
> 2) Existe-t-il des entiers x et y tels que $637x + 595y = 91$
> Si oui, les trouver tous
> 3) Existe-t-il des entiers x et y tels que $637x + 595y = 143$?
> Si oui, les trouver tous

Solution :

1) L'algorithme d'Euclide suivant livre $\boxed{637 \wedge 595 = 7}$

$637 = 595 + 42$

$595 = 42 \times 14 + 7$

$42 = 7 \times 6 + 0$

2) comme $637 \wedge 595 = 7$, $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$, $637u + 595v = 7$

d'où $(13u, 13v)$ solution de l'équation. $(91 = 7 \times 13)$

On remarque que $637 = 7 \times 91$; $595 = 7 \times 85$, $91 = 7 \times 13$ donc

$(E) : \left| \begin{array}{l} 91x + 85y = 13 \\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 637x + 595y = 91 \\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \end{array} \right.$

On a :

$91 = 85 + 6$

$85 = 6 \times 14 + 1$

$6 = 6 \times 1 + 0$

d'où $91 \wedge 85 = 1$.

de plus, $1 = 91 \times (-14) + 85 \times 15$.

d'où $13 = 91 \times (-14 \times 13) + 85 \times (15 \times 13)$. On note $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}_{(E)}$

$x_0 = -14 \times 13$, $y_0 = 15 \times 13$
$= -2 \times 85 - 12$, $= 2 \times 91 + 13$

On raisonne par analyse et synthèse pour déterminer $Sol_{(E)}$

Analyse : Soit $(x, y) \in Sol_{(E)}$.

Alors $91x + 85y = 91x_0 + 85y_0$

donc $91(x - x_0) = 85(y_0 - y)$

comme $91 \mid 85(y_0 - y)$ et $91 \wedge 85 = 1$, le lemme de Gauß livre

$91 \mid y_0 - y$.

Alors $\exists k \in \mathbb{Z}$, $y_0 - y = 91k$

donc $\exists k \in \mathbb{Z}$, $y = -91k + y_0$

Alors, $91(x - x_0) = 85(y_0 - y)$

Soit $x - x_0 = 85k$

d'où $x = 85k + x_0$

on a alors

$$\begin{cases} x = 85k - 2 \times 85 - 12 = 85(k-2) - 12 \\ y = -91k + 2 \times 91 + 13 = -91\underbrace{(k-2)}_{\in \mathbb{Z}} + 13 \end{cases}$$

d'où $(x, y) \in \{(85k - 12 ; -91k + 13) ; k \in \mathbb{Z}\}$

Synthèse : Soient $(x, y) \in \{85k - 12 ; -91k + 13) ; k \in \mathbb{Z}\}$

Alors $\exists k \in \mathbb{Z}$, $91(85k - 12) + 85(-91k + 13) = 91x + 85y$

$= 91 \times (-12) + 85 \times 13 = 13$

donc $(x, y) \in Sol_{(E)}$

Ainsi, $\boxed{Sol_{(E)} = \{(85k - 12 ; -91k + 13), k \in \mathbb{Z}\}}$

3) Supposons, par l'absurde, l'existence de $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $637x + 595y = 143$.

Alors $7(91x + \cancel{595}\ 85y) = 7 \times 20 + 3$

donc $7\underbrace{(91x + 85y - 20)}_{\in \mathbb{Z}} = 3$

donc $7 \mid 3$ ce qui est absurde.

(E) $637x + 595y = 143$ n'a donc pas de solutions entières.

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E), \mathbb{Z}^2} = \emptyset}$$

Billy.G — Colle de la semaine 11

Exercice 8. *Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_n(x) = x - \ln(x) - n$.*

1. *Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Montrer que la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
2. *Soit $n \geq 2$ fixé. Montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions notées x_n et y_n telles que $x_n \in]0, 1[$ et $y_n \in]1, +\infty[$.*
3. *En utilisant la question 1, comparer $\varphi_{n+1}(x_n)$ et $\varphi_{n+1}(x_{n+1})$.*
   En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
4. *Montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ converge vers 0.*
5. *Quelle est la nature de $(y_n)_{n\geq 2}$?*

Solution :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$: $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$

$= x - \ln(x) - n - 1 + x + \ln(x) + n$

$= -1 < 0$

D'où : $\varphi_{n+1}(x) < \varphi_n(x)$

Donc $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

2) Supposons φ_n dérivable. Soit $x \in]0, +\infty[$

$\varphi_n'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

$1 - \frac{1}{x} \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 1$ (inverse décroissante)

x	0		1		$+\infty$
$\varphi_n'(x)$		$-$	0	$+$	
φ_n	$+\infty$	$\searrow$	$\underbrace{1-n}_{<0,\text{ car } n\geq 2 \text{ fixé.}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet exactement 2 solutions, x_n et y_n telles que $x_n \in]0, 1[$ et $y_n \in]1, +\infty[$

3) On sait que : $0 < 1$

$\Rightarrow x_n - \ln(x_n) - n - 1 < x_n - \ln(x_n) - n$

$\Rightarrow \varphi_{n+1}(x_n) < \varphi_n(x_n) = 0 = \varphi_{n+1}(x_{n+1})$

$\underset{(f_n \text{ strictement décroissante sur }]0,1[)}{\Longrightarrow} x_n > x_{n+1}$

Donc $(x_n)_{n\geq 1}$ $\searrow$

4) Raisonnons par l'absurde et supposons que $(x_n)_{n\geq 1}$ ne tend pas vers 0.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x_n) = 0 = x_n - \ln(x_n) - n$

Or pour $n \to +\infty$, on a : $0 = \underbrace{x_n}_{\text{constante}} - \underbrace{\ln(x_n)}_{\text{constante}} \underbrace{- n}_{\to -\infty}$

D'où : $0 = -\infty$ Contradiction !

5) On sait que : $0 < 1$

$\Rightarrow y_n - \ln(y_n) - n - 1 < y_n - \ln(y_n) - n$

$\Rightarrow f_{n+1}(y_n) < f_{n+1}(y_{n+1})$

$\underset{(f_n \text{ strictement croissante sur }]1,+\infty[)}{\Longrightarrow} y_n < y_{n+1}$

D'où : $(y_n)_{n\geq 2}$ $\nearrow$

La suite $(y_n)_{n\geq 2}$ est $\nearrow$ et non majorée, ainsi elle diverge.

Semaine 11

Énoncé F.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto nx - e^{-x} \end{array} \right.$

a) Montrer que l'équation $(E_n) : f_n(x) = 0$ a une unique solution notée u_n.

b) Montrer que, $\forall n \geq 1$, $u_n \geq 0$, puis que $u_n \leq \frac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

c) Calculer $f_{n+1}(u_n)$. En déduire les variations de $(u_n)_{n \geq 1}$.

a) Dérivons f_n :

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = n + e^{-x} > 0$ et $\mathbb{R}$ un intervalle

donc d'après le critère de stricte monotonie, f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Calculons les limites de f_n :

On sait que $n > 0$ et $e^{X} \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$

donc $xn \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ et $e^{-x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ par composée de limites

donc $xn - e^{-x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

donc $f_n(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

de manière analogue, on peut montrer que $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Ainsi :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $(E_n) : f_n(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera u_n.

b) Calculons $f_n(0)$: Rappel : $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(0) = n0 - e^{-0}$$
$$= -1 < 0$$

donc $\boxed{0 \leq u_n}$ par (stricte) croissance de $f_n(x)$.

Calculons $f_n(\frac{1}{n})$:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n} - e^{-\frac{1}{n}}$$
$$= 1 - e^{-\frac{1}{n}}$$

or, $n > 0$ donc $-\frac{1}{n} < 0$

donc $e^{-\frac{1}{n}} < 1$

donc $1 - e^{-\frac{1}{n}} > 0$

donc $\boxed{u_n \leq \frac{1}{n}}$ par croissance de f_n.

Timothée F.

Déduisons-en $\lim_{n \to +\infty} u_n$:

On sait que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$

or, $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc d'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 .}$$

c) Calculons $f_{n+1}(u_n)$:

$$f_{n+1}(u_n) = (n+1)u_n - e^{-u_n}$$
$$= u_n + \underbrace{n u_n - e^{-u_n}}_{= 0 \text{ car } u_n \text{ solution de } (E_n)}$$
$$= u_n$$

or, $u_n \geq 0$

donc $u_n \geq u_{n+1}$ par croissance de f_{n+1}
(démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

donc $\boxed{(u_n)_{n \geq 1} \text{ est décroissante.}}$

Eliott SV SEMAINE 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n^2+1}{4}$.

a. Représenter graphiquement C_f, la droite d'équation $y = x$ et les 3 premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Montrer que $]2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}[$ est stable par f.

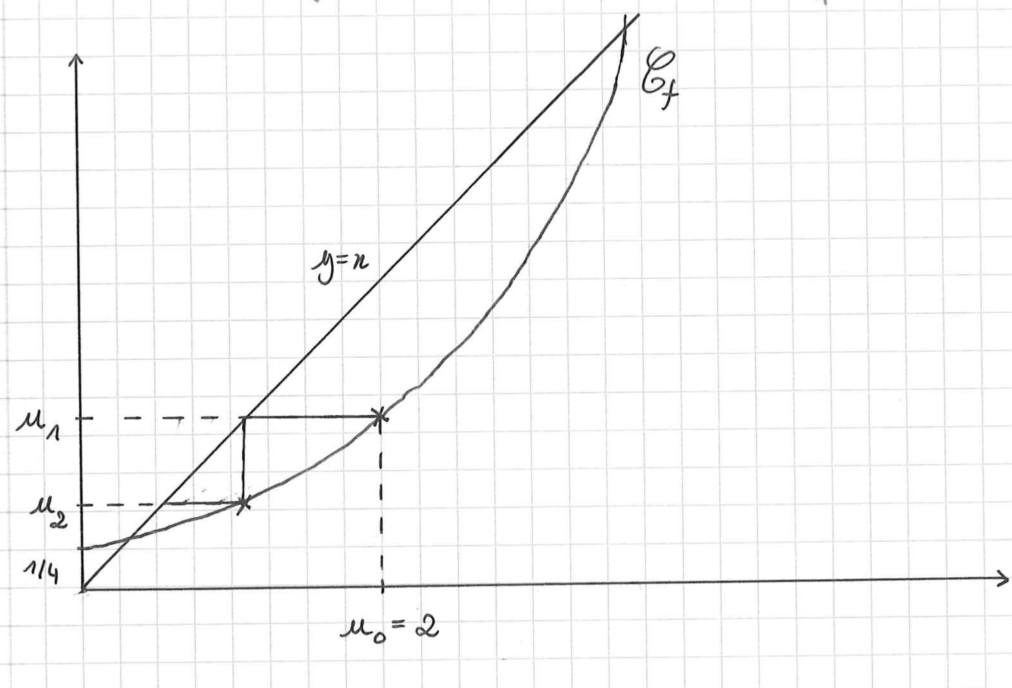
c. Montrer que, $\forall x \in \,]2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}[$, $f(x) < x$.

