Youssef.B Colle de la semaine 1

Exercice 3 : Résoudre l'équation
$2\sin^2(x) + 5\cos(x) = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

Solution :

Pour résoudre l'équation $2\sin^2(x) + 5\cos(x) = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

On peut procéder par analyse-synthèse :

Analyse :
Supposons que x est un réel et est solution de l'équation ;
$2\sin^2(x) + 5\cos(x) = 4$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ (D'après la relation de pythagore)
Donc $2(1-\cos^2(x)) + 5\cos(x) = 4$
Donc $2 - 2\cos^2(x) + 5\cos(x) = 4$
Donc $2\cos^2(x) - 5\cos(x) + 2 = 0$
On pose $X = \cos(x)$
$\Delta = 9$

Donc $\begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ X = 2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \cos(x) = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \cos(x) = 2 \end{cases}$

Or $\cos(x) \leqslant 1$ donc $\cos(x) \neq 2$

Donc $\cos(x) = \frac{1}{2}$

Donc $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{3})$

D'après le cas d'égalité des cosinus

$$\begin{cases} \exists k \in \mathbb{R},\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi & (C_1) \\ \text{ou} & \\ \exists k \in \mathbb{R},\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi & (C_2) \end{cases}$$

On trouve 2 candidats pour l'analyse : C_1 et C_2

Synthèse :
Vérifions si les candidats trouvés vérifient la condition de départ

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$
$$= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 2\,\frac{3}{4} + 5\,\frac{1}{2} = 4$$

Donc le candidat C_1 est solution

$$2\sin^2\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + 5\cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$$
$$= 2\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 5\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 2\,\frac{3}{4} + 5\,\frac{1}{2} = 4$$

Donc le candidat C_2 est solution

L'ensemble de solutions est $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

ELLIOTT S.V

SEMAINE 1

Résoudre l'équation : $\sin(2x) = 2\cos^2(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

SOLUTION :

$\forall x \in \mathbb{R}$, (E) $\sin(2x) = 2\cos^2(x)$

$\iff 2\cos(x)\sin(x) = 2\cos^2(x)$

$\iff \cos(x)\sin(x) = \cos^2(x)$

$\iff \cos(x)\sin(x) - \cos^2(x) = 0$

$\iff \cos(x)\left(\sin(x) - \cos(x)\right) = 0$

$$\iff \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \sin(x) - \cos(x) = 0 \end{cases}$$

• D'une part, $\cos(x) = 0 \iff \cos(x) = \cos(\pi/2)$

$$\underset{\text{cas d'égalité des cosinus}}{\iff} \begin{cases} x = \pi/2 \ [2\pi] \\ x = -\pi/2 \ [2\pi] \end{cases}$$

• D'autre part, $\sin(x) - \cos(x) = 0$

$\iff \sin(x) = \cos(x)$

Or $\cos(x) = \sin(\pi/2 + x)$

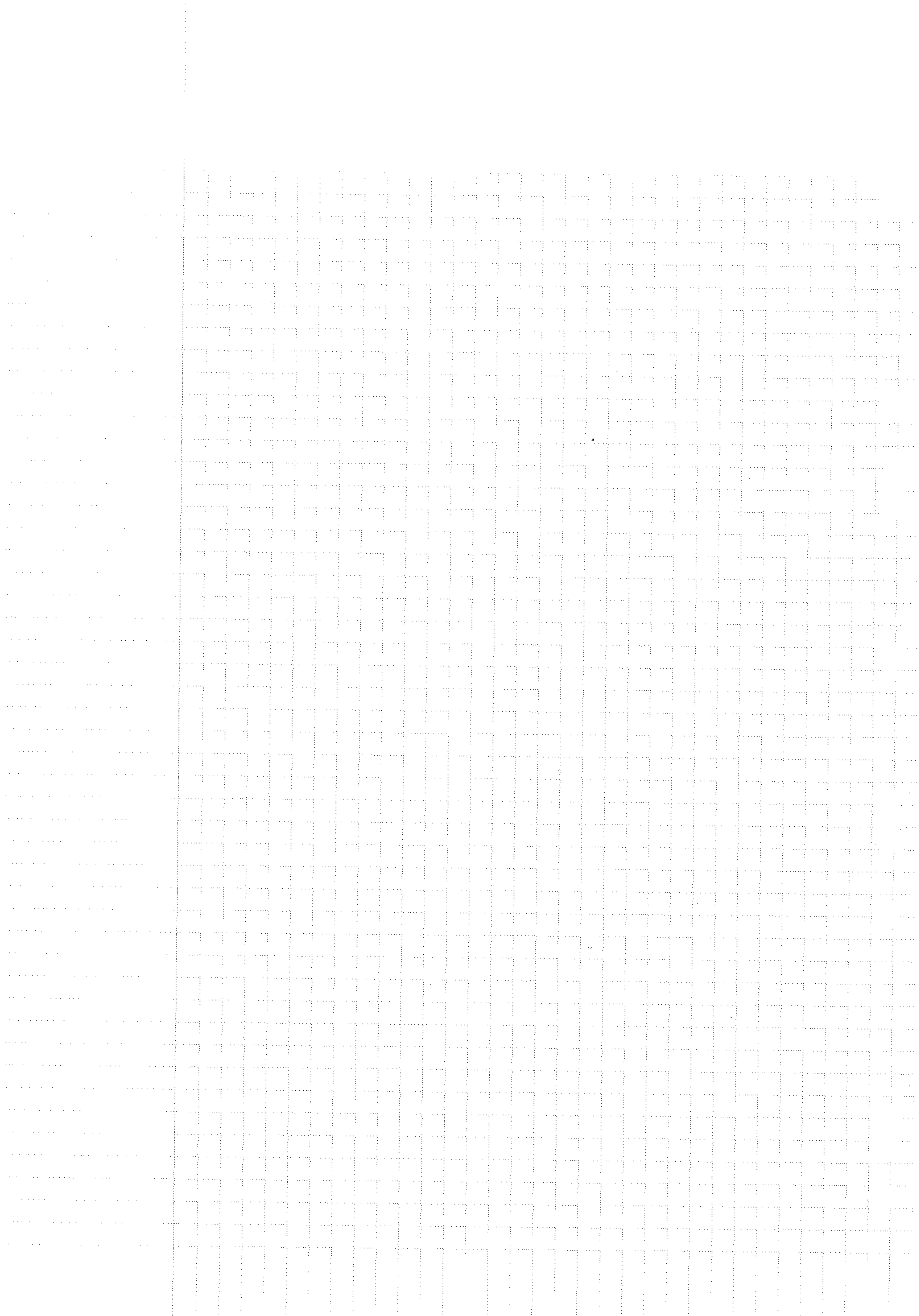
$\iff \sin(x) = \sin(\pi/2 + x)$

$$\underset{\text{cas d'égalité des sinus}}{\iff} \begin{cases} x = \pi/2 + x \quad [2\pi] \\ x = \pi - (\pi/2 + x) \ [2\pi]. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = \pi/2 \ [2\pi] \longrightarrow \text{Absurde !} \\ x = \pi/2 - x \quad [2\pi] \iff 2x = \pi/2 \ [2\pi] \end{cases}$$

$\iff x = \pi/4 \ [\pi]$.

Donc $Sol_{(E)} = \left\{ \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi/4 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.



Piero T. Colle de la semaine 1

Exercice :

Discuter et résoudre suivant les valeurs de m : $\sqrt{1-\sin^2 x}+\sin x = m$

Solution :

Soit m un réel. On cherche les éventuelles solutions de l'équation $(E) : \sqrt{1-\sin^2(x)}+\sin(x) = m$ d'inconnue $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$\sqrt{1-\sin^2(x)}+\sin(x) = m \iff \sqrt{\cos^2(x)}+\sin(x) = m$ (relation de Pythagore)

$\iff |\cos(x)|+\sin(x) = m$

On raisonne par disjonction de cas.

1er cas : $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

On a donc pour tout x : $|\cos(x)| = \cos(x)$

donc $|\cos(x)|+\sin(x) = m \iff \cos(x)+\sin(x) = m$

$\iff \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) = m$

$\iff \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right) = m$

$\iff \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = m$ (formule d'addition)

$\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{m}{\sqrt{2}}$

Si $m < -\sqrt{2}$ ou $m > \sqrt{2}$ il n'y a pas de solution.

Sinon il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{m}{\sqrt{2}}$.

On a alors : $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\theta) \iff$ (cas d'égalité des cosinus) $\begin{cases} x - \frac{\pi}{4} \equiv \theta \, [2\pi] \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{4} \equiv -\theta \, [2\pi] \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x \equiv \theta + \frac{\pi}{4} \, [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\theta + \frac{\pi}{4} \, [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \theta + \frac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = -\theta + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \text{comme} \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Pour la première ligne il faut que : $\theta = x - \frac{\pi}{4}$.
Donc il faut que $\theta \in]-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}] \cap [0, \pi]$,

donc que $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ pour qu'il y ai une solution.

Pour la deuxième ligne il faut que : $\theta = -x + \frac{\pi}{4}$
Donc il faut que $\theta \in [-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}] \cap [0, \pi]$

donc que $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}[$ pour qu'il y ai une solution.

Quand $\theta = 0$, $\theta + \frac{\pi}{4} = -\theta + \frac{\pi}{4}$ donc il n'y a qu'une seule solution. Donc quand $\theta \in \{0\} \cup]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$ il y a une solution

et quand $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}]$ il y a deux solutions.

Si $\theta = 0$, $\cos(\theta) = 1$ et $m = \sqrt{2}\cos(\theta) = \sqrt{2}$
Si $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $1 > \cos(\theta) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $1 \leq m < \sqrt{2}$

Si $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} > \cos(\theta) > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $-1 < m < 1$

Donc quand $m = \sqrt{2}$ ou $m \in]-1,1[$ il y a une solution et quand $m \in [1,\sqrt{2}[$ il y a deux solutions.

