

PROGRAMME DE COLLE

GROUPE SYMÉTRIQUE ET DÉTERMINANT

§ 1. DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

- (1) Rédaction d'une question de cours (8 points • 20 minutes maximum) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
- (2) Résolution d'exercices proposés par l'examineur (12 points) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2. PROGRAMME

Chapitre 26 • Groupes symétriques et déterminant [PDF]

- Généralités sur le groupe symétrique
- Signature d'une permutation
- Formes n -linéaires alternées
- Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base
- Déterminant d'un endomorphisme
- Déterminant d'une matrice carrée
- Calculs de déterminants de matrices
- Comatrice

§ 3. À VENIR

Chapitre 27 « Séries numériques ». Chapitre 28 « Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles ». Chapitre 29 « Espaces préhilbertiens réels ».

§ 4. QUESTIONS DE COURS

Q1 — Définition du groupe des permutations de $[1, n]$ [C26.2]. Calcul de $\sigma_1 \circ \sigma_2$ où

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition du support d'une permutation [C26.6]. Propriété remarquable de deux permutations à supports disjoints [C26.11, énoncé et démonstration].

Q2 — Définition de l'ordre d'un élément du groupe (S_n, \circ) [C26.6, énoncé et justification du caractère bien défini]. Calcul de l'ordre de

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $(\sigma, k) \in S_n \times \mathbf{Z}$ vérifie $\sigma^k = \text{id}$ alors k divise $\text{ord}(\sigma)$ [C26.14, démonstration]. Ordre d'une composée de deux permutations à supports disjoints [C26.16, énoncé et démonstration].

Q3 — Définition d'un cycle [C26.19]. Inverse et ordre d'un cycle [C26.21 1) et 3), énoncé]. Si $n \geq 3$ alors le groupe (S_n, \circ) est anabélien [C26.28, démonstration]. Décomposition canonique de

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Q4 — Décomposition canonique d'une permutation