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

e. Etudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec, cette fois, $u_0 \in \mathbb{R}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n^2+1}{4} \end{cases}$

a)



b) $]2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}[$ est stable par f ssi $\forall x \in I =]2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}[$, $f(x) \in I$.

Soit $x \in I$. On a :

$$2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$$

$\cdot^2 \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$ $(2-\sqrt{3}>0)$ $\Longrightarrow$ $\Longleftarrow$ $\sqrt{\cdot} \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

$$(2-\sqrt{3})^2 < x^2 < (2+\sqrt{3})^2$$

$$4-4\sqrt{3}+3 < x^2 < 4+4\sqrt{3}+3$$

$$8-4\sqrt{3} < x^2+1 < 8+4\sqrt{3}$$

$$2-\sqrt{3} < \frac{x^2+1}{4} < 2+\sqrt{3}$$

$$2-\sqrt{3} < f(x) < 2+\sqrt{3}$$

donc I est stable par f.

c) Soit $x \in I$

$$f(x)-x = \frac{x^2+1}{4} - x = \frac{x^2-4x+1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(x^2-4x+1) = \frac{1}{4}\left((x-2)^2-4+1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left((x-2)^2-\sqrt{3}^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\underbrace{(x-2-\sqrt{3})}_{<0}\underbrace{(x-2+\sqrt{3})}_{>0}\right)$$

donc $f(x)-x<0$ soit $f(x)<x$

d) Comme $\forall x \in I$, $f(x)<x$ il vient $\forall u_n \in I$,

$f(u_n) < u_n$ soit $u_{n+1} < u_n$.

Comme $u_0 = 2 \in I$, (u_n) est décroissante strictement.

De plus, (u_n) est minorée par 0 donc (u_n) admet une limite ℓ en $+\infty$.

Soit $\ell \in I$.

$$f(\ell)=\ell \iff \frac{\ell^2+1}{4} = \ell \iff \frac{1}{4}(\ell-2-\sqrt{3})(\ell-2+\sqrt{3}) = 0$$

$$\iff \ell_1 = 2+\sqrt{3} \text{ ou } \ell_2 = 2-\sqrt{3}.$$

Comme $u_0 = 2$ et $(u_n) \searrow$, et comme $\ell_1 > 2$, ℓ_1 n'est pas correcte. Ainsi, $\lim u_n = \ell_2 = 2-\sqrt{3}$.

e) On raisonne par disjonction de cas : ELLIOTT S.V.

<u>si $u_0 \in I$</u>

Le cas est identique à celui des questions précédentes.

<u>si $u_0 \in [2+\sqrt{3} ; +\infty[= I_+$</u>.

Soit $x \in I_+$.

$$f(x) - x = \frac{1}{4}\big(\underbrace{(x-2-\sqrt{3})}_{\geq 0}\underbrace{(x-2+\sqrt{3})}_{>0}\big)$$

> si $u_0 = 2+\sqrt{3}$, Alors (u_n) stationne

> si $u_0 > 2+\sqrt{3}$

$f(x) - x > 0$ donc $f(x) > x$

Soit $u_n \in I_+ \setminus \{2+\sqrt{3}\}$. Alors $f(u_n) = u_{n+1} > u_n$ et

(u_n) est strictement croissante.

L'equation $f(l) = l$ n'admet aucune solution dans $I_+ \setminus \{2+\sqrt{3}\}$.

Donc (u_n) diverge en $+\infty$. Ainsi, $\lim u_n = +\infty$

<u>si $u_0 \in]-\infty ; 2-\sqrt{3}] = I_-$</u>

Soit $x \in I_-$

$$f(x) - x) = \frac{1}{4}\big(\underbrace{(x-2-\sqrt{3})}_{<0}\underbrace{(x-2+\sqrt{3})}_{\leq 0}\big)$$

> si $u_0 = 2-\sqrt{3}$, Alors (u_n) stationne

> si $u_0 < 2-\sqrt{3}$

$f(x) - x > 0$ donc $f(x) > x$.

Soit $u_n \in I_- \setminus \{2-\sqrt{3}\}$. Alors $f(u_n) = u_{n+1} > u_n$ et

(u_n) est strictement croissante et majorée et $\lim u_n = 2-\sqrt{3}$

Léa N.

Colle de la semaine 11

Énoncé :

Étudier la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 4$
et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{4U_n + 5}{U_n + 3}$

Solution :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ U_{n+1} = \dfrac{4U_n+5}{U_n+3} \end{cases}$

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$

On pose $f : x \longmapsto \dfrac{4x+5}{x+3}$ tel que $f(U_n) = U_{n+1}$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \in \mathbb{R}^+$ donc $\mathbb{R}^+$ stable par f.

x	0 $+\infty$
$f(x)$	$+$
$f'(x)$	$+$
f	$\nearrow$

f dérivable $\forall x \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = \frac{4(x+3) - 4x + 5}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$$

Mq $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$: " $0 \le U_{n+1} \le U_n$ "

(I) à $n = 0$: $U_0 = 4$, $U_1 = 3$

$0 \le U_1 \le U_0$ donc $P(0)$ est vraie.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tq $P(n)$ vraie. Mq $P(n+1)$ vraie.

$0 \le U_{n+1} \le U_n$

$\xRightarrow{f \nearrow} f(0) \le f(U_{n+1}) \le f(U_n)$

$\Rightarrow \frac{5}{3} \le U_{n+2} \le U_{n+1}$

$\Rightarrow 0 \le U_{n+2} \le U_{n+1}$

Donc la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.

Par théorème de la limite monotone, (U_n) converge vers une limite finie.

Soit $l \in [0, 4]$ la limite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Or f est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc f continue en l.

Donc l est solution de l'équation :

$$
\begin{aligned}
& f(x) = x \\
\Leftrightarrow \quad & 4x + 5 = x(x+3) \\
\times (x+3) > 0 \qquad \Leftrightarrow \quad & 4x + 5 = x^2 + 3x \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - x - 5 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(x - \frac{1 - \sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{21}}{2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Donc $x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ ou $x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$

Or $l \geq 0$

Donc $l = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$

Leurs Guillaume S. — Colle de la semaine 11

EXERCICE 11 — Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n+5}{u_n+3}$.

Solution : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n+5}{u_n+3} \end{cases}$

On pose $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{4x+5}{x+3} \end{array} \right.$ en remarquant que $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$

• Pour commencer, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie puisque $\mathbb{R}_+$ est stable par f :

Preuve par récurrence simple :

On pose $\forall n\in\mathbb{N}$ $P(n)$ = "u_n est bien définie et $u_n\in\mathbb{R}_+$"

Initialisation à $n=0$: $u_0 = 4 \in \mathbb{R}_+$ ✓

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n\in\mathbb{R}_+$. Or comme $u_{n+1} = f(u_n)$ (bien défini), et comme $\mathbb{R}_+$ est stable par f :

Donc $u_{n+1} = f(u_n) \in \mathbb{R}_+$

Conclusion : La propriété ayant été initialisée et étant héréditaire, par principe de récurrence simple elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

• Nous nous intéressons désormais aux variations de f.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, ainsi

$$\forall x\in\mathbb{R}_+\quad f'(x) = \frac{4(x+3)-(4x+5)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi nous en déduisons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
Plus précisément elle est décroissante.

$u_0 = 4$
$u_1 = 3$
$u_0 \geq u_1$

• Intéressons nous désormais au signe de, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $f(x) = x$
Cela revient à résoudre :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) - x = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4x+5}{x+3} - x = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4x+5 - x^2 - 3x}{3+x} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-(x^2 - x - 5)}{x+3} = 0$$

Trouvons les racines du polynome $X^2 - X - 5 = 0$
$\Delta = 1 + 20 = 21 > 0 \Rightarrow 2$ solutions réelles
$X \in \left\{ \frac{1+\sqrt{21}}{2} ; \frac{1-\sqrt{21}}{2} \right\}$

Ainsi nous en déduisons que l'unique solution positive pour x est
$$x = -\frac{1-\sqrt{21}}{2}$$
Nous affirmons, après étude de $f(x) - x$, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~~est~~ est minorée par $-\frac{1-\sqrt{21}}{2}$. Vérifions le par récurrence simple.
• On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n) =$ " u_n est minorée par $(-\frac{1-\sqrt{21}}{2}) \in \mathbb{R}_+$ "
Initialisation à $n = 0$: $u_0 = 4 > (-\frac{1-\sqrt{21}}{2})$ puisque : $5 \geq 1 - \sqrt{21} \geq 3$
Donc $P(0)$ est vraie $\Rightarrow \frac{5}{2} \geq -\frac{1-\sqrt{21}}{2} \geq \frac{3}{2}$
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ est vraie. Considérons $P(n+1)$.
$-\frac{1-\sqrt{21}}{2} \geq 0$ donc $f(-\frac{1-\sqrt{21}}{21})$ existe.
Or comme $u_{n+1} = f(u_n)$. Vérifions que $u_{n+1} = -\frac{1-\sqrt{21}}{2}$
Or, par stricte croissance de f : $u_{n+2} = f(u_{n+1}) > f(-\frac{1-\sqrt{21}}{2}) \geq -\frac{1-\sqrt{21}}{2}$
Ainsi $P(n+1)$ est vraie
Conclusion : La propriété ayant été initialisée et étant héréditaire, elle est vraie, par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc minorée par $(-\frac{1-\sqrt{21}}{2}) \in \mathbb{R}_+$.
D'après le théorème de la limite monotone, comme $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ est décroissante et majorée, elle converge, et admet pour limite son inf.

Pour conclure $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \to -\frac{1-\sqrt{21}}{2}$

Mouchonnet Raphaël

Colle de la semaine n°11

$$\boxed{(E) \quad 2x + 3y = 5 \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2}$$

Solution :

On remarque que $(1,1)$ est solution évidente.

Donc pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$2x + 3y = 2 \times 1 + 3 \times 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2(x-1) = 3(1-y)$$

On résonne par analyse-synthèse.

Analyse :

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}$

$$2(x-1) = 3(1-y)$$

Donc $2 \mid 3(1-y)$ et $2 \wedge 3 = 1$

Selon le lemme de Gauß, $2 \mid (1-y)$

i.e. $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $1-y = 2k$

$$\Rightarrow \quad y = 1 - 2k$$

$$\Rightarrow \quad 2(x-1) = 3(1-(1-2k))$$

$$\Rightarrow \quad x = 3k+1$$

Notre ensemble candidats est :

$$E_c := \{ (3k+1, 1-2k) : k \in \mathbb{Z} \}$$

Synthèse : On vérifie que l'unique candidat est bien solution de (E).