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u>: $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{3\pi}{2}+k2\pi]$

On a donc pour tout x : $|\cos(x)| = -\cos(x)$

donc
$$\begin{aligned}|\cos(x)|+\sin(x) = m &\iff -\cos(x)+\sin(x) = m \\ &\iff \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x)\right) = m \\ &\iff \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin(x)\right) = m \\ &\iff \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right) = m \quad \text{(formule d'addition)} \\ &\iff \cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{m}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Si $m < -\sqrt{2}$ ou $m > \sqrt{2}$ il n'y a pas de solutions.

Sinon il existe un unique $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\cos(\theta) = \frac{m}{\sqrt{2}}$

On a alors : $\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos(\theta) \underset{\text{(cas d'égalité des cosinus)}}{\iff} \begin{cases} x-\frac{3\pi}{4} \equiv \theta\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x-\frac{3\pi}{4} \equiv -\theta\ [2\pi]\end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x \equiv \theta+\frac{3\pi}{4}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -\theta+\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \theta+\frac{3\pi}{4} \\ \text{ou} \\ x = -\theta+\frac{3\pi}{4}\end{cases} \quad \text{comme} \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Pour la première ligne il faut que : $\theta = x - \frac{3\pi}{4}$
Donc il faut que $\theta \in]\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}[\cap [0, \pi]$

donc que $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$ pour qu'il y ai une solution.

Pour la deuxième ligne il faut que : $\theta = -x + 3\frac{\pi}{4}$
Donc il faut que $\theta \in [-\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}[\cap [0, \pi]$

donc que $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[$ pour qu'il y ai une solution.

Quand $\theta = 0$, $\theta + \frac{3\pi}{4} = \theta - \frac{3\pi}{4}$ donc il n'y a qu'une seule

solution. Donc quand $\theta \in \{0\} \cup [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ il y a une solution

et quand $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}[$ il y a deux solutions.

Si $\theta = 0$, $\cos(\theta) = 1$ et $m = \sqrt{2}\cos(\theta) = \sqrt{2}$
Si $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, $1 > \cos(\theta) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $1 < m < \sqrt{2}$

Si $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \cos(\theta) \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc $-1 \leq m \leq 1$

Donc quand $m = \sqrt{2}$ ou $m \in [-1, 1]$ il y a une solution et quand $m \in]1, \sqrt{2}[$ il y a deux solutions.

<u>Réunion des deux cas:</u>

Si $m < -1$ il n'y a pas de solutions, si $m = -1$ il y a une solution, si $m \in]-1, 1[$ il y a deux solutions, si $m = 1$ il y a 3 solutions, si $m \in]1, \sqrt{2}[$ il y a quatre solutions, si $m = \sqrt{2}$ il y a 2 solutions et si $m > \sqrt{2}$ il n'y a pas de solutions.

Correction d'un exercice de colle.

Exercice 1

On admet que le problème $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f'(x) \\ f(0) = 1. \end{cases}$ admet au moins une solution.

Montrez qu'alors cette solution est unique.

Nous raisonnerons par l'absurde,

Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, deux solutions du problème.

Posons alors $h \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x \longmapsto \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

On a donc $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Or, f étant solution du problème, **pour tout** $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$

Ainsi : $h'(x) = \dfrac{f(x)(g(x) - g'(x))}{(g(x))^2}$

Or, g est aussi solution du problème, ainsi :

$$g'(x) = g(x)$$

D'où $g(x) - g'(x) = 0$

Donc : $h'(x) = \dfrac{f(x) \times 0}{(g(x))^2} = 0$

Or, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 0$, alors h est une fonction constante.

h étant constante il existe un réel a tel que :
Pour tout réel x :

$$h(x) = a.$$

donc : $$a = h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ainsi pour tout réel x :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

donc : $$\boxed{f(x) = g(x)}$$ ↯

On en déduit que le problème $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ admet effectivement une unique solution.

Thibault N. Colle semaine 1.

Exercice 6 : d). Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Solution :

On raisonne par récurrence simple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose le prédicat $P(n)$: « $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$ ».

Initialisation au rang $n=1$: $\sum_{p=1}^{1} \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$. $P(1)$ est donc vrai.

Hérédité : On fixe un ~~ent~~ $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vrai. On cherche à prouver $P(n+1)$ vrai.

$$\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$ d'après l'hypothèse de récurrence

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$ donc $P(n+1)$ vrai.

On a initialisation au rang $n=1$ et hérédité donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vrai.

Jules R. Colle de la semaine 1

Exercice 1
Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_n = \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x)$. On pourra multiplier P_n par $\sin(x)$.

__Solution:__ Soit $x \in R$, $n \in N^*$.

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x)$$

donc $P_n \times \sin(x) = \sin(x) \times \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x)$

Ainsi pour $n = 2$:

$$\sin(x) \times \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x) = \sin(x) \times \cos(x) \times \cos(2x) \times \cos(4x)$$

donc $= \frac{\sin(2x) + \sin(0)}{2} \times \cos(2x) \times \cos(4x)$

(transformation produit-somme)

donc $= \frac{1}{2} \sin(2x) \times \cos(2x) \times \cos(4x)$

donc $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin(4x) \times \cos(4x)$

(transformation produit-somme)

donc $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sin(8x)$

(transformation produit somme)

donc $= \frac{1}{8} \sin(8x)$

À partir de cela, on peut conjecturer que,

$$P_n \times \sin(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sin(2^{n+1} x)$$

Nous allons valider cette conjecture par récurrence simple.

Définition du prédicat :

Posons, pour tout $n \in N^*$,

$P(n) =$ " $\forall x \in \mathbb{R}\quad \sin(x) \times \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sin(2^{n+1} x)$ "

· Initialisation à $n = 1$.

$$\sin(x) \times \cos(x) \times \cos(2x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \times \cos(2x)$$

(transformation produit-somme)

$$\text{donc} = \frac{1}{4} \sin(4x)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sin(2^{n+1} x) = \frac{1}{4} \sin(4x)$$

(transformation produit-somme)

Donc $P(1)$ est vraie.

· Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $P(n)$ soit vraie.

Il faut montrer que $P(n+1)$ est vraie.

Pour cela, on part de l'hypothèse de récurrence :

H. R. $\sin(x) \times \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sin(2^{n+1} x)$ $\times \cos(2^{n+1} x)$

$$\text{donc } \sin(x) \times \underbrace{\cos(2^{n+1} x) \times \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x)}_{\prod_{k=0}^{n+1} \cos(2^k x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sin(2^{n+1} x) \times \cos(2^{n+1} x)$$

$$\text{donc } \sin(x) \times \prod_{k=0}^{n+1} \cos(2^k x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\sin(0) + \sin(2^{n+1} x + 2^{n+1} x)}{2}$$

(transformation produit-somme)

$\sin(2^{n+1} x + 2^{n+1} x)$

$= \sin(2(2^{n+1} x))$

$= \sin(2^{n+2} x)$ donc $\sin(x) \times \prod_{k=0}^{n+1} \cos(2^k x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{2} \sin(2^{n+2} x)$

$$\text{donc } \sin(x) \times \prod_{k=0}^{n+1} \cos(2^k x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \sin(2^{n+2} x)$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

L'hérédité est prouvée.

CONCLUSION : La propriété est vraie au rang $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Louis
Delion

Semaine n° 1

Exercice : Exprimer à l'aide d'une formule utilisant des quantificateurs la phrase suivante, puis la nier en tant que phrase et en tant que formule : « Tous les jours, il fait beau ou alors je ne sors pas ou alors j'emporte mon parapluie. » On pourra introduire les fonctions « beautemps », « sortie », « parapluie ».
Écrire aussi à l'aide d'une formule logique le principe de récurrence pour une propriété $\mathcal{P}(n)$.

P : " $\forall n \in \mathbb{N}$ beautemps(n) $\vee$ $\neg$ sortie $\vee$ parapluie "

$\neg$P : " $\exists n \in \mathbb{N}$ $\neg$ beautemps(n) $\wedge$ sortie $\wedge$ $\neg$ parapluie "

On peut traduire $\neg$P par " Il y a au moins un jour où il ne fait pas beau et où je sors sans parapluie. ".

Soit $\mathcal{P}(n)$ un prédicat en la valeur $n \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{P}(0)$ vraie et $\mathcal{P}(n)$ impliquant $\mathcal{P}(n+1)$ vraie impliquent $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout n.

Hugo . B. Colle de la semaine n°1.

Énoncé :

Exercice 1

1. La somme de deux rationnels est-elle toujours rationnel ? La somme de deux irrationnels est-elle toujours un irrationnel ? Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est-il toujours irrationnel ?Le produit de deux irrationnels est-il toujours irrationnel ?
2. Montrer qu'il existe deux réels irrationnels a et b tels que a^b est rationnel. On pourra s'intéresser au réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Solution :

Exercice 1 :

1. Soit $a \in \mathbb{Q}$, $\exists\, b \in \mathbb{Z}$ et $\exists\, c \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$a = \frac{b}{c}$$

Soit $k \in \mathbb{Q}$, $\exists\, h \in \mathbb{Z}$ et $\exists\, l \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$k = \frac{h}{l}$$

Alors on a :

$$a + k = \frac{bl + hc}{cl}$$ avec $(bl) \in \mathbb{Z}$ $(hc) \in \mathbb{Z}$ et $(cl) \in \mathbb{N}^*$ $\boxed{\text{Ainsi } (a+k) \in \mathbb{Q}.}$

2. Démontrons par l'absurde que la somme de 2 irrationnels ne donne pas nécessairement un irrationnel :

Comme $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors :

$$\pi + (-\pi) = \pi - \pi = 0.$$

Or $0 \in \mathbb{Q}$. $\boxed{\text{Il y a une contradiction.}}$

3. Soient $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ (on démontre également par l'absurde)

$$a = \sqrt{2} = b.$$

Alors :

$$a \times b = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2.$$

Or $2 \in \mathbb{Q}$: $\boxed{\text{Il y a une contradiction}}$

Desgaux Amaë | Exercice de colle | semaine 1

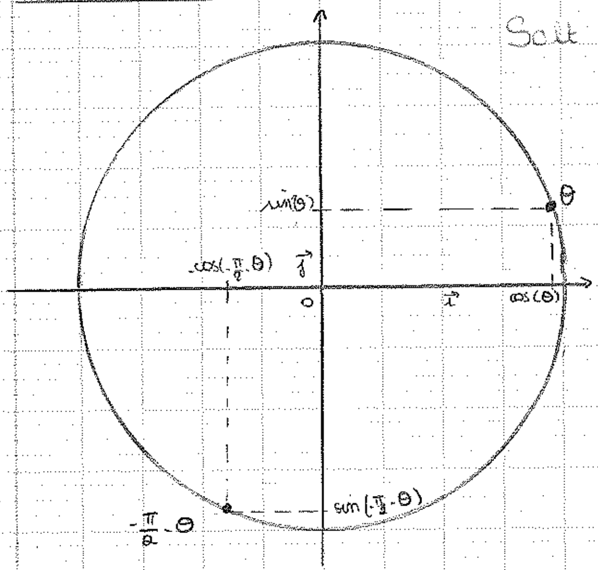
Étudiant : ....

