

PROGRAMME DE COLLE

NOMBRES COMPLEXES 2/2

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

§ 1 DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

- (1) Rédaction d'une question de cours (**8 points • 20 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
- (2) Résolution d'exercices proposés par l'examineur (**12 points**) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2 PROGRAMME

Chapitre 3 • Nombres complexes (fin) • [PDF]

- Racines carrées d'un nombre complexe non nul
- Équations du second degré
- Équations algébriques
- Racines n -ièmes de l'unité où $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$
- Racines n -ièmes d'un nombre complexe non nul où $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$
- Exponentielle d'un nombre complexe
- Interprétation géométrique des nombres complexes

Chapitre 4 • Ensembles et applications • [PDF]

- Notions d'ensembles, d'appartenance et de sous-ensembles
- Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- Opérations sur les parties d'un ensemble
- Ensemble des parties d'un ensemble
- Notion d'application
- Image directe et image réciproque
- Famille d'éléments d'un ensemble
- Composition d'applications
- Injection et surjection
- Bijection

§ 3 À VENIR

Chapitre 5 • Sommes et produits

§ 4 QUESTIONS DE COURS

Q1 — Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées opposées l'une de l'autre [C3.116, démonstration]. Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné par l'interrogateur, sous forme algébrique [C3.117].

Q2 — Racines d'un polynôme du second degré à coefficients complexes [C3.122, énoncé et démonstration]. Résolution de l'équation $z^2 - 2z - \sqrt{3} + 1 + i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Q3 — Factorisation d'une expression polynomiale possédant une racine [C3.129, énoncé et démonstration]. Résolution de l'équation $z^3 + 5z^2 + (3 - i)z - 9 + i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, en remarquant que 1 est racine.

Q4 — Définition de l'ensemble \cup_n où $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ [C3.136]. Théorème sur la description de l'ensemble \cup_n où $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ [C3.140, énoncé et démonstration].

Q5 — Théorème sur les racines n -ièmes d'un complexe non nul où $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ [C3.149, énoncé et démonstration]. Calcul des racines 5-ième de $\sqrt{3} - i$.

Q6 — Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe [C3.153]. Exponentielle d'une somme [C3.156, énoncé et démonstration]. Cas d'égalité de deux exponentielles complexes [C3.158, énoncé et démonstration]. Résolution de l'équation $\exp(z) = -2 + 2i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, uniquement à l'aide de C3.158 rappelé auparavant.

Q7 — Interprétation géométrique de $\frac{c-a}{c-b}$ où a, b, c sont des complexes distincts [C3.163, énoncé et démonstration]. Critères d'alignement et de colinéarité [C3.164, énoncé et démonstration].

Q8 — Définition d'une translation du plan et expression complexe [C3.168, énoncé et figure]. Définition d'une homothétie du plan et expression complexe [C3.169, énoncé et figure]. Définition d'une rotation du plan et expression complexe [C3.170, énoncé et figure]. Similitude directe [C3.171, énoncé]. Décomposition de la similitude directe $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto (\sqrt{3} - 3i)z - 1 + i$.

Q9 — Définition d'un n -uplet, où $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ [C4.24]. Définition du produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles [C4.25]. L'ensemble $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ n'est pas le produit cartésien de deux parties de \mathbb{R} .

Q10 — Définition de la réunion de deux parties d'un ensemble [C4.31, énoncé et diagramme de Venn]. Définition de l'intersection de deux parties d'un ensemble [C4.31, énoncé et diagramme de Venn]. Définition du complémentaire d'une partie d'un ensemble [C4.32, énoncé et diagramme de Venn]. Propriétés des opérations sur les parties d'un ensemble [C4.37, énoncé intégral et démonstration d'une des lois de de Morgan].

Q11 — Définition d'une application [C4.49, énoncé et diagramme de Venn]. Définition du graphe d'une application [C4.58]. Définition de la fonction indicatrice d'un ensemble [C4.63]. Si E est un ensemble et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, expressions de $\mathbb{1}_{\bar{A}}$, $\mathbb{1}_{A \cap B}$ et $\mathbb{1}_{A \cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ [C4.67, énoncé et démonstration].

Q12 — Définition de l'image directe d'une partie de la source d'une application [C4.68(1), énoncé]. Image directe d'une réunion [C4.71(1), énoncé et démonstration]. Calcul de l'image directe de $[-1, 4]$ par l'application $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - 2x$.

Q13 — Définition de l'image réciproque d'une partie du but d'une application [C4.68(2), énoncé]. Image réciproque d'une réunion et d'une intersection [C4.71(2), énoncé et démonstration]. Calcul de l'image réciproque de $[0, 3]$ par l'application $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 - 2x$.

Q14 — Définition d'une application injective [C4.88, énoncé et démonstration de (a) \iff (c)]. Injectivité et inversibilité à gauche [C4.96, énoncé]. Injectivité et composition [C4.98, énoncé et démonstration].

Q15 — Définition d'une application surjective [C4.100]. Surjectivité et inversibilité à droite [C4.106, énoncé]. Surjectivité et composition [C4.108, énoncé et démonstration].

Q16 — Définition d'une application bijective [C4.110]. Définition de l'inversibilité et de l'inverse d'une application [C4.113, énoncé intégral et démonstration de l'unicité (2)]. Définition de la réciproque d'une application bijective [C4.114]. Bijektivité et composition [C4.122, énoncé]. Démonstration de la bijectivité de l'application :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow [1, +\infty[\\ x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

et expression de son application réciproque [C4.119].

§ 5 APRÈS LA COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinateur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.