Soit $k \in \mathbb{Z}$

$$2(3k+1) + 3(1-2k)$$

$$= 6k + 2 + 3 - 6k$$

$$= 5$$

Le candidat est solution de (E)

L'ensemble solution est :

$$\boxed{S = \{ (3k+1, 1-2k) : k \in \mathbb{Z} \}}$$

Lina . A

Colle de la semaine 11

7.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n^2+1}{4}$.

a. Représenter graphiquement C_f, la droite d'équation $y = x$ et les 3 premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

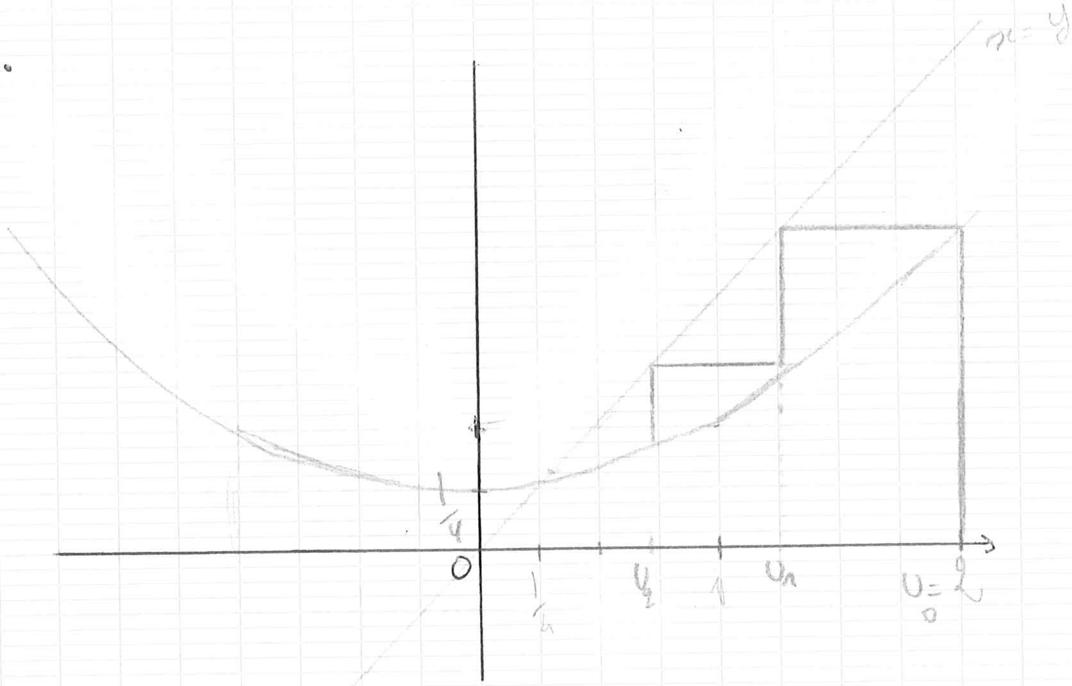
b. Montrer que $]2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}[$ est stable par f.

c. Montrer que, $\forall x \in]2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}[$, $f(x) < x$.

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution :

a.



$u_0 = 2$. $\quad u_1 = \dfrac{5}{4} \quad u_2 = \dfrac{41}{64}$

b. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{4}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

$f'(x) = \dfrac{1}{4} \times 2x = \dfrac{x}{2} \geq 0$. pour $x \in \mathbb{R}^+$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

$f(2-\sqrt{3}) = \dfrac{(2-\sqrt{3})^2+1}{4} = \dfrac{8-2\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$.

$f(2+\sqrt{3}) = 2+\sqrt{3}$.

Donc $f(]2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}[) =]2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}[$.

Ainsi l'intervalle $]2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}[$ est stable par f.

c. Soit $x \in]2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}[$.

Étudions le signe de $f(x)-x$.

$$f(x)-x = \frac{x^2+1}{4} - x = \frac{x^2+1-4x}{4}$$

$$= \frac{(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})}{4}$$

$f(x)-x = 0 \iff x = 2+\sqrt{3}$ ou $x = 2-\sqrt{3}$

x	$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$
$x-2+\sqrt{3}$	||	$+$	||
$x-2-\sqrt{3}$	||	$-$	||
$f(x)-x$	||	$-$	||

Donc

$$\forall x \in]2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}[\quad f(x) < x$$

d. On a établit en (c) que $f(x) < x$.

Pour $x = U_n$, il vient $f(U_n) < U_n$.

Donc $U_{n+1} < U_n$. ainsi la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, et minorée par 0.

Par le théorème de la limite monotone, (U_n) converge.

Soit $l = \lim U_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

Comme la fonction f est continue sur $l \geq 0$

$$f(U_n) \to f(l).$$

Donc $l = f(l) \iff l = 2-\sqrt{3}$ ou $l = 2+\sqrt{3} > 2$.

Comme (U_n) est strictement décroissante et $U_0 = 2$, alors $l = 2-\sqrt{3}$.

$$\lim U_n = 2-\sqrt{3}$$

Adam M,

Colle de la semaine 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $17 \mid 3\times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que :

$P(n)$: " $17 \mid 3\times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ "

(I)nitialisation au rang 1 :

$3\times 5^{2\times 1-1} + 2^{3\times 1-2} = 17$

Donc $P(1)$ est vraie

(H)érédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $P(n)$ et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$3\times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 3\times 5^{2n-1} \times (17+8) + 2^{3n-2}\times 8$$
$$= 8\,(3\times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}) + 17\times 3\times 5^{2n-1}$$

HR : $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $3\times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k$

Donc $3\times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17(8k + 3\times 5^{2n-1})$

Donc $17 \mid 3\times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$

Donc $P(n+1)$ est vraie

$P(n)$ est vraie et est héréditaire donc d'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $17 \mid 3\times 5^{2n-1} + 3^{2n-2}$

Riero T. Colle de la semaine 11

Exercice : Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1-u_n)^2$

Solution :

Soit $f \left| \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow [0,1] \\ x \longmapsto (1-x)^2 \end{array} \right.$. Montrons que f est bien définie.

Soit $x \in [0,1]$. Montrons que $f(x) \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \\ &\Rightarrow 0^2 \leq (1-x)^2 \leq 1^2 \quad \text{(fonction carré ↗↗ sur } \mathbb{R}_+) \\ &\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \end{aligned}$$

f est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$:
$f'(x) = -2(1-x) < 0$.
f est donc décroissante sur $[0,1]$.
Par composition, on a donc $f \circ f$ ↗↗ sur $[0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = f(u_n)$
et donc $u_{n+2} = f \circ f(u_n)$

On en déduit donc que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

Or : $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = (1-u_0)^2 = \frac{1}{4}$, $u_2 = (1-u_1)^2 = \frac{9}{16}$ et $u_3 = (1-u_2)^2 = \frac{49}{216}$

On a donc $u_0 < u_2$ et $u_1 > u_3$.

(u_{2n}) est donc croissante et majorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone elle converge vers une limite $l_1 \in [0,1]$.
De même (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $l_2 \in [0,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_{2n} \longrightarrow l_1$ donc $f \circ f(u_{2n}) \longrightarrow f \circ f(l_1)$

donc $u_{2(n+1)} \longrightarrow f \circ f(l_1)$

or $u_{2(n+1)} \longrightarrow l_1$

donc par unicité de la limite : $f \circ f(l_1) = l_1$

de même on a $f \circ f(l_2) = l_2$.

On cherche donc les solutions de l'équation :

$f \circ f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$.

$$
\begin{aligned}
f \circ f(x) = x &\iff (1-(1-x)^2)^2 - x = 0 \\
&\iff (1-(x^2-2x+1))^2 - x = 0 \\
&\iff x^2(x-2)^2 - x = 0 \\
&\iff x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x = 0 \\
&\iff x(x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = 0 \\
&\iff x(x-1)(x^2-3x+1) = 0 \\
&\iff x(x-1)\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1\right) = 0 \\
&\iff x(x-1)\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = 0 \\
&\iff x(x-1)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Pierre T. Les racines du polynôme sont donc : $0, 1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ donc $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ n'est pas solution.

On sait que : $36 < 45 < 49$

donc $6 < 3\sqrt{5} < 7$ ($\sqrt{\cdot}$ ↗↗ sur $\mathbb{R}_+$)

donc $2 < \sqrt{5} < \frac{7}{3}$

donc $-\frac{7}{3} < -\sqrt{5} < -2$

donc $\frac{2}{3} < 3-\sqrt{5} < 1$

donc $\frac{1}{3} < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$

or (u_{2n}) est croissante donc $l_1 \geq u_0 = \frac{1}{2} > \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$.

donc (u_{2n}) converge vers 1.

de même (u_{2n+1}) est décroissante donc $l_2 \leq u_1 = \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$.

donc (u_{2n+1}) converge vers 0.

Ibrahim . K

Colle de la Semaine

Soit $n \in \mathbb{N}$ Montrer que :

$$29 \mid \left(2^{2(28n+1)}+1\right)^2+4$$

on applique l'algorithme d'euclide

$29 = 2 \times 14 + 1$

$14 = 14 \times 1 + 0$

ainsi $29 \wedge 2 = 1$ de plus $29 \in \mathcal{P}$ et $29 \nmid 2$

ainsi

$2^{28} \equiv 1 \; [29]$ (petit Théorème de Fermat)

$2^{28n+1} \equiv 2 \; [29]$

donc

$\left(2^{28n+1}\right)^2 + 1 \equiv 5 \; [29]$

propriétés de Compatibilité de la Relation de Congruence

donc

$\left(2^{2(28n+1)}+1\right)^2+4 \equiv 25+4 \equiv 29 \equiv 0 \; [29]$

ainsi $29 \mid \left(2^{2(28n+1)}+1\right)^2+4$

Robin G. Colle de la semaine 11

Étudier la suite définie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \dfrac{4U_n + 5}{U_n + 3}$.

Solution : Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{-3\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{4x+5}{x+3} \end{array} \right.$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\left\{ \begin{array}{l} 4x + 5 > 0 \\ x+3 > 0 \end{array} \right.$ i.e. $f(x) > 0$

Donc f est stable sur $[0, +\infty[$ intervalle.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = f(U_n)$

- Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left\{ \begin{array}{l} U_n \text{ existe} \\ \text{et } U_n > 0 \ (U_n \in [0, +\infty[\end{array} \right.$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et
$\forall x \in \mathbb{R}_+$ $f'(x) = \dfrac{7}{(x+3)^2} > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Donc (U_n) est monotone.