Cours : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$. Définition de la relation de congruence modulo 2π. La relation de congruence modulo 2π est une relation d'équivalence (énoncé formalisé et démonstration).

Exercice : Dessiner un point du cercle trigonométrique, noter θ son argument (définition rappelée si besoin). Donner la valeur de $\cos(-\frac{\pi}{2} - \theta)$ (idem sinus), graphiquement et par le calcul.

Exercice : Écrire comme un produit de cosinus l'expression $\cos(p) + \cos(q)$ pour p, q deux réels quelconques.

Solution : Exercice 1 :



Soit $\theta \in \mathcal{C}$

Graphiquement

$\cos(-\frac{\pi}{2} - \theta) = -\sin(\theta)$

$\sin(-\frac{\pi}{2} - \theta) = -\cos(\theta)$

Par le calcul

Soit $\theta \in \mathcal{C}$

$\cos(-\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(-\frac{\pi}{2})\cos(\theta) + \sin(-\frac{\pi}{2})\sin(\theta)$ (formule d'addition)

Or $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ (valeurs remarquables)
D'où $\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin(\theta)$

$\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(\theta) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin(\theta)$ (formule d'addition)

Or $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ (valeurs remarquables)

Donc $\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos(\theta)$

On retrouve bien les mêmes valeurs que graphiquement

Bordes
Louis

Colle n° 1

26/09/22

Sujet : Soit A, B et C trois ensembles.
VRAI ou FAUX ?

$$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$$

Soient A, B et C trois ensembles tels que :

$A = \mathbb{N}$

$B = \mathbb{Z}$

$C = \mathbb{Z}^-$

On a : $A \cup B = \mathbb{Z}$

$A \cup C = \mathbb{Z}$

On observe donc que $A \cup B$ et $A \cup C$ sont égaux.
Cependant, $B = \mathbb{Z}$ et $C = \mathbb{Z}^-$ ne sont pas égaux.
Ainsi cette affirmation est $\boxed{\text{fausse.}}$

Uta Bayer
de Weyer

Rapport de Colle 1 - Mathématiques

Exercice 10.a) :

Déterminer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{3x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{1-\cos(2x)}{3x} = \frac{1-\cos(2x)}{2x} \times \frac{2}{3}$$

or $\dfrac{1-\cos(2x)}{2x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ (car $2x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$)

et $\dfrac{2}{3} \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{2}{3}$

Donc par produit des limites ;

$$\boxed{\frac{1-\cos(2x)}{3x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{2}{3}}$$

Hugo D. Colle de la semaine 1

$\boxed{\text{Résoudre sur } \mathbb{R} : (E) \quad \cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 2\cos(x)}$

$$\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 2\cos(x) \iff \frac{1}{2}\cos(2x) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin(2x) = \cos(x)$$

$$\iff \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)\cos(2x) + \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\sin(2x) = \cos(x)$$

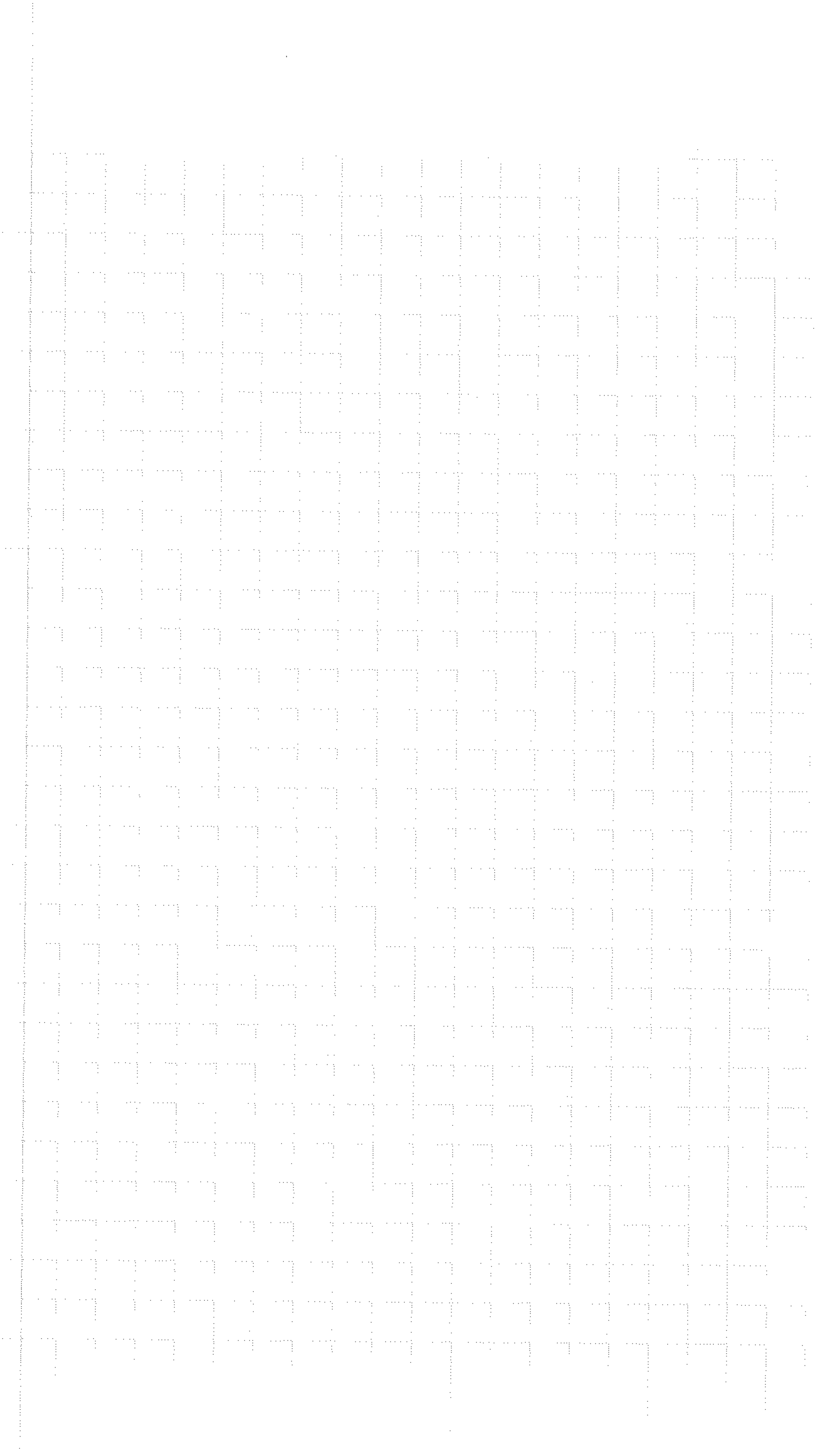
D'après la formule d'addition du cosinus, on a :

$$\cos\left(2x - \left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) = \cos(x) \underset{\substack{\text{cas} \\ \text{d'égalité} \\ \text{des} \\ \text{cosinus}}}{\iff} \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} \equiv x \; [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x + \frac{\pi}{3} \equiv -x \; [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \equiv \frac{-\pi}{3} \; [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x \equiv \frac{-\pi}{3} \; [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \equiv \frac{-\pi}{3} \; [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{-\pi}{9} \; \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$

$$Sol_{(E)} = \left\{ x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ x = \frac{-\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$



MEYER
Alexandre

Exercice 1
Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{(1-nx) \leq (1-x)^n}_{①} \overbrace{\leq \frac{1}{1+nx}}^{②}.$$

Montrons ① par récurrence simple.

- Définition du prédicat :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) =$ " $\forall x \in [0,1]$ $(1-nx) \leq (1-x)^n$ "

- Initialisation au rang $n = 0$.

$P(0)$ s'écrit " $\forall x \in [0;1]$ $(1-0\times x) \leq (1-x)^0$ "
et est donc vraie.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que " $\forall x \in [0,1]$ $1-(n+1)x \leq (1-x)^{n+1}$ " est vraie.

Soit $x \in [0;1]$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$1 - nx \leq (1-x)^n$$

or $1 - x \geq 0$ ($x \in [0;1]$)

donc $(1-nx)(1-x) \leq (1-x)^n(1-x)$ (multiplié par $1-x$)

donc $1 - x - nx + nx^2 \leq (1-x)^{n+1}$ (L_1) (développement du membre de gauche.

or $x \geq 0$

donc $x^2 \geq 0$

donc $nx^2 \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$

d'où $-nx^2 \leq 0$ (L_2)

En additionnant membre à membre (L_1) et (L_2) on a $1 - x - nx \leq (1-x)^{n+1}$

donc $1-(n+1)x \leq (1-x)^{n+1}$.

q.e.d.

- Conclusion : d'après l'initialisation, l'hérédité et l'axiome de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ANDRIOLO
Elian

Exercice 1

Sans utiliser la factorisation en nombre premier d'un entier.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on dit que n est pair s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$, on dit qu'il est impair s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$.

1. Montrer qu'un entier ne peut pas être à la fois pair et impair.
2. (a) Montrer par récurrence que tout entier naturel est pair ou impair.
   (b) En déduire que tout entier naturel est pair ou impair.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, n^2 est pair si et seulement si n est ~~im~~pair.

1. Je raisonne par l'absurde
Je suppose que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, n est pair et impair
Alors $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ et $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{Z}$
Donc $2k = 2p+1$
Donc $2k - 2p = 1$
Donc $2(k-p) = 1$
Or 1 n'est pas pair $\Rightarrow$ Contradiction

2.a $\forall n \in \mathbb{N}$ P_n = " n est pair ou impair "

Initialisation :
$0 = 2 \times 0$, 0 est pair $P(0)$ est vraie

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé
On suppose $P(n)$ vraie
Si n est pair : alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$
alors $n+1 = 2k+1$
$n+1$ est impair
si n est impair : alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$
alors $n+1 = 2(k+1)$
$n+1$ est pair
$P(n+1)$ est vraie

b. Nous avons montré en Q2a. qu'un entier était nécessairement pair ou impair et en Q1 qu'il ne pouvait pas être les deux en même temps donc il est soit pair soit impair.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$

Montrons que n^2 pair $\Leftrightarrow$ n pair

On raisonne par double implication

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose n pair

Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$

Donc
$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\underbrace{(2k^2)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Donc n^2 pair

$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposition

On suppose n impair

Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$

Donc
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\in \mathbb{Z}} + 1$$

Donc n^2 est impair

Rémi Séchaud Semaine n° 1

10.
Déterminer :

$a.\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{3x}$ $b.\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{3x}$ $c.\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$

Solution :

a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2x}\times\frac{2}{3}\right)$

Or, $\lim_{x\to 0}(2x) = 0$ et $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) = 0$ } par composé de limites, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{2x} = 0$

Par produit avec $\frac{2}{3}$, $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{3x} = 0}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\times\frac{2}{3}\right)$

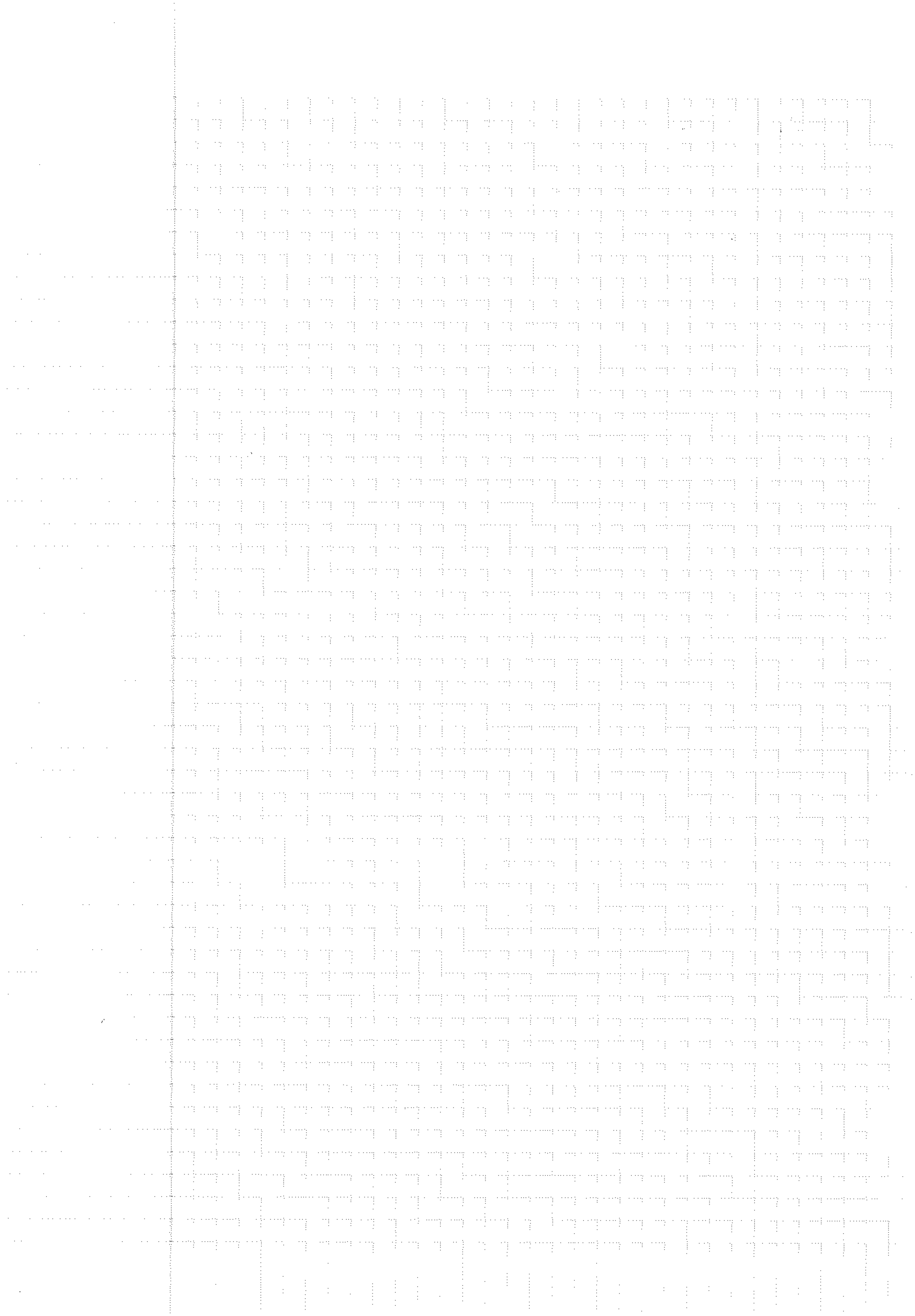
Or, $\lim_{x\to 0}(2x) = 0$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ } par composé de limites, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} = 1$

Par produit avec $\frac{2}{3}$, $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{3x} = \frac{2}{3}}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{2x^2}\times\frac{2}{3}$

Or, $\lim_{x\to 0}(2x^2) = 0$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ } Par composé de limites, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{2x^2} = 1$

Par produit avec $\frac{2}{3}$, $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2} = \frac{2}{3}}$



Sophie Gouges

> **Exercice 1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
> $$\cos(x)^2 - 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)^2 = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$\underline{\cos^2(x)} - 2\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x)$

$= \underline{\cos(2x) + \sin^2(x)} - 2\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x)$

(duplication)

$= \cos(2x) - \underline{\sin(x)\cos(x)}$

$= \cos(2x) - \underline{\sin(2x)}$

(duplication)

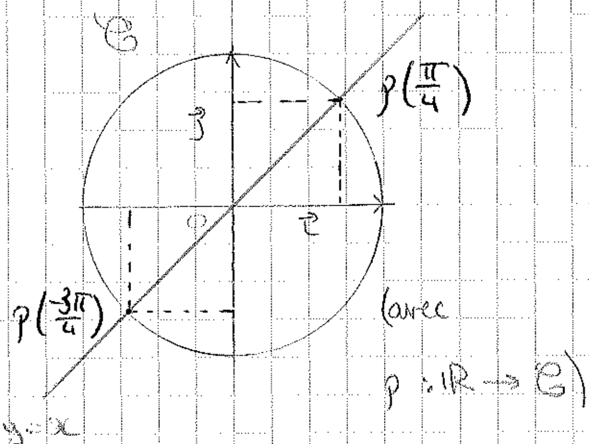
donc

$\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) - \sin^2(x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(2x)$

Posons $X = 2x$,

$\cos(X) - \sin(X) = 0$



$\begin{cases} X = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ X = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