- $U_1 = f(U_0) = 3$, $U_1 < U_0$ donc (U_n) est décroissante.

- On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n > 0$. Donc (U_n) est minorée par 0. Par le théorème de la limite monotone,

$U_n \longrightarrow \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n =: \ell \in \mathbb{R}$

1/2

• $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq 0$

Par passage à la limite dans une inégalité large, on a :

$$\ell \geq 0$$

• $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f(U_n)$

$$\begin{array}{ccl} U_{n+1} & = & f(U_n) \\ \downarrow & & \downarrow \text{ car } f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ \ell & & \ell \quad \text{ et } \underline{\ell \in \mathbb{R}_+} \end{array}$$

Donc $f(U_n) \to \ell$ et $\ell = f(\ell)$.

On détermine ℓ en résolvant l'équation $f(\ell) = \ell$ $(*)$.

$$(*) \iff \frac{4\ell + 5}{\ell + 3} - \ell = 0$$

$$\iff \frac{-\ell^2 + \ell + 5}{\ell + 3} = 0$$

$\ell \geq 0$ donc $\ell + 3 > 0$, on résout $x^2 - x - 5 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$\iff x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$$

$\sqrt{21} > \sqrt{16} > 1$ donc $\frac{1 - \sqrt{21}}{2} < 0$, or $\ell \geq 0$

Ainsi $\ell = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq 0 \\ U_n \longrightarrow \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \end{array}}$$

2/2

Célia A Colle de la semaine 11

énoncé

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \sqrt{u_n}$.

solution

On pose la fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{2} + \sqrt{x} \end{array} \right.$

L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par la fonction f. De plus, $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Donc la suite (u_n) est bien définie.

On étudie les variations de la fonction f.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Puisque $x \in \mathbb{R}_+^*$, la dérivée est strictement positive. Donc f est croissante. Par conséquent, (u_n) est monotone.

On étudie la différence entre u_0 et u_1 pour connaître la monotonie de la suite.

$$u_1 - u_0 = \frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{1}{2} > 0$$

La suite est croissante.

On étudie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, le signe de $f(x) - x$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f(x) - x = \frac{x}{2} + \sqrt{x} - x$$

$$= \sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1 - \sqrt{x}\right)$$

x	1		4		$+\infty$
$\sqrt{x}$		$+$		$+$	
$-\frac{\sqrt{x}}{2}+1$		$+$	0	$-$	
f'		$+$	0	$-$	

On démontre par récurrence que (u_n) est majorée par 4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = $ " $u_n \leq 4$ ".

initialisation : à $n = 0$, $u_0 = 1$. Donc $P(0)$ vraie.

hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ vraie.

Alors $u_n \leq 4$

D'où $f(u_n) \leq f(4)$

Ainsi $u_{n+1} \leq 4$. Donc $P(n+1)$ vraie.

conclusion : Par l'initialisation, le caractère héréditaire de la propriété et l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq 4$.

(u_n) est croissante et majorée, alors selon le théorème de la limite monotone, elle converge.

Soit $\ell = \lim u_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ $f(u_n) \longrightarrow f(\ell)$

Donc $\ell = f(\ell)$. D'où $\ell = 4$.

La suite (u_n) est croissante.
Elle converge vers 4.

Rapport de colle semaine 11

Titouan D

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ à une unique solution notée u_n

2) Montrer que $\forall n \geq 1 \quad 0 < u_n < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$f_n'(x) = -e^{-x} - \underbrace{(2n-1)}_{>0} x^{2n-2}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n'(x) < 0$

ainsi f_n strictement décroissante

$$f_n(0) = e^{-0} - 0^{2n-1}$$
$$= 1 > 0$$

$$f_n(1) = e^{-1} - 1^{2n-1}$$
$$= e^{-1} - 1 < 0$$

f_n continue car c'est une somme de fonctions continues

Ainsi, le théorème des valeurs intermédiaire

L'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution et $\forall n \geq 1 \quad 0 < u_n < 1$

3) Calculer $f_{n+1}(u_n)$. En deduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

$$f_{n+1}(u_n) = e^{-u_n} - u_n^{2(n+1)-1}$$
$$= u_n^{2n-1} - u_n^{2n+1} \qquad (f(u_n) = 0)$$
$$= u_n^{2n-1}(1 - u_n^2) \qquad (0 < u_n < 1)$$

donc $f_{n+1}(u_n) > 0$

Comme f_n strictement décroissante, on en déduit $u_{n+1} > u_n$

Ainsi $\boxed{(u_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante}}$

4) Montrer que $\forall n \geq 1$, $\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n-1}$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

$$f_n(u_n) = 0$$

donc $e^{-u_n} = u_n^{2n-1}$

$$-u_n = \ln(u_n^{2n-1})$$

(ln croissante)

$$\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n-1}$$

(propriétés de ln et $2n-1 \geq 0$)

Comme $0 < u_n < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n-1} \leq \lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) \leq 0$$

Ainsi $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = e^0 = 1}$ (théorème d'encadrement)

5) On pose alors $u_n = 1 + h_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$

Montrer que $\ln(1+h_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$; en déduire que $u_n - 1 \sim -\frac{1}{2n}$

On étudie $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+h_n)}{\frac{-1}{2n}} = \dfrac{2u_n n}{2n+1}$

Comme $0 < u_n < 1$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+h_n)}{-\frac{1}{2n}} = 0$

Donc $\boxed{\ln(1+h_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}}$

Or $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$ donc quand n tend vers plus l'infini,

$$\ln(1+h_n) \approx h_n$$

On a donc $h_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}}$$

Tigüin, David

Colle de la semaine 11

Resoudre l'equation
(E) $2x + 3y = 5$ d'inc $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$

• On veut trouver une solution particulière de (E). On observe que (1, 1) est une solution evidente.

• Resolvons par analyse synthèse l'équation :

Analyse :

On pose $\begin{cases} 2+3=5 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$

donc $2(x-1) + 3(y-1) = 0$ et $2(x-1) = -3(y-1)$

D'après le lemme de Gauß $2 \wedge 3 = 1$ et $2 \mid -3(y-1)$ ainsi $2 \mid (y-1)$ de même $-3 \mid 2(x-1)$ alors $-3 \mid (x-1)$

On peut alors écrire $\exists k \in \mathbb{Z}$ $\begin{array}{l} y-1 = 2k \\ x-1 = -3k \end{array}$

et $\begin{array}{l} y = 2k+1 \\ x = -3k+1 \end{array}$

Le candidat ensemble solution est $\{(-3k+1, 2k+1) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

Synthèse

En remplaçant $x \leftarrow -3k+1$ $y = 2k+1$ on obtient

$2 \times (-3)k + 2 + 3 \times 2k + 3 = -6k + 2 + 6k + 3 = 5$

Alors $Sol_{(E)} = \{(-3k+1, 2k+1) ; k \in \mathbb{Z}\}$

Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \sqrt{u_n}$

Solution

Posons $f \left| \begin{array}{l} [1,4] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{2} + \sqrt{x} \end{array} \right.$

*) Soit $x \in [1,4]$, $1 \leq x \leq 4$

donc $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 2$ et $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$

donc $1 \leq \frac{3}{2} \leq \frac{x}{2} + \sqrt{x} \leq 4$

donc $f(x) \in [1,4]$

Donc $[1,4]$ est stable par f

*) f est la somme de fonctions strictement croissantes donc f est strictement croissante

*) Recherche des points fixes.

Soit $x \in [1,4]$

$f(x) - x = -\frac{x}{2} + \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0$ ou $\sqrt{x} = 2$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\underbrace{x}_{\in[1,4]} = 4$ ($\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$)

*) Montrons par récurrence simple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) =$ " $4 \geq u_{n+1} \geq u_n$ " est vraie

·) Initialisation pour $n = 0$

$u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{u_0}{2} + \sqrt{u_0} = \frac{3}{2}$ donc $4 \geq u_1 \geq u_0$ donc $P(0)$ est vraie

·) Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie

$4 \geq u_{n+1} \geq u_n$ (hypothèse de récurrence)

donc $2 \geq \frac{u_{n+1}}{2} \geq \frac{u_n}{2}$ et $2 \geq \sqrt{u_{n+1}} \geq \sqrt{u_n}$

donc $4 \geq \frac{u_{n+1}}{2} + \sqrt{u_{n+1}} \geq \frac{u_n}{2} + \sqrt{u_n}$

donc $4 \geq u_{n+2} \geq u_{n+1}$

·) Conclusion : D'après l'initialisation, l'hérédité et l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie

*) (u_n) est croissante et majorée, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) admet une limite et $u_n \longrightarrow \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R}$

Soit $\ell = \lim u_n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n \leq 4$

Donc $1 \leq \ell \leq 4$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) = u_{n+1}$

Par passage à la limite (f est continue sur $[1, 4]$)

$f(\ell) = \ell$

$\Leftrightarrow \frac{\ell}{2} + \sqrt{\ell} = \ell$

$\Leftrightarrow \sqrt{\ell}\left(-\frac{\sqrt{\ell}}{2} + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\ell} = 0$ ou $\sqrt{\ell} = 2$

$\Leftrightarrow \underset{\notin [1,4]}{\ell = 0}$ ou $\underset{\geq 0}{\ell} = 4$ ($\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$)

Donc $u_n \longrightarrow 4$

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{u_n^2}{4}$.

Solution : Considérons l'application $f \left| \begin{array}{l}]0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} \end{array} \right.$

• Montrons que $]0;1]$ est stable par f.

Soit $x \in]0,1]$. $f(x) = \underbrace{\dfrac{x}{2}}_{\in]0,\frac{1}{2}]} + \underbrace{\dfrac{x^2}{4}}_{\in]0;\frac{1}{4}]}$

Donc $f(x) \in]0;1]$, $]0;1]$ est stable par f

• Étudions la monotonie éventuelle de f sur $]0;1]$

f est dérivable sur $]0;1]$ et si $x \in]0;1]$:

$f'(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} > 0$ car $0 < x \leq 1$.

f est donc strictement croissante sur $]0;1]$

• Étudions à présent le signe de $f(x) - x$ si $x \in]0;1]$

$f(x) - x = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x - x = \dfrac{x^2 - 2x}{4} = \dfrac{\overbrace{x}^{>0}\,\overbrace{(x-2)}^{<0}}{4}$

Donc pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) - x < 0$

- Sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Démontrons $\mathcal{P}(n)$: " $u_{n+1}\leq u_n$ "

Initialisation : D'après ce qui précède, $f(u_0)-u_0<0$, ie : $u_1<u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé tel que $u_{n+1}\leq u_n$
Il vient par croissance de f sur $]0;1]$:

$$f(u_{n+1})\leq f(u_n) \quad \text{ie :} \quad u_{n+2}\leq u_{n+1}$$

$\mathcal{P}(n)$ est donc héréditaire, ce qui nous permet d'établir :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

- Limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(u_n) est décroissante et minorée par 0, par théorème de la limite monotone, elle converge. Posons $l=\lim u_n$.