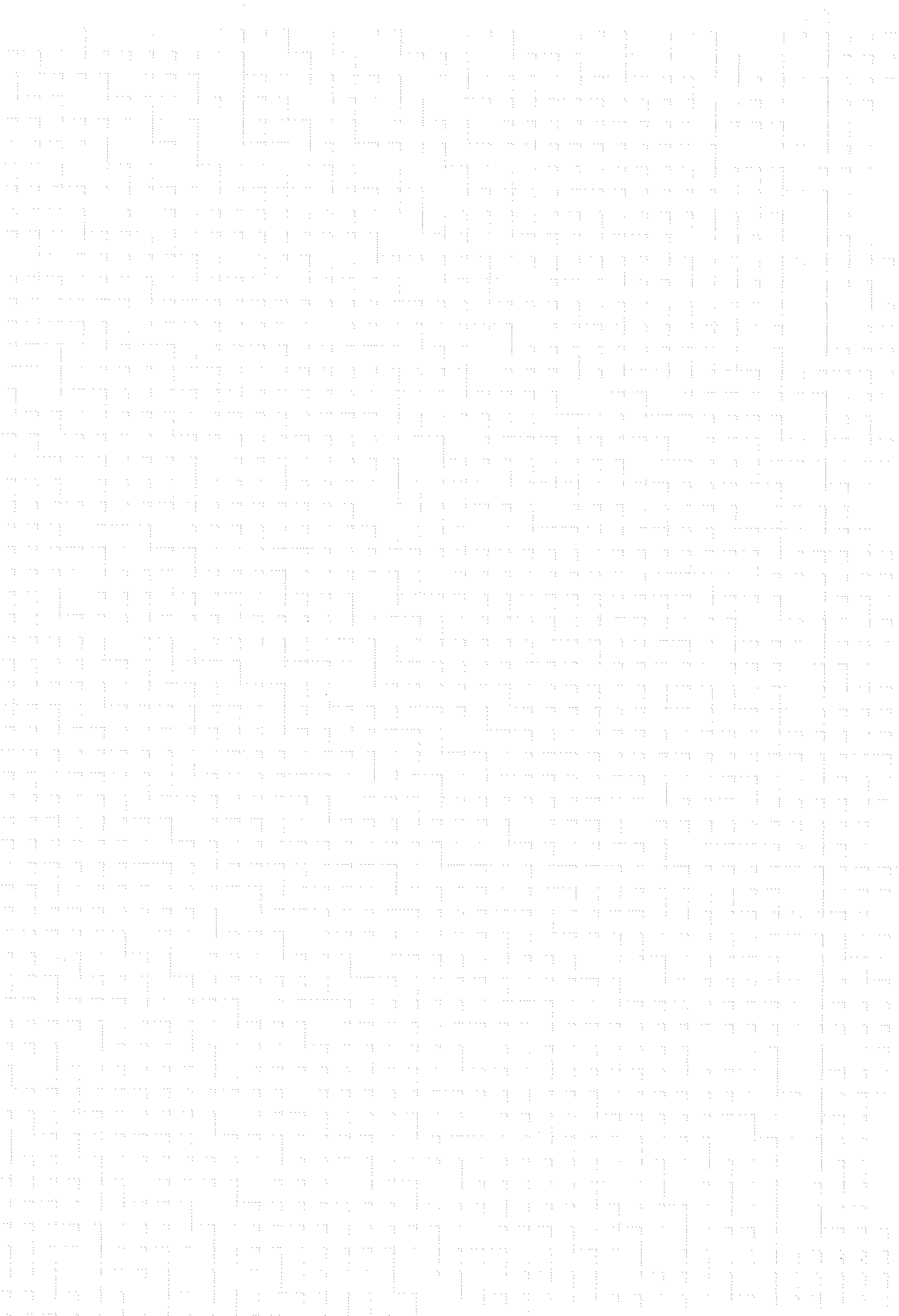
donc

$x = \frac{\pi}{8} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

ou

$x = \frac{-3\pi}{8} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{-3\pi}{8} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$



Antoine B. colle de la semaine 1

Exercice 1. Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x

$$\cos^n(x) + \sin^n(x) = 1.$$

Indication : On pourra distinguer plusieurs cas selon les valeurs de n.

Solution: Montrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

On raisonne par l'absurde.

Supposons $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \in \mathbb{Q}$

$\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists q \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{p}{q} \\ p \text{ et } q \text{ sont premiers entre eux} \end{cases}$

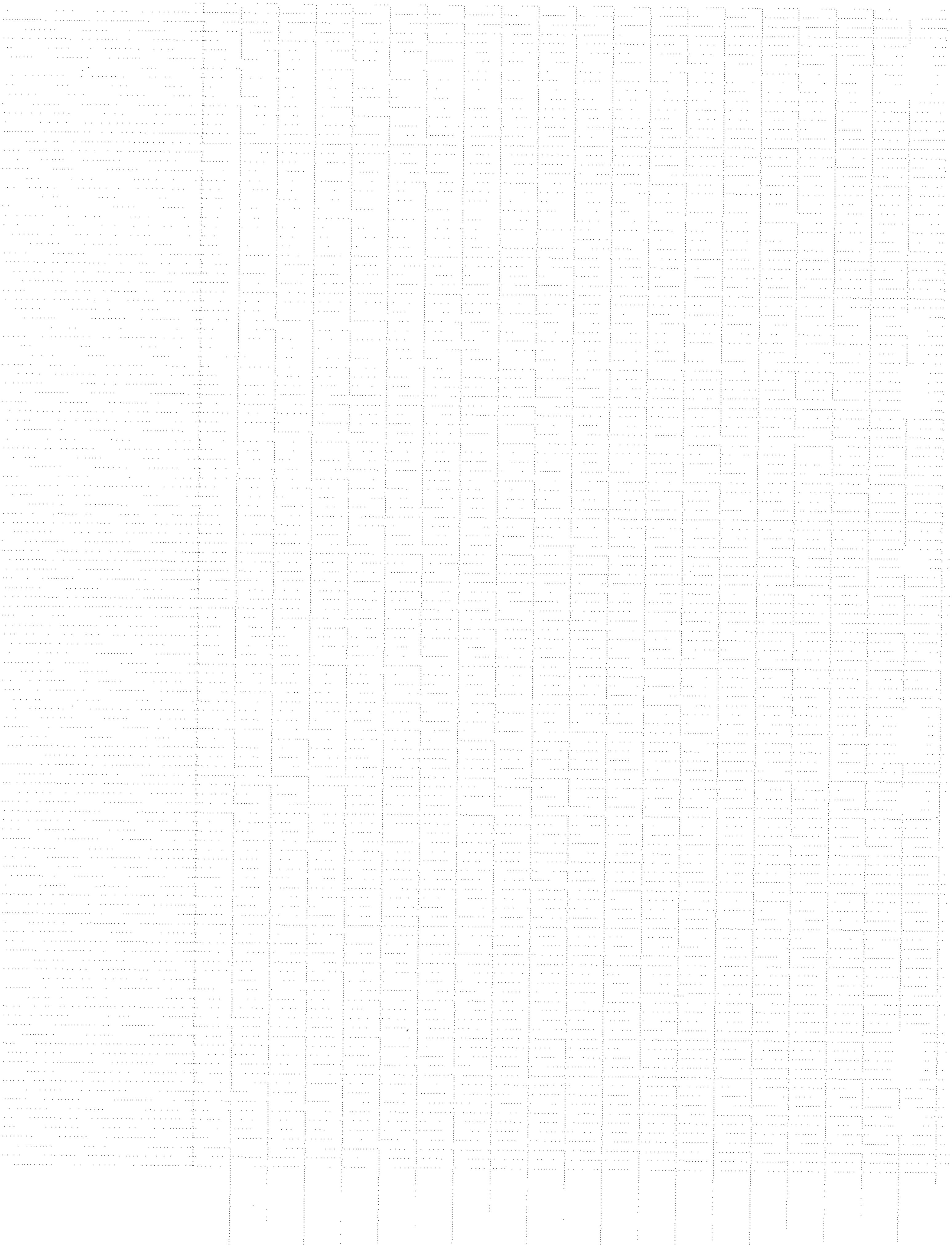
$$\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{p}{q}$$

donc $q \ln(2) = p \ln(3)$

donc $2^q = 3^p$ $(\exp(\cdot))$ $\lightning$

2^q est un produit de facteurs pairs, il est donc pair.

3^p est un produit de facteurs impairs, il est donc impair.



Maximilien T.

Colle de la semaine 1

Exercice 2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots x_n$ dans $[0;1]$, tels que $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$.

1. Écrire avec des quantificateurs la proposition suivante :
   "Deux de ces réels sont distants de moins de $\frac{1}{n}$."
2. Démontrer cette proposition.

Solution : 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n \leqslant 1$ des réels

" $\exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad |x_{k+1} - x_k| \leqslant \frac{1}{n}$ "

2) Nous raisonnons par l'absurde.

Nous supposons donc que $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad |x_{k+1} - x_k| > \frac{1}{n}$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k > n \times \frac{1}{n} = 1$ (Somme de n éléments)

Or $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x_k$

$= \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n - \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_0\right)$

$= x_n - x_0$

$x_0 \geqslant 0$ ~~et~~, $x_n \leqslant 1$ et $x_n \geqslant x_0$

Donc $x_n - x_0 \leqslant 1$ ↯ Contradiction

Martin K.-L. Colle semaine 1.

Exercice 1.
Démontrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Solution.

Montrons que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel en raisonnant par l'absurde.

Ainsi, on suppose qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{a}{b}$. Donc :

$$\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{a}{b} \iff \ln(2) \cdot b = \ln(3) \cdot a \iff \ln(2^b) = \ln(3^a)$$
$$\iff \boxed{2^b = 3^a.}$$

Montrons qu'il n'y a pas de couple $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ vérifiant $2^b = 3^a$, par disjonction de cas, suivant les ~~valeurs~~ signes de a et b :

(1)- $a = b = 0$: on a $b \in \mathbb{Z}^*$, donc $b \neq 0$. Il est donc impossible que $a = b = 0$.

(2)- $a > 0, b > 0$: effectuons une disjonction de cas suivant la relation d'ordre de a et b :

(i)- $a = b$: par composition d'inégalités, puisque $3 > 2$, on a $\underbrace{3 \cdot \ldots \cdot 3}_{a \text{ fois}} > \underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{a \text{ fois}}$. On n'a donc pas $a = b$.

(ii)- $a > b$: si $a > b$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = b + k$, d'où, directement : $3^k \cdot \underbrace{3 \ldots 3}_{b \text{ fois}} > \underbrace{2 \ldots 2}_{b \text{ fois}}$.

(iii) $b > a$: Comme $a > 0$, $b > 0$, on voit que 2 divise 2^b, donc 2^b est pair. Or, 2 n'est pas présent dans la décomposition en premiers de $3^a = 3 \dots 3$. Donc, 2 ne divise pas 3^a, et 3^a est impair. Comme un nombre pair ne peut pas être égal à un nombre impair, on conclut qu'il n'y a pas de solutions si $b > a$.

(3) - $\underline{a < 0,\ b < 0}$: on pose $a' = -a$, $b' = -b$, et on raisonne analoguement à (2) pour montrer qu'il n'existe pas de solutions possibles.

(4) $\underline{a > 0,\ b < 0}$: si $b < 0$, on a $2^b < 1 < 3^a$, et il n'y a pas de solutions.

(5) $\underline{a < 0,\ b > 0}$: le raisonnement est analogue à (4).