$]0;1]$ est stable par f donc : $\forall n\in\mathbb{N}\ 0\leq u_n\leq 1$

$n\to+\infty$: $0\leq l\leq 1$ (*)

$\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\to l$, nous sommes amenés à résoudre :

$$l=\frac{l}{2}+\frac{l^2}{4} \iff \frac{1}{4}l^2-\frac{1}{2}l=0$$
$$\iff \frac{1}{2}l\left(\frac{1}{2}l-1\right)=0$$
$$\iff l=0 \text{ ou } l=2$$

$l=2$ contredit (*)

Ainsi, $\boxed{\lim u_n=0}$

Alexandre M. Colle semaine 11

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par l'expression

$$f_n(x) = x^5 + nx - 1.$$

1. Étudier la fonction f_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
4. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$f_n'(x) = 5x^4 + n$

Or $n > 0$ (1)

et $5x^4 = 5(x^2)^2 \geqslant 0$ (2) pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $f_n'(x) > 0$ [somme membre à membre entre (1) et (2)]

x	$-\infty$	u_n	$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

Calcul des limites : $x^5 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

et $\underbrace{n}_{\in \mathbb{N}^*}x - 1 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

par composition de limite $f_n(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

De même $\left.\begin{array}{l} x^5 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \text{et } nx-1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right\} x^5+nx-1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

2. D'après la stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}$, ses limite et le corollaire du TVI, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution U_n.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'absurde supposons $U_n < 0$

donc $U_n^5 < 0$ [on applique $\cdot^5$ $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$]

donc $U_n^5 + nU_n - 1 < -1$ [$U_n < 0$, puis -1]

donc $f_n(U_n) < -1$

donc $0 < -1$ $\lightning$

donc $U_n \geq 0$

De même supposons $U_n > \frac{1}{n}$

donc $U_n^5 > \left(\frac{1}{n}\right)^5$

donc $U_n^5 + nU_n > \left(\frac{1}{n}\right)^5 + 1$

donc $\underbrace{U_n^5 + nU_n - 1}_{f(U_n)} > \left(\frac{1}{n}\right)^5$

donc $0 > \left(\frac{1}{n}\right)^5$ or $n \in \mathbb{N}^*$ $\lightning$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n}$

4) $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, par théorème d'encadrement, $\boxed{U_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$

Youssef B   Colle de la semaine 11

Demontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ est divisible par 9

Solution :

On peut procéder avec une disjonction de cas :

si $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$

alors $n+1 = 3k+1$ et $n+2 = 3k+2$

$$\begin{aligned} n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 &= 9k^3 + (3k+1)^3 + (3k+2)^3 \\ &= 9k^3 + 9(3k^3 + 3k^2 + k) + 1 + 9(3k^3 + 6k^2 + 4k) + 8 \\ &= 9\underbrace{(7k^3 + 9k^2 + 5k + 1)}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Donc $9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

si $n = 3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$

alors $n+1 = 3k+2$ et $n+2 = 3k+3 = 3(k+1)$

$$\begin{aligned} n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 &= (3k+1)^3 + (3k+2)^3 + 9(k+1)^3 \\ &= 9\underbrace{(6k^3 + 9k^2 + 5k + 1 + (k+1)^3)}_{\in K} \end{aligned}$$

Donc $9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

si $m = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

alors $m+1 = 3(k+1)$ et $m+2 = 3k+4$

$$m^3 + (m+1)^3 + (m+2)^3 = (3k+2)^3 + 9(k+1)^3 + (3k+4)^3$$
$$= 9\underbrace{\left(6k^3 + 18k^2 + 20k + 8 + (k+1)^3\right)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Donc $9 \mid m^3 + (m+1)^3 + (m+2)^3$

Alors,

$\forall m \in \mathbb{N}$, $m^3 + (m+1)^3 + (m+2)^3$ et divisible par 9

Rapport de colle, semaine 11

Wassim
M.

$\boxed{\text{Démontrer que 13 divise } 3^{126} + 5^{126}}$

On sait que $3^3 \equiv 1 \, [13]$ et $126 = 42 \times 3$

donc $(3^3)^{42} \equiv 1^{42} \, [13]$

donc $3^{126} \equiv 1 \, [13]$

De plus, on a $5^2 \equiv -1 \, [13]$ et $126 = 63 \times 2$

donc $(5^2)^{63} \equiv (-1)^{63} \, [13]$

donc $5^{126} \equiv -1 \, [13]$

Par conséquent $3^{126} + 5^{126} \equiv 0 \, [13]$

Ainsi, 13 divise bien $3^{126} + 5^{126}$

Nicolas H : Colle de la semaine 11

Énoncé

Etudier la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 \in]0;1]$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{U_n^2}{4}$

Solution:

Posons $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} \end{array} \right.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x}{4}(x+2)$

x	0	$+\infty$
f	||	$\nearrow$

$\forall x \in]0;1]$ $0 < x \leq 1$

$\underset{f \nearrow}{\Rightarrow}$ $0 < \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} \leq \frac{3}{4} \leq 1$ (**)

donc $]0;1]$ est stable par f

$f(x) - x = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}$

(*)

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	||	$-$	0	$+$	

Posons $U_{n+1} = f(U_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Montrons par récurrence simple que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ " U_n est bien définie et $U_n \in]0;1]$ " est vrai.

Initialisation au rang 0 : le nombre U_0 donné dans la définition appartient à I, Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ vrai, alors

Comme $U_n \in]0;1]$ et que f est définie sur $]0;1]$

$U_{n+1} = f(U_n)$ est bien défini. L'intervalle $]0;1]$ étant stable par f, on a de plus $U_{n+1} = f(U_n) \in]0;1]$

f étant strictement croissante sur $]0;1]$, (U_n) est monotone

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n}{2} + \frac{U_n^2}{4}$$

d'après ⊛, (U_n) est strictement décroissante sur I.

(U_n) est minorée et est strictement décroissante, d'après le théorème de la limite monotone,

$$U_n \longrightarrow \inf(U_n) = l \in \mathbb{R}$$

On sait que $l \in \{0;1\} \cup Fix(f) \cup Disc(f)$

donc $l \in \{0;1;2\}$, or $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < U_n \leq \frac{3}{4}$ $(**)$

donc $l \in \{0\} \Rightarrow l = 0$

Conclusion : (U_n) est minorée, strictement décroissante, $\inf(U_n) = 0$ et U_n tend vers 0.

Rayan. G

Colle de la semaine 11

Exercice n°2 : Pour tout $x \in]0;+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x - \ln(x) - n$.

1. Soit $x \in]0;+\infty[$ fixé. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
2. Soit $n \geq 2$ fixé. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions notées x_n et y_n telles que $x_n \in]0;1[$ et $y_n \in]1;+\infty[$
3. En utilisant la question 1 et le sens de variation de f_{n+1}, comparer $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire que $(x_n)_{n\geq 2}$ ~~conv~~ est décroissante
4. Montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ converge vers 0.

Solution :

1. Soit $x \in]0;+\infty[$ fixé.

Montrons que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

i.e $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

$$f_{n+1}(x) = x - \ln(x) - (n+1) = x - \ln(x) - n - 1$$
$$f_n(x) = x - \ln(x) - n$$

Cela nous livre $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -1 < 0$

Nous avons prouvé la décroissance en prouvant la ~~strictemen~~ stricte décroissance.

2. Soit $n \geq 2$ fixé.

Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions notée $x_n \in]0,1[$ et $y_n \in]1;+\infty[$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car c'est une somme de fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

① Soit $x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\boxed{f_n'(x) = 1 - \frac{1}{x}}$$

② On étudie le signe de $f_n'(x)$ où $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$1 - \frac{1}{x} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x - 1 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}_+^* \text{ donc } x > 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad x \geq 1$$

③ On dresse le tableau de variation de f_n :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$1+n$	$\nearrow$	$+\infty$

Calcul des limites de f_n :

$$\left.\begin{array}{l} x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \\ -\ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \\ -m \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -m \end{array}\right\}$$

Par opération sur les limites

$$\boxed{f_m(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 1 \\ -\ln(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0 \\ -m \underset{x \to 1}{\longrightarrow} -m \end{array}\right\}$$

Par opération sur les limites

$$\boxed{f_m(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 1-m}$$

Lorsque x tend vers l'infini, nous obtenons une forme indéterminée. Donc nous changeons la forme de l'expression.

Soit $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$x - \ln(x) - m = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{m}{x}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \\ -\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{(par croissance comparée)} \\ -\dfrac{m}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\}$$

Par opération sur les limites

$$\boxed{1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{m}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1}$$

Ainsi, puisque $x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ nous déduisons $\boxed{f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty}$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ donc f_n est continue sur $\mathbb{R}_{>0}$.

I. · $f_{n|]0;1[}$ est strictement décroissante
· $f_{n|]0;1[}$ est continue

Par théorème de la bijection :

$f_{n|]0;1[}$ forme une bijection entre $]0;1[$ et $]1-n;+\infty[$.

$n \geq 2$ donc $1-n \leq -1$. Ainsi $0 \in]1-n;+\infty[$

On en déduit

$$\boxed{\exists!\, x_n \in]0;1[\quad f_n(x_n) = 0}$$

II · $f_{n|]1;+\infty[}$ est strictement croissante
· $f_{n|]1;+\infty[}$ est continue

Par théorème de la bijection :

$f_{n|]1;+\infty[}$ forme une bijection entre $]1;+\infty[$ et $]1-n;+\infty[$

$0 \in]1-n;+\infty[$

On en déduit

$$\boxed{\exists!\, y_n \in]1;+\infty[\quad f_n(y_n) = 0}$$

De façon claire 1 n'est pas solution.
On en déduit que l'équation n'admet que deux solutions x_n et y_n.