On a donc montré qu'il n'existe pas de couple $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $2^b = 3^a$; c'est une contradiction, et on conclut donc qu'il n'existe pas de couple $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{a}{b}$, et donc $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Florent
Timothée

Exercice 11 — Simplifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin(x)$$

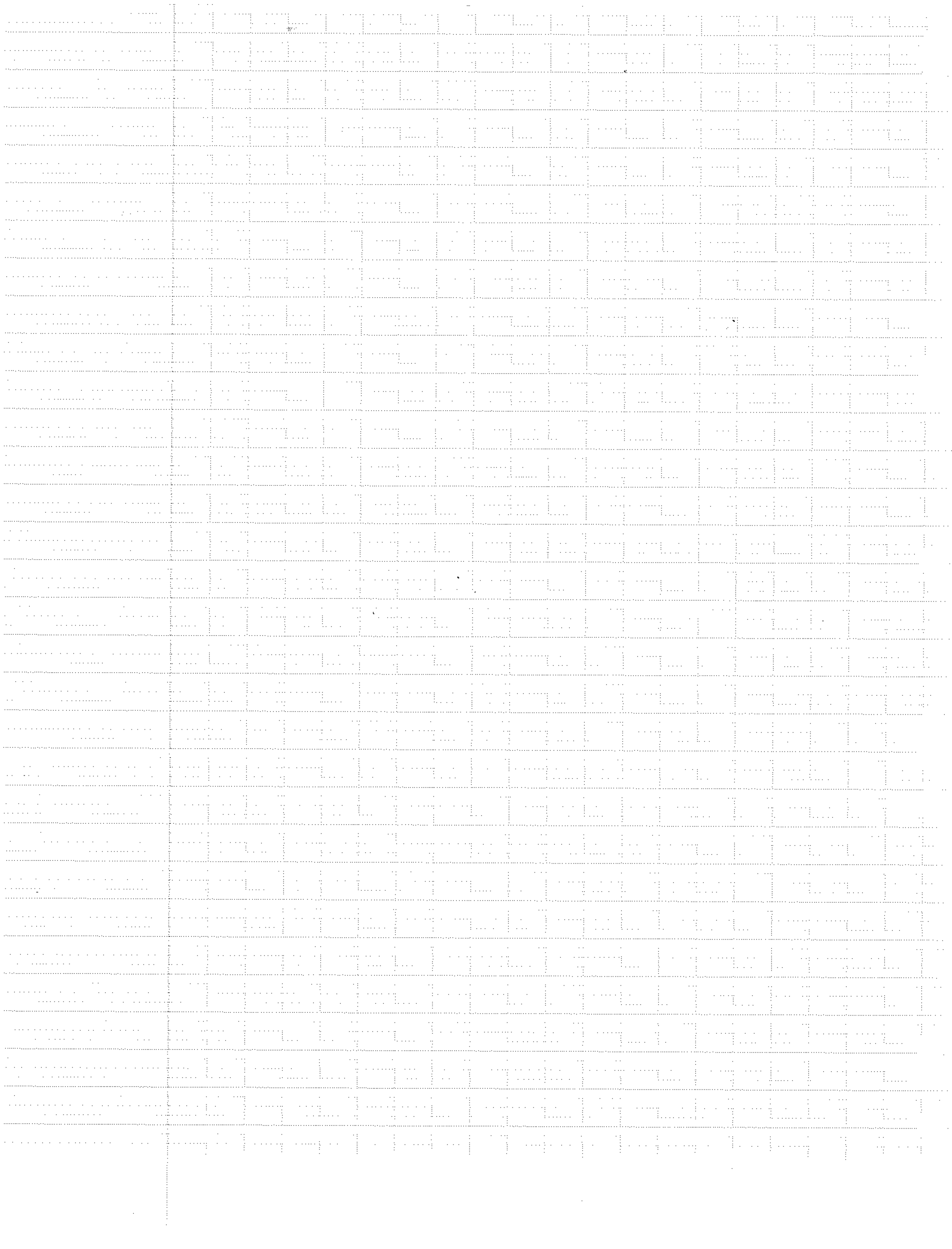
$$+ \sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Formule d'addition

$$= 2\sin(x)\,\frac{-1}{2} + \sin(x)$$

$$= -\sin(x) + \sin(x)$$

$$= \boxed{0}$$



Stanislas G. Colle de la semaine n°1

Exercice 1

1) Démontrer la formule trigonométrique

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

pour p et q des réels

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$

Solution :

1) Soient $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, je calcule $2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

transfo. produit de cos en somme

On a : $2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos\left(\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}\right) + \cos\left(\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}\right)$

$$= \cos\left(\frac{2p}{2}\right) + \cos\left(\frac{2q}{2}\right)$$

$$\boxed{2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos(p) + \cos(q)}$$

2) On résout (E) : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$

je calcule $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

transfo. affine de cos

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right) = \overbrace{2\cos\left(\frac{-x+\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}}{2}\right)\cos\left(\frac{3x+\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}}{2}\right)}^{\text{D'après Q1}}$$

$$= 2\cos\left(\frac{-x}{2}+\frac{26\pi}{48}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{14\pi}{48}\right)$$

On a donc $(E) : 2\overbrace{\cos\left(\frac{-x}{2}+\frac{26\pi}{48}\right)}^{\in \mathbb{R}}\overbrace{\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{14\pi}{48}\right)}^{\in \mathbb{R}} = 0$

Comme $\mathbb{R}$ est intègre :

$$(E) \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{-x}{2}+\frac{13\pi}{24}\right) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{7\pi}{24}\right) = 0 \end{cases}$$

cas d'= des cosinus

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2}-\frac{7\pi}{24} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{3x}{2}-\frac{7\pi}{24} \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{-x}{2}+\frac{13\pi}{24} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{-x}{2}+\frac{13\pi}{24} \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2}-\frac{7\pi}{24} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{-x}{2}+\frac{13\pi}{24} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} \equiv \frac{19\pi}{24}\ [\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{-x}{2} \equiv \frac{-\pi}{24}\ [\pi] \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv \frac{19\pi}{36}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \\ \text{ou} \\ x \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi] \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (E) s'écrit :

$$\boxed{S = \left\{\frac{19\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Rayan G.

Colle de la semaine n°1

Étudiant 1 :

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel .

Tout nombre entier naturel est produit d'une puissance de 2 par un nombre impair

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt{3}\cos x - 3\sin x = \sqrt{6}$$

Exercice 2

Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que x soit solution de l'équation ;

$$\sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x) = \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2} \quad \times \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left(\cancel{\tfrac{1}{\sqrt{3}} \neq 0}\right) \ (\sqrt{3} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \times \frac{1}{2} \quad \left(\cancel{\tfrac{1}{2} \neq 0}\right) \ (2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Cas d'égalité des cosinus ;

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{3} + x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\boxed{S_{sol} = \left\{ -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Ahmed
Amine S.

Colle de la semaine 1

Étudiant : ....

Cours : Résolution de l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Formule de duplication pour cosinus et sinus (énoncé et démonstration). Valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ (par le calcul). Transformation de produits en sommes pour cosinus et sinus (énoncé et démonstration). Primitive des fonctions $\cos^2$ et $\sin^2$ sur $\mathbb{R}$ (par le calcul).

Exercice : Exprimer à l'aide d'une formule utilisant des quantificateurs la phrase suivante, puis la nier en tant que phrase et en tant que formule : « Tous les jours, il fait beau ou alors je ne sors pas ou alors j'emporte mon parapluie. » On pourra introduire les fonctions « beautemps », « sortie », « parapluie ».
Écrire aussi à l'aide d'une formule logique le principe de récurrence pour une propriété $\mathcal{P}(n)$.

Exercice : Déterminer en fonction de n la valeur de $\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} l$ et de $\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} k$. Une formule non encore donnée en cours sera offerte le moment venu.

Solution :

Soit $S = \sum_{m=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{m} l \right)}_{S_1}$

$S_1 = \sum_{l=1}^{m} (l) = \dfrac{m(1+m)}{2}$ (somme suite arithmétique)

Ainsi : $S = \sum_{m=1}^{m} \dfrac{m(1+m)}{2}$

$= \dfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{m} \left(m(m+1) \right)$ (on ressort la constante)

$= \dfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{m} m^2 + \dfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{m} m$ $\left(\text{car } \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k \right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n(n+1)}{2} \right)$

$= \dfrac{(n+1)(n(2n+1)+3n)}{12} = \dfrac{(n+1)(2n^2+4n)}{12} = \dfrac{(n+1)(n^2+2n)}{6}$

Donc : $\sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} l \right) = \dfrac{(n+1)(n^2+2n)}{6}$

Soit $K = \sum_{m=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\sum_{l=1}^{m} \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{l} k}_{K_1} \Big)}_{K_2} \Bigg)$

Ainsi $K_2 = \dfrac{(l+1)(l^2+2l)}{6}$ d'après la somme précédente.

Donc :

$$K = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{(m+1)(m^2+2m)}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{m=1}^{n} \left(m^3 + 2m^2 + m^2 + 2m \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\sum_{m=1}^{n} \left(m^3 + 3m^2 + 2m \right) \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\sum_{m=1}^{n} m^3 + \sum_{m=1}^{n} 3m^2 + \sum_{m=}^{n} 2m \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{n^2(n+1)}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{n^2(n+1) + 2n(n+1)(2n+1) + 4n(n+1)}{24}$$

$$= \frac{(n+1)(n^2 + (4n^2+2n)(2n+1) + 4n}{24} = \frac{(n+1)(n^3+5n^2+6n)}{24}$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{24} = \frac{n(n+1)(n(n+5)+6)}{24}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} \quad (\text{car } n(n+5)+6 = (n+2)(n+3))$$

donc

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{l} k \right) \right) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

Deleporte Titouan MPSI

Exercice 4 Résoudre $\sin(2x)+\sin(4x)=\sin(3x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$\sin(2x) + \sin(4x) = \sin(3x)$

D'après la formule du chapitre 3 (9.1)

Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$

$\sin(p) + \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$

$x \in \mathbb{R}$ donc $2x \in \mathbb{R}$
donc $4x \in \mathbb{R}$

Ainsi

$$\sin(2x) + \sin(4x) = 2\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)$$
$$= 2\cos(-x)\sin(3x)$$

(parité du cosinus) $= 2\cos(x)\sin(3x)$

On cherche donc à resoudre $2\cos(x)\sin(3x) = \sin(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \sin(3x)(2\cos(x)-1) = 0$

$\mathbb{R}$ est intègre donc $\begin{cases} \sin(3x)=0 \\ \text{ou} \\ 2\cos(x)-1=0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ ou } \sin 3x = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \\ \text{ou} \\ \cos(x) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$

D'après les cas d'égalité de cosinus et sinus on a

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{2}\,[2\pi] = \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi] \text{ ou } x = \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right)[2\pi] = \frac{-\pi}{2}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{cases}$$

donc $\sin(2x) + \sin(4x) = \sin(3x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ a pour solution

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$\cup \left\{\frac{-\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Colle de mathématiques : semaine 1

Strievenard
Lorens Guillaume

Exercice 2 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

26/09/22

On pose $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Soit $P(n)$ un prédicat en $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $P(n) =$ " $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ "

Initialisation à $n = 1$: $P(1)$ s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 \\ \frac{1^2(2)^2}{4} = 1 \end{array}\right\} P(1) \text{ est vraie}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie

Par hypothèse de récurrence nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

On ajoute $(n+1)^3$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

On factorise par $(n+1)^2$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : Ainsi $P(n)$ a été initialisé et est héréditaire, alors par principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Robin G.