Ephraïm Royer

Partie n°2 colle semaine n°11

3. $f_{n+1}(x_n) = x_n - \ln(x_n) - n - 1 = \underbrace{f_n(x_n)}_{=0} - 1 = -1$

$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$

Donc $f_{n+1}(x_n) - f_{n+1}(x_{n+1}) = -1 < 0$ ⊛

Par définition $x_n \in]0;1[$ et $x_{n+1} \in]0;1[$

Or f_{n+1} est strictement décroissante sur $]0;1[$ (Q2) (**)

Par ⊛

$f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$

Cela nous livre $x_{n+1} < x_n$ (**)

Ainsi ~~$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$~~ $\boxed{(x_n)_{n \geq 2} \text{ est décroissante.}}$

4. $f_n(x_n) = 0$

Donc $f_n(x_n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

Donc $x_n - \ln(x_n) - n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

Or $n \to +\infty$

Donc par opérations sur les limites:

5

$x_n - \ln(x_n) - n + n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc $x_n - \ln(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Étant donné que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in]0;1[$

$x_n - \ln(x_n)$ a la même limite

que $-\ln(x_n)$

Donc $-\ln(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc $\ln(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Donc $\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$

6

MATHEAN

Exercice de colle semaine 11.

Exercice 2. Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_n(x) = x - \ln(x) - n$.

1. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Montrer que la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Soit $n \geq 2$ fixé. Montrer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions notées x_n et y_n telles que $x_n \in]0,1[$ et $y_n \in]1, +\infty[$.
3. En utilisant la question 1 et le sens de variation de φ_{n+1}, comparer $\varphi_{n+1}(x_n)$ et $\varphi_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
4. Montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ converge vers 0.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) = x - \ln(x) - (n+1) - x + \ln(x) + n$$
$$= -1 < 0$$

On en déduit que $\underline{(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

2. φ_n est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

et : Soit $x \in]0 ; +\infty[$ $\quad \varphi_n'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

Etudions les variations de φ_n par l'étude de signe de φ_n'.

x	0		1		$+\infty$
$\varphi_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
φ_n	‖ $+\infty$	$\searrow$	$1-n$	$\nearrow$	$+\infty$

$\varphi_n(1) = 1 - \ln(1) - n$
$= 1 - n$

$x - \ln(x) - n \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ cc

$x - \ln(x) - n \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$

↳ car $\left(\ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty\right)$

• Comme $n \geq 2$: $1 - n \leq -1$.

• Le tableau de variation nous donne φ_n continue et strictement monotone sur $]0 ; 1[$ et $]1 ; +\infty[$ intervalles.

Ainsi : $\varphi_n{}_{|]0;1[}^{|]1-n;+\infty[} \left| \begin{array}{l}]0;1[\to]1-n ; +\infty[\\ x \mapsto \varphi_n(x) \end{array} \right.$ est une bijection

d'après le théorème de la bijection, tout comme :

$\varphi_n{}_{|]1;+\infty[}^{|]1-n;+\infty[}$

On en dédui, comme $0 \in]1-n ; +\infty[$, qu'il existe $x_n \in]0;1[$ et $y_n \in]1 ; +\infty[$ **uniques** tels que :

$\varphi_n(x_n) = 0$ et $\varphi_n(y_n) = 0$.

3. Comme $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante : Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$\varphi_n(x_n) > \varphi_{n+1}(x_n)$$

$$\Rightarrow \quad 0 > \varphi_{n+1}(x_n)$$

Or : $\varphi_{n+1}(x_{n+1}) = 0$

Ainsi : $\varphi_{n+1}(x_{n+1}) > \varphi_{n+1}(x_n)$

$(\varphi_{n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$ décroissante :

$$\Leftrightarrow \quad x_{n+1} < x_n$$

Ainsi, $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

4. On a : $\varphi_n(x_n) = 0$ pour $n \geq 2$.

Ainsi : $x_n - \ln(x_n) - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \quad x_n - \ln(x_n) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Comme $x_n \in]0;1[\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$,

$$\ln(x_n) \longrightarrow -\infty$$

$$\Rightarrow \quad -\ln(x_n) \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \quad \ln(x_n) \longrightarrow -\infty$$

Or : $\ln(X) \xrightarrow[X\to 0]{} -\infty$

On en déduit que $\boxed{x_n \longrightarrow 0}$

MATHEO.N. Exercice de colle semaine 11

Exercice 1. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit x un réel. Déterminer sa classe d'équivalence.

1. Pour montrer que R est une relation d'équivalence, il suffit de montrer qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

• Montrons qu'elle est réflexive : i.e. $x R x$

Soit $x \in \mathbb{R}$: D'une part : $x^2 - x^2 = 0$

D'autre part : $x - x = 0$

Ainsi : $x^2 - x^2 = x - x$ donc $x R x$

→ Ainsi, ~~R~~ est réflexive.

• Montrons que R est symétrique : i.e : $x R y \Leftrightarrow y R y$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

$\underset{\times -1}{\Leftrightarrow} y^2 - x^2 = y - x$

$\Leftrightarrow y R x$

→ Ainsi, R est symétrique.

• Montrons que R est transitives.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tq $x R y$ et $y R z$

alors : $y R z \Leftrightarrow y^2 - z^2 = \cancel{y} - \cancel{z}$

$\Leftrightarrow y^2 = z^2 + y - z$

Or : $x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y$

$$\iff x^2 - z^2 - y + z = x - y$$

$$\iff x^2 - z^2 = x - z$$

$$\iff x \mathcal{R} z$$

→ Ainsi, R est transitive.

On déduit des trois points précédants que R est une relation d'équivalence.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\bar{x} = \{ y \in \mathbb{R} \mid x \mathcal{R} y \}$$

Soit $y \in \bar{x}$

alors : $x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y$

$$\iff (x+y)(x-y) = x - y$$

$$\iff (x-y)(x+y-1) = 0$$

[intégrité de $\mathbb{R}$] $\iff x - y = 0$ ou $x + y - 1 = 0$

$$\iff y = x \quad \text{ou} \quad y = 1 - x$$

Ainsi : $\bar{x} = \{ x ; 1 - x \}$

Uta Baayen
de Neyer
MP2I

Rapport de colle.

Semaine 11
06/01/2023

Exercice :

Pour quels nombres entiers positifs n
le nombre $3^n - 2n - 1$ est-il divisible par 4 ?

Soit $n \in \mathbb{N}$ et mq $3^n - 2n - 1$ est divisible par 4.
On raisonne par disjonction de cas :

cas où $n = 4k$ où $k \in \mathbb{N}$

alors $3^n - 2n - 1$

$= 3^{4k} - 2 \times 4k - 1$

$= (3^4)^k - 8k - 1$

$= (81)^k - 8k - 1$

$= (80+1)^k - 8k - 1$

(binôme de Newton) $= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} 80^k - 8k - 1$

$= \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} 80^k + \underbrace{\binom{k}{0}}_{=1} \underbrace{80^0}_{=1} - 8k - 1$

$(80^k = 20^k 4^k)$ $= 4 \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} 20^k 4^{k-1} + 1 - 8k - 1$

$= 4 \Big(\underbrace{\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} 20^k 4^{k-1} - 2k}_{\in \mathbb{Z}} \Big)$

donc $4 \mid 3^n - 2n - 1$

cas où $n = 4k+1$ où $k \in \mathbb{N}$

alors $3^n - 2n - 1$

$$= 3^{4k+1} - 2(4k+1) - 1$$

$$= 3^{4k} \times 3 - 8k - 3$$

$$= 3\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} 80^k + 3 - 8k - 3$$

$$= 4\Big(\underbrace{3\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} 20^k 4^{k-1} - 2k}_{\in \mathbb{Z}}\Big)$$

donc $4 \mid 3^n - 2n - 1$

cas où $n = 4k+2$ où $k \in \mathbb{N}$

alors $3^n - 2n - 1$

$$= 3^{4k+2} - 2(4k+2) - 1$$

$$= 3^{4k} \times 9 - 8k - 5$$

$$= 9\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} 80^k + 9 - 8k - 5$$

$$= 4\Big(\underbrace{9\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} 20^k 4^{k-1} - 2k + 1}_{\in \mathbb{Z}}\Big)$$

donc $4 \mid 3^n - 2n - 1$

cas où $n = 4k+3$ où $k \in \mathbb{N}$

alors $3^n - 2n - 1$

$$= 3^{4k+3} - 2(4k+3) - 1$$

$$= 3^{4k} \times 27 - 8k - 7$$

$$= 27\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} 80^k + 27 - 8k - 7$$

$$= 4\Big(\underbrace{27\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} 20^k 4^{k-1} - 2k + 5}_{\in \mathbb{Z}}\Big)$$

donc $4 \mid 3^n - 2n - 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $4 \mid 3^n - 2n - 1$.

Ahmed Amine

Rapport de Colle — Semaine 11

Énoncé :

1) Donner une relation de Bézout entre 368 et 117

2) Montrer que la somme de 3 entiers consécutifs est divisible par 9.

Solution :

1) Cherchons $368 \wedge 117$

$368 = 117 \times 3 + 17$

$117 = 17 \times 6 + 15$ — $17 = 15 \times 1 + 2$

$15 = 7 \times 2 + 1$

$2 = 2 \times 1 + 0$

donc $368 \wedge 117 = 1$

On a :

$1 = 15 - 7 \times 2$

$\iff 1 = (117 - 17 \times 6) - 7 \times 2$

$\iff 1 = 117 - (368 - 117 \times 3) \times 6 - 7 \times (17 - 15 \times 1)$

$\iff 1 = 117 - 368 \times 6 + 117 \times 18 - 7 \times 17 + 15 \times 7$

$\iff 1 = 117 \times 19 - 368 \times 6 - 7(368 - 117 \times 3) + 7(117 - 17 \times 6)$

$\iff 1 = 117 \times 19 - 368 \times 6 - 7 \times 368 + 21 \times 117 + 7 \times 117 - 17 \times 42$

$\iff 1 = 117 \times 47 - 13 \times 368 - 42 \times (368 - 117 \times 3)$

$\iff 1 = 117 \times 47 + 126 \times 117 - 13 \times 368 - 42 \times 368$

$\iff 1 = 117 \times 173 - 55 \times 368$

Soit $n \in \mathbb{N}$

2) Considérons : $n-1$, n, $n+1$, qui sont trois entiers consécutifs

$S = (n-1)^3 + (n)^3 + (n+1)^3 = n^3 - \cancel{3n^2} + 3n - \cancel{1} + n^3 + \cancel{3n^2} + n^3 + 3n + \cancel{1}$

$= 3n^3 + 6n$

$S = 3n(n^2+2)$

donc la somme est divisible par 3

Pour :

- $n \equiv 0 [3] \Rightarrow n(n^2+2)$ divisible par 3

car $n(n^2+2) \equiv 0 [3]$

Alors S divisible par 9.

- $n \equiv 1 [3] \Rightarrow n(n^2+2) \equiv 0 [3]$ car $n^2 \equiv 1 [3]$

$\Rightarrow n^2+2 \equiv 3 [3]$

$\Rightarrow n^2+2 \equiv 0 [3]$

$\Rightarrow S \equiv 0 [3]$

donc S divisible par 9

- $n \equiv 2 [3]$

$n^2 \equiv 4 [3] \Rightarrow n^2 \equiv 1 [3]$ même chose que le cas précédent.