Colle de la semaine 1

Exercice 2. (au choix) *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{2}{n+2} u_n. \end{cases}$$

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.

Solution :

Montrons que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\quad 1 \leq u_n \leq n^2$

Raisonnons par récurrence double.

Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ = " $1 \leq u_n \leq n^2$ ".

Initialisation aux rangs

$n=1$:
$u_1 = 1$ donc $1 \leq u_1 \leq 1^2$

$n=2$:
$u_2 = u_1 + \frac{2}{0+2} u_0 = 1+1 = 2$
donc $1 \leq u_2 \leq 2^2$

$P(1)$ et $P(2)$ sont vraies.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que $P(n)$, $P(n+1)$ sont vraies.
Montrons que, sous cette hypothèse, $P(n+2)$ est vraie.

d'après $P(n)$ et $P(n+1)$, on a : $\begin{cases} 1 \leq u_n \leq n^2 \\ 1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)^2 \end{cases}$

soit : $\begin{cases} \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n+2} u_n \leq \frac{2n^2}{n+2} \quad (n>0) \\ 1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)^2 \end{cases}$

En sommant les deux inégalités, on obtient :

$$1+\frac{2}{n+2} \leq \underbrace{U_{n+1}+\frac{2}{n+2}U_n}_{U_{n+2}} \leq (n+1)^2+\frac{2n^2}{n+2}$$

Pour montrer que $U_{n+2} \leq (n+2)^2$, on montre que :

$$(n+1)^2+\frac{2n^2}{n+2} \leq (n+2)^2$$

(Au brouillon, on part de cette inégalité pour arriver à une expression en n tel que : " $0 \leq Xn + \dots$ "
Ce qui donne $0 \leq 7n+6$)

on a : $0 \leq 7n+6$

donc $2(n+1)^2 \leq 7n+6+2(n+1)^2$

donc $n(n+1)^2+2(n+1)^2 \leq 2n^2+9n+7+n(n+1)^2$

donc $n(n+1)^2+2(n+1)^2+2n^2 \leq n^3+4n^2+12n+8+2n^2$

donc $(n+2)(n+1)^2+2n^2 \leq (n+2)^3$

donc $(n+1)^2+\frac{2n^2}{n+2} \leq (n+2)^2$

ainsi $1 \leq U_{n+2} \leq (n+1)^2+\frac{2n^2}{n+2} \leq (n+2)^2$

$P(n+2)$ est vraie.

CCL :

D'après l'initialisation à $n=1$ et $n=2$, l'hérédité et l'axiome de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq U_n \leq n^2$.

2/2

Lina . A

Colle de la semaine 1

Exercice 11 — Simplifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= \sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(x) + \sin(x) + \sin(x)\cos(2\pi/3)$
$+ \sin(2\pi/3)\cos(x)$ (formule d'addition du sinus).

$= 2\sin(x)\cos(2\pi/3) + \sin(x)$

$= 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) \sin(x) + \sin(x)$

$= 0$

Donc :

$$\boxed{\sin(x - 2\pi/3) + \sin(x) + \sin(x + 2\pi/3) = 0}$$

VU Pierre Colle de la semaine 1

Exercice 1 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 2 :

On considère le réel $a \in [0; \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $\cos a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Calculer $\cos 2a$, en déduire ~~cos~~ a

Montrer que $\sin a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$

Solution Exercice 1

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) =$ " $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ "

Demontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie par recurrence simple

*) Initialisation à $n=0$

•) D'une part, $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0$

•) D'autre part, $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$

Donc $P(0)$ est vraie

*) Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie

on a $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (hypothèse de recurrence)

donc $\sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

donc $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$

d'où $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ Ainsi, $P(n+1)$ est vraie

*) Conclusion D'après l'initialisation à $n=0$, l'hérédité et l'axiome de recurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$

Wassim
Dahni

Colle de la semaine 1 :

Exercice 1 : Determiner les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

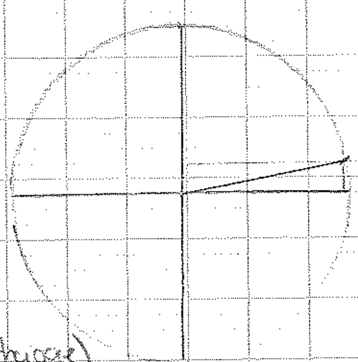
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cancel{\cos}\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(formule d'addition)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$



D'après le cercle unité,

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) < 1$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{(relation de pythagore)}$$

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2}$$

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| = \sqrt{1 - \frac{2+2\sqrt{12}+6}{16}}$$

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| = \sqrt{1 - \frac{8+4\sqrt{3}}{16}}$$

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{3}}{16}}$$

$$\boxed{\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

Conclusion

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Lé NASR — Colle de la semaine 1

Exercice 1 :

Étudier la proposition $P(n) : n^2 \leq 2^n$

Solution :

Ex 1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculons n^2 et 2^n pour quelques valeurs de n afin de conjecturer ~~[illegible]~~ la véracité de cette proposition.

Pour $n = 0$, $n^2 = 0$ et $2^n = 1$
Or $0 \leq 1$ donc $P(0)$ est vraie.
Pour $n = 1$, $n^2 = 1$ et $2^n = 2$
Or $1 \leq 2$ donc $P(1)$ est vraie.
Pour $n = 2$, $n^2 = 4$ et $2^n = 4$
Or $4 \leq 4$ donc $P(2)$ est vraie.
Pour $n = 3$, $n^2 = 9$ et $2^n = 8$
Or $9 \geq 8$ donc $P(3)$ est fausse.

Continuons avec quelques autres valeurs.

Pour $n = 4$, $n^2 = 16$ et $2^4 = 16$

Or $16 \leq 16$ donc $P(4)$ est vraie

Pour $n = 5$, $n^2 = 25$ et $2^5 = 32$

Or $25 \leq 32$ donc $P(5)$ est vraie

On peut donc conjecturer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$

Démontrons cette conjecture par récurrence simple

<u>Initialisation</u> On a déjà vu que $P(4)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ fixé tel que $P(n)$ est vraie

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c.à.d que $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$

donc $n^2 + 2n + 1 \leq 2^{n+1}$

On sait que $2^{n+1} = 2 \times 2^n$

Or $2^n \geq n^2$ (HR)

Donc $2^{n+1} \geq 2n^2$

Donc $2^{n+1} \geq n^2 + n^2$

Alors $2^{n+1} \geq n^2 + 2n + n^2 - 2n$

Pour démontrer que $n^2 + 2n + 1 \leq 2^{n+1}$, il suffira de démontrer que

$n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 2n + n^2 - 2n$

c.à.d que $1 \leq n^2 - 2n$

Or $n \geq 4$

Donc la plus petite valeur que $n^2 - 2n$ peut avoir est $4^2 - 2 \times 4 = 8$

et $8 > 1$

Donc $n^2 - 2n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 4}$

On a donc $n^2 + 2n + 1 \leqslant 2^{n+1}$

alors $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$

Donc $P(n+1)$ est vraie

<u>Conclusion</u> D'après l'initialisation, l'hérédité et l'axiome de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 4}$

Tigün
David

Exercice 11

Colle de la semaine 1

Simplifier pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

On simplifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

donc $= \sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos(x)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

alors $= 2\sin(x)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(x)$

ainsi $= -\sin(x)+\sin(x)$ $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\right)$

donc $\boxed{=0}$

Léon. N

Colle de la semaine n°1

> *Exercice* : Écrire sous la forme d'un seul cosinus multiplié par un réel l'expression $\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Solution :

$$A = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\,\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)}_{\text{formule d'addition de cos}}$$

$$= 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\boxed{A = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{8\pi}{15}\right)}$$

Malesys Adam

Colle de la semaine 1

Exercice 14 — Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la périodicité et la parité de f, puis proposer un intervalle d'étude I.
3. Étudier les variations de f sur I.
4. Tracer l'allure de la courbe (complète) de f.