Donc S divisible par 9

Alors S est divisible par 9.

Léon
Sibout

Colle semaine 11

Enoncé

Soit (U_n) la suite telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 2n$ pour tout n. Montrer que $u_n > 2^n$ pour tout n et conclure. Trouver le therme générale de (U_n)

__Solution__

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$: " $U_n > 2^n$ "

Initialisation

$U_0 = 2 > 1$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ est vraié.

Donc $2U_n > 2^{n+1}$

donc $2U_n + \underbrace{2n+5}_{>0} > 2^{n+1}$

donc $U_{n+1} > 2^{n+1}$

Soit (V_n) définit par : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\circledast$ $\begin{cases} V_{n+1} = 2V_n \\ \text{et } v_n = U_n - an - b \qquad (a, b) \in \mathbb{R} \end{cases}$

déterminons a et b

analyse

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$ respectant $\circledast$

Donc $U_{n+1} - a(n+1) - b = 2(U_n - an - b)$

donc $2U_n + 2n - 5 - an - a - b = 2U_n - 2an - 2b$

donc $-an - b + a = 2n + 5$

donc $a = -2$ et $b = -7$

<u>Synthèse</u> Supposons, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$v_n = u_n + 2n + 7$

$$v_{n+1} = 2u_n + 2n + 5 + 2(n+1) + 7$$
$$= 2(u_n + 2n + 7)$$
$$= 2v_n$$

$$v_0 = u_0 + 2\times 0 + 7$$
$$= 9$$

(v_n) est une suite géométrique de raison 2

$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = 2^n \times 9$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n + 2n + 7$

donc $u_n = 9\times 2^n - 2n - 7$.

Louis B Khôlle de la semaine 11

Soit u définie par $U_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \sin(U_n)$

1) Donner le tableau de variation de sin sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2) Supp $U_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

b) Si $U_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ Mq $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit (+ faire un dessin)

---

1) Soit $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\sin'(x) = \cos(x) \geqslant 0$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	0	$+$	0
$\sin$	-1	$\nearrow$	1

2) a) Soit $U_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

comme $\sin \nearrow$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

et $-\frac{\pi}{2} < \underset{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\underset{\parallel}{-1}} < \underset{\sin(\frac{\pi}{2})}{\underset{\parallel}{1}} < \frac{\pi}{2}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

b) Soit $U_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ Soit $n \in \mathbb{N}$

$U_{n+1} - U_n = \sin(U_n) - U_n$

Etudions le signe de $\sin(x) - x$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

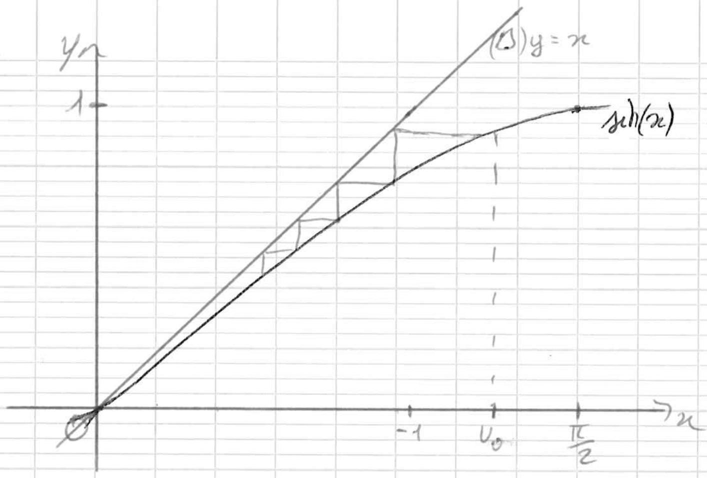
Soit $g : x \mapsto \sin(x) - x$

$g' : x \mapsto \cos(x) - 1$

comme $\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos(x) \leq 1$, $\cos(x) - x \leq 0$

Donc g est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

et donc $(U_n) \searrow$



y
(Δ) y = x
1
sin(x)
x
1
U0
π/2

Anaé . D

Rapport de colle S11

Donner une relation de Bézout entre 368 et 117

Déterminons le PGCD de 368 et 117 avec l'algorithme d'Euclide

$368 = 3 \times 117 + 17$

$117 = 6 \times 17 + 15$

$17 = 1 \times 15 + 2$

$15 = 7 \times 2 + 1$

$2 = 2 \times 1 + 0$

Donc $368 \wedge 117 = 1$

On peut donc déterminer une relation de Bézout, en "remontant" l'algorithme d'Euclide.

$1 = 15 - 7 \times 2$

$1 = 15 - 7 \times (17 - 15)$

$1 = 8 \times 15 - 7 \times 17$

$1 = 8 \times (117 - 6 \times 17) - 7 \times 17$

$1 = -55 \times 17 + 8 \times 117$

$1 = -55 \times (368 - 3 \times 117) + 8 \times 117$

$\boxed{1 = -55 \times 368 + 173 \times 117}$

Rémi . S

Semaine de colle n°11

Exercice 2
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que (u_n) est croissante et convergente vers 2.
3. Justifier que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $u_n = 2 - 4\sin^2(\theta_n)$.
   Préciser θ_0.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer θ_{n+1} en fonction de θ_n.
5. En déduire u_n en fonction de n et trouver $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Solution :

1. Soit $P(n) =$ " $0 \leq U_n \leq 2$ " avec $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : $0 \leq U_0 \leq 0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tels que $P(n)$ vraie.

$$0 \leq U_n \leq 2$$
$$\Rightarrow 2 \leq 2 + U_n \leq 4$$

$\sqrt{\cdot}$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ $\longrightarrow$ $\Rightarrow \underset{\overset{\vee\!\shortparallel}{0}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2+U_n} \leq 2$

2. Soit $P(n) =$ " $U_{n+1} \geq U_n$ " avec $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : $U_1 = \sqrt{2}$ $\quad U_0 = 0$ donc $U_1 \geq U_0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tels que $P(n)$ vraie.

$$U_{n+1} \geq U_n$$
$$\Rightarrow U_{n+1} + 2 \geq U_n + 2$$

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ et $\sqrt{\cdot}$ croissante. $\longrightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{U_{n+1} + 2} \geq \sqrt{U_n + 2}$

$$\Rightarrow U_{n+2} \geq U_{n+1}$$

(U_n) croissant et majorée par 2 donc selon le théorème de la limite monotone (U_n) converge vers $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} (U_n)$.

Soit $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \sqrt{2+x} \end{array} \right.$

f continue et croissante
Selon le théorème du point fixe, l vérifie :

$$f(l) = l \Rightarrow \sqrt{2+l} = l$$
$$\Rightarrow 2 + l = l^2$$
$$\Rightarrow l = -1 \text{ ou } l = 2$$

$f(-1) = 1$ donc -1 n'est pas solution
$f(2) = 2$ donc 2 est solution.

Ainsi (U_n) tend vers 2.

3. Soit $f \left| \begin{array}{l} [0;\frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2 - 4\sin^2(x) \end{array} \right.$

$$f(0) = 2 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

f est continue donc pour tout $U_n \in [0;2]$ avec $n \in \mathbb{N}$ selon le TVI il existe au moins un $x \in [0;\frac{\pi}{4}]$ tels que $f(x) = U_n$.

$U_0 = 0$ donc on prend $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

$$\Rightarrow 2 - 4\sin^2(\theta_{n+1}) = \sqrt{2 + 2 - 4\sin^2(\theta_n)}$$

$$\Rightarrow 2 - 4\sin^2(\theta_{n+1}) = 2\underbrace{|\cos(\theta_n)|}_{\cos(\theta_n) \text{ car } \theta_n \in [0;\frac{\pi}{4}] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow -2 + 4(1 - \sin^2(\theta_{n+1})) = 2\cos(\theta_n)$$

$$\Rightarrow 4\cos^2(\theta_{n+1}) = 2\underbrace{(1 + \cos(\theta_n))}_{2\cos^2(\frac{\theta_n}{2})}$$

$$\Rightarrow \cos^2(\theta_{n+1}) = \cos^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$$

$\cos^2$ croissante sur $[0;\frac{\pi}{4}]$ $\longrightarrow$ $\Rightarrow \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$

5. $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ et $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \theta_n = \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = 2 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ \sin^2(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{array}\right\} \text{par composé } \sin^2\left(\frac{\pi}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \to 0$$

Ainsi $U_n \to 2$.

Amélien MARGIALOMINI

Colle semaine 11

Exercice 2

On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $\forall x > 0, f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$.

1. Quel est le signe de $f_n(0)$ et de $f_n(1)$.
2. Étudier les variations de f_n sur $[0,+\infty[$. Donner la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0,+\infty[$ en deux réels u_n et v_n qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.
3. (a) Calculer $e^{-u_n^2}$ en fonction de u_n^n.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
   (c) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

Exercice 2 :

1) $f_n(0) = 3\underbrace{0^n}_{0 \text{ car } n \geq 2} \times 1 - 1 = -1 < 0.$

$f_n(1) = 3 \times \frac{1}{e^1} - 1$ or $e \simeq 2,7$ et $3 > e$

donc $f_n(1) = \underbrace{\frac{3}{e}}_{>1} - 1 \Big) > 0$

2) Soit $x \in [0,+\infty[$

$f_n'(x) = 3n x^{n-1} e^{-x^2} - 6x^{n+1}e^{-x^2}$

$= \underbrace{e^{-x^2} \times 3x^{n-1}}_{\geq 0}(n - 2x^2)$

donc $f_n'(x) = 0 \iff n - 2x^2 = 0$

ie $x^2 = \frac{n}{2} > 0$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ ($\sqrt{\ }$ ↗ sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$)

On en déduit :

x		$\sqrt{\frac{n}{2}}$	
$f_n'(x)$	$+$	0	$-$
$f_n(x)$	↗		↘

On calcule les limites de f_n ;

$$f_n(x) = 3 \times \underbrace{\frac{x^n}{e^{x^2}}}_{C.C. \to 0} - 1$$

donc $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -1$

De plus $\underbrace{n}_{\geq 0} \geq \underbrace{2}_{\geq 0}$ donc $\sqrt{\frac{n}{2}} \geq 1$ ($\sqrt{\ }$ ↗ sur $\mathbb{R}_+$)

Comme f_n est ↗ entre 0 et $\sqrt{\frac{n}{2}}$ donc :
(C.D.S.M.)

$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \geq f_n(1) > 0$. Sachant que (Q1) $f_n(0) < 0$

→ f étant continue et strictement croissante entre 0 et $\sqrt{\frac{n}{2}}$ (C.D.S.M.) donc on conclut qu'il existe un réel $u_n < 1$ car $f(1) > \underbrace{f(u_n)}_{0}$ (T.V.I.).