Solution :

1. On cherche le domaine de définition de f
Celle-ci n'est pas définie lorsque $2+\cos(x)=0$
donc lorsque $\cos(x)=-2$
Or $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $\cos(x) > -2$
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)}$$

$$f(x+2\pi) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} \quad (2\pi\text{-périodicité de sinus et cosinus})$$

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

$f(x)$ est 2π périodique sur $\mathbb{R}$ donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $]-\pi;\pi]$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}$$

$$= -\frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} \quad (\text{imparité de sinus et parité de cosinus})$$

$$= -f(x)$$

$f(x)$ est impaire donc on peut encore restreindre l'intervalle d'étude à $[0;\pi]$

3. Soit $x \in [0;\pi]$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = 2+\cos(x)$

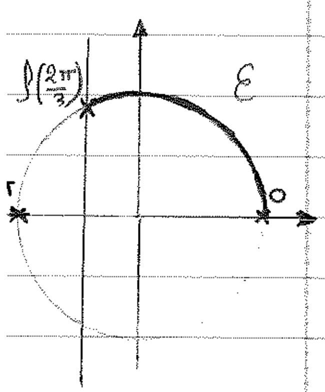
donc : $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$

donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

$= \dfrac{\cos(x)(2+\cos(x)) + \sin^2(x)}{(2+\cos(x))^2}$

$= \dfrac{2\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x)}{(2+\cos(x))^2}$

$= \dfrac{2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2}$ (relation de pythagore)



$(2+\cos(x))^2 > 0$ car $\cos(x) > -2$

$f'(x)$ est donc du même signe que $2\cos(x)+1$

* $2\cos(x)+1 \geqslant 0$

$\cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}$

donc $x \leqslant \frac{2\pi}{3}$ $\forall x \in [0;\pi]$

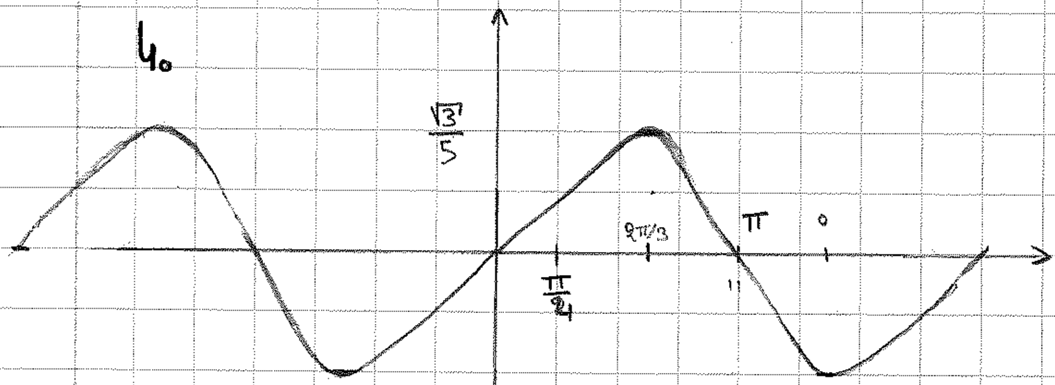
(à partir du cercle trigonométrique)

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{5}$	$\searrow$	0

$f(0) = 0 = f(\pi)$

$f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{5}$

4.



ALTINOK Celia

Semaine de colle n° 1.

énoncé : On considère le réel $a \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $\cos(a) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Calculer $\cos(2a)$, en déduire a.

Montrer que $\sin(a) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : (\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x) = 2$.

---

solution :

On calcule $\cos(2a)$.

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \quad \text{(duplication)}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1$$

$$= 2\left(\frac{6+2\sqrt{6}\sqrt{2}+2}{16}\right) - 1 \quad \text{(identité remarquable)}$$

$$= 2\left(\frac{4+\sqrt{12}}{8}\right) - 1$$

$$= \frac{8+4\sqrt{3}}{8} - 1 \quad (\text{car } \sqrt{12} = 2\sqrt{3})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{(valeur remarquable)}$$

D'où $\boxed{a = \frac{\pi}{12}}$.

D'après la relation de Pythagore, $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Ainsi, $\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Puis, $\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

Comme $0 \leq \frac{\pi}{12} \leq \pi$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$. Ainsi, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

On résout l'équation proposée en raisonnant par analyse-synthèse.

<u>Analyse</u> Soit x solution de (E), tel que :

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos(x) + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin(x) = 2$$

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin(x) = \frac{1}{2}$

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. (addition et valeur remarquable)

Selon l'égalité des cosinus, on a :

$$\begin{cases} \frac{\pi}{12} - x = \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{12} - x = -\frac{\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$$

D'où $x = \frac{5\pi}{12} \ [2\pi]$ ou $x = -\frac{\pi}{4} \ [2\pi]$.

<u>Synthèse</u> On vérifie si chacun des candidats obtenus en fin d'analyse est solution de (E).

Donc $\frac{5\pi}{12}$ $[2\pi]$ par périodicité de cosinus. Idem pour $-\frac{\pi}{4}$.

cas de $\frac{5\pi}{12}$: $\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Donc $\frac{5\pi}{12}$ est bien solution de (E) (parité de cosinus).

cas de $-\frac{\pi}{4}$: $\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Donc $-\frac{\pi}{4}$ est bien solution de (E)

<u>Conclusion</u> L'ensemble solution de (E) est

$$\left\{\exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\exists k \in \mathbb{Z} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}.$$

Raphaël M. Colle de la semaine 1

Exercice 7. *Prouver que $P \Rightarrow Q$ à l'aide d'un raisonnement par contraposée, puis étudier la réciproque.*

1. a et b sont des réels, $P(a,b) = (a^2b^2 \leq ab), Q(a,b) = (a \leq 1) \vee (b \leq 1)$.

Solution :

Raisonnement par contraposé :

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} \quad (a > 1) \wedge (b > 1) \Rightarrow a^2b^2 > ab$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a > 1$, $b > 1$

on a $\quad a > 1 \quad$ car $a > 0$

donc $\quad a^2 > a$

et $\quad b > 1 \quad$ car $b > 0$

donc $\quad b^2 > b$

alors $\quad \boxed{a^2b^2 > ab} \quad$ car $(a>0)$ et $(b>0)$

Réciproque : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} \quad a \leq 1 \vee b \leq 1 \Rightarrow a^2b^2 \leq ab$

Soit $a = 1$ et $b = 4$

alors $\quad a^2b^2 = 16$

et $\quad ab = 4$

donc $\quad \boxed{a^2b^2 > ab \quad ↯}$

La réciproque est fausse

Nom : BACHIR **Prénom :** Mehdi **colle 1 MP2I**

Question de cours :

Toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s'écrit d'une unique manière comme la somme d'une fonction paire $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et d'une fonction impaire $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Valeurs de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^2$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 1 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ $\cos^3 x+\sin^3 x=1$

Exercice 2 : Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, |\sin(nx)|\le n|\sin(x)|$

$\forall x\in\mathbb{R}$

Exercice 2

On raisonne par récurrence simple.

Définition du prédicat

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $P(n)$: "$\forall x\in\mathbb{R}, |\sin(nx)|\le n|\sin(x)|$"

Initialisation au rang 1

D'une part : $|\sin(1\times x)| = |\sin(x)|$

D'autre part : $1\times|\sin(x)| = |\sin(x)|$

Donc $P(1)$ est vraie

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $P(n)$ est vraie, i.e "$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$"
On montre que $P(n+1)$ est vraie, i.e "$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin((n+1)x)| \leq (n+1)|\sin(x)|$"

$|\sin((n+1)x)| = |\sin(nx + x)|$

formule d'addition sinus $\rightarrow = |\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)|$

Or $|\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)| \leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\sin(x)\cos(nx)|$
(inégalité triangulaire)

Donc

$|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\sin(x)\cos(nx)|$

donc $|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)| \times \underbrace{|\cos(x)|}_{\leq 1} + |\sin(x)| \times \underbrace{|\cos(nx)|}_{\leq 1}$

donc $|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)| + |\sin(x)|$

D'après l'hypothèse de récurrence

$|\sin((n+1)x)| \leq n|\sin(x)| + |\sin(x)|$

soit finalement

$|\sin((n+1)x)| \leq (n+1)|\sin(x)|$

Donc $P(n+1)$ vraie

Conclusion

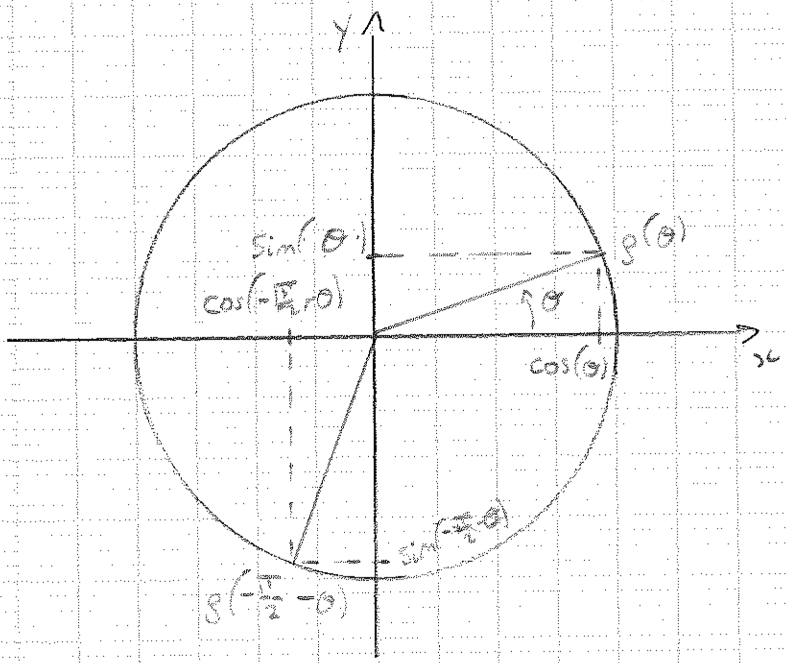
D'après l'initialisation au rang 1, l'hérédité et l'axiome de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|}$$

Khôlle de la semaine 1.

Billy. G

Exercice: Dessiner un point du cercle trigonométrique, noter θ son argument (définition rappelée si besoin). Donner la valeur de $\cos(-\frac{\pi}{2}-\theta)$ (idem sinus), graphiquement et par le calcul.



Graphiquement, $\cos(-\frac{\pi}{2}-\theta) = -\sin(\theta)$

Graphiquement, $\sin(-\frac{\pi}{2}-\theta) = -\cos(\theta)$

Par calcul:

$\cos(-\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)$ (cosinus est paire)

$= \cos(\frac{\pi}{2})\cos(\theta) - \sin(\frac{\pi}{2})\sin(\theta)$ (Formule d'addition)

$= -\sin(\theta)$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(\theta) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin(\theta) \quad \text{(Formule d'addition)}$$
$$= -\cos(\theta)$$