→ Entre $\left[\sqrt{\frac{n}{2}} ; +\infty\right[$, f_n ↘ (C.D.S.M.), $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -1$

de plus f_n continue car dérivable donc selon le T.V.I. il existe un réel $v_n > \sqrt{\frac{n}{2}}$ tel que

$f(v_n) = 0$ et $\cancel{f(v_n) < f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)}$ ~~f~~

$\sqrt{\frac{n}{2}} \geq 1$ donc $v_n > 1$.

3) a) On voit que $f(u_n) = 0$
donc $3 u_n^n e^{-u_n^2} - 1 = 0$

MANGIACOMINI
Aurélien

Donc $e^{-u_n^2} = \dfrac{1}{3u_n^n}$

b) $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1} e^{-u_n^2} - 1$

or $e^{-u_n^2} = \dfrac{1}{3u_n^n}$ (3)a))

donc $f_{n+1}(u_n) = u_n - 1 < 0$
car $u_n < 1$

c) Comme $\forall n \geq 2$ $\left| \begin{array}{l} f_n \nearrow \text{ sur } [0 ; \sqrt{\frac{n}{2}}] \\ u_n < 1 \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \end{array} \right.$

On a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ ($n \leftarrow n+1$)

$f_{n+1}(u_n) < 0$

donc $f_{n+1}(u_{n+1}) > f_{n+1}(u_n)$

Lemme : (*) $\Rightarrow u_{n+1} > u_n$

Donc la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

Lemme : (*) Pour f strictement croissante sur un intervalle I
on a : $\forall x_1, x_2 \in I^2$ $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$

Par contraposée : $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ✓
($f \nearrow$).

Martin K.-L. Colle de la semaine 11.

Étudiant : ....

Cours : Définition de la relation de congruence modulo n. Caractérisation de la relation de congruence par les restes (énoncé et démonstration). Critère de divisibilité par 9 (énoncé et démonstration).

Exercice : Déterminer le PGCD de 111111 et de 1111.

Exercice : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ pour tout n. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $0 < u_n < 2$ pour tout n. Conclure.

Exercice : Soit P un polynôme à coefficients entiers tel que $P(n)$ soit un nombre premier pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Caractériser P.

Solution. • On introduit la fonction

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{\geq -1} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \sqrt{x+1} \end{array} \right. .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_{>-1}$,

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{x+1}}_{>0}} > 0},$$

donc par le critère différentiel de stricte monotonie, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_{\geq -1}$.

• Puisque $u_0 = 1$ et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_{\geq 1}$, un intervalle stable de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $[1, +\infty[$.

Maximilien T   Colle de la Semaine 8

Exercice : Donner le terme général de la suite (u_n) telle que $u_0 = 1, u_1 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Solution : (Ecar) $x^2 - x + 1 = 0 \quad x \in \mathbb{C}$

Soit $x \in \mathbb{C}$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2 = 0$$

$$\iff \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$$

$$\iff \left(x - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(x - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = 0$$

Donc $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_n = \lambda_1 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} U_0 = \lambda_1 + \lambda_2 \times 0 \\ U_1 = \lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \frac{1}{2} + \lambda_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

Antoine B. colle de la semaine 11.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ pour tout n.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que $0 < u_n < 2$ pour tout n. Conclure.

Solution:

Soit l'application:

$$f \left| \begin{array}{l}]-1;+\infty[\to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{1+x} \end{array} \right.$$

est croissante (composée de fonctions croissante).

$\cdot\ u_1 - u_0 = \sqrt{1+1} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0.$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$n\in\mathbb{N}$ $P(n)$: " $0 < u_n < 2$ "

Initialisation au rang 0: $u_0 = 1 < 2$ et $u_0 > 0$.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ vrai

$$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \quad (\text{existe car } u_n < 2)$$

$$0 < u_n < 2$$

$$0 < 1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3} < 2 \quad (f \text{ est croissante})$$

D'après le théorème de la limite monotone, $\underbrace{,}_{u_n \text{ converge et}}$ $u_n \to \sup_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$

Jules R. Colle de la semaine 10

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 6$, $u_1 = 5$, $u_2 = 15$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

L'objectif de l'exercice est de déterminer le terme général de cette suite.

1. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que v_n est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
2. Déterminer le terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de u_0 et des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire le terme général de la suite u_n.

Solution :

1. On calcule v_{n+2}.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$v_{n+2} = U_{n+3} - U_{n+2}$
donc $= 2U_{n+2} + U_{n+1} - 2U_n - U_{n+2}$ (définition de (U_n))
donc $= U_{n+2} + U_{n+1} - 2U_n$
donc $= U_{n+2} - U_{n+1} + 2U_{n+1} - 2U_n$
donc $= v_{n+1} + 2v_n$ $(v_n = U_{n+1} - U_n)$

Donc (v_n) est suite récurrente linéaire d'ordre 2.

2.
Posons l'équation $x^2 - x - 2 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Résolvons l'équation :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

Les solutions sont donc :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$$

On sait que :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 (-1)^n$$

Connaissant $v_0 = -1$ et $v_1 = 4$, on peut déterminer les valeurs de λ_1 et λ_2.
On obtient le système suivant :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 4 \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ 3\lambda_1 = 3 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 2^n - 2(-1)^n$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On sait que :

$$v_n = U_{n+1} - U_n$$

Donc :

$$v_{n-1} = U_n - U_{n-1}$$

Donc :

$$U_n = v_{n-1} + U_{n-1}$$

$$\text{donc } = v_{n-1} + v_{n-2} + U_{n-2} \quad (v_{n-2} = U_{n-1} - U_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v_k + U_0$$

Ainsi, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k\right) + U_0$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} (2^k - 2(-1)^k) + 6$$

Jules R.

$$\text{donc} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k - 2\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k + 6 \quad \text{(linéarité)}$$

$$\text{donc} = \frac{1-2^n}{1-2} - 2\,\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} + 6 \quad \text{(sommes géométriques)}$$

$$\text{donc} = -1 \times 2^n - 1 + (-1)^n + 6$$

$$\text{donc} = (-1)^n + 2^n + 4$$

Sophie G.

Colle de la semaine 11

Soit (u_n) la suite telle que $u_0=2$ et $u_{n+1}=2u_n+2n+5$ pour tout n. Montrer que $u_n > 2^n$ pour tout n et conclure. On pourra aussi en trouver de manière guidée le terme general.

Solution :

Soit $n\in\mathbb{N}$, posons $P(n)$: "$u_n > 2n$"

Raisonnons par récurrence simple

Initialisation : $n=0$

$\underset{=2}{u_0} > 1$ Donc $P(0)$

Hérédité Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$. Par [HR] : $u_n > 2^n$

$$\underset{\times 2>0}{\Longrightarrow} 2u_n+2n+5 > 2^{n+1} + \underbrace{2^n+5}_{>0}$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} > 2^{n+1} \text{ Donc } P(n+1)$$

Conclusion

$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n > 2^n$

On cherche (v_n) géométrique de raison 2 tel que

$v_n = u_n - an - b$; $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

Alors $v_{n+1} = 2v_n$

$= 2u_n - 2an - 2b$

et

$v_{n+1} = u_{n+1} - a(n+1) - b$

Donc $2u_n - 2an - 2b = 2u_n + 2n + 5 - a(n+1) - b$

$\iff -2an - 2b = (2-a)n + 5 - a - b$

donc $\begin{cases} -2a = 2-a \\ -2b = 5-a-b \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2 \\ b=-7 \end{cases}$

Or $v_n = u_n - an - b$

$\Leftrightarrow$ $u_n = v_n + an + b$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{u_n = (9+2u)2^n - 2n - 7}$ (car $v_0 = u_0 + 2u + 7$
$= 9 + 2u$)

Hugo D. Colle de la semaine 11

Exercice 2

On suppose désormais dans toute la suite du problème que l'entier naturel n est supérieur ou égal à 2. Soit f_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall x > 0, f_n(x) = \ln(x) + nx$.

1. Montrer que f_n s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ en un réel x_n.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, Calculer $\ln(x_n)$ en fonction de x_n.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
   (c) Déduire de ce qui précède la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
   (d) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.
   (e) Étudier la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution 1) Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

Soit $x \in]0,+\infty[$ $\quad f_n'(x) = \dfrac{1}{x} + n > 0$

Or $\left.\begin{array}{l} \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \\ nx \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$

Et $f_n(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$

Comme f_n continue, strictement croissante et prend ses valeurs dans $]-\infty, +\infty[$: $\exists x_n \in]0,+\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$

2) a) $f_n(x_n) = 0$ donc $\ln(x_n) = -nx$

b) $f_n(x_n) = 0$. $f_{n+1}(x_n) = \ln(x_n) + nx_n + x_n = x_n > 0$

c)

x	0	x_{n+1}	x_n	$+\infty$
f_{n+1}	$\Vert$	0 ↗		

Comme $f_{n+1}(x_n) > 0$
et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$
et f_{n+1} strictement croissante
on a $x_n > x_{n+1}$

Donc (x_n) décroissante strictement

(d) (x_n) est strictement décroissante et minorée par 0
Donc (x_n) converge d'après le théorème de la limite monotone

(e) Par l'absurde supposons que $x_n \to l \in \mathbb{R}_{>0}$

Donc $f_n(x_n) \to f(l)$

$0 \to \ln(l) + nl$

Mais $\ln(l) + nl \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $0 \to +\infty$

Contradiction

Donc on en déduit que $x_n \to 0$

Louis. D Semaine de colle n° 11

Montrer que la somme des cubes de 3 entiers consécutifs est divisible par 9.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
$a := n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k$, $k \in \mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$
$= 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$

Montrons que $3 \mid n^3 + 3n^2 + 5n + 3$
ie que $n^3 + 5n \equiv 0 \ [3]$ ce qui reviendrait à $a = 3 \times 3 \times k = 9k, k \in \mathbb{Z}$

Cas où $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$

$(3k)^3 + 5 \times 3k$
$\equiv 3 \times 3 \times 3 \times k^3 + 0 \quad [3]$
$\equiv 0 \quad [3]$ ✓

Cas où $n = 3k+1$, $k \in \mathbb{Z}$

$(3k+1)^3 + 5 \times (3k+1)$
$\equiv 1^3 + 5 \times 1 \quad [3]$ (Newton)
$\equiv 0 \quad [3]$ ✓

Cas où $n = 3k+2$, $k \in \mathbb{Z}$

$(3k+2)^3 + 5 \times (3k+2)$
$\equiv 2^3 + 10 \quad [3]$
$\equiv 0 \quad [3]$ ✓

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \quad 9 \mid (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)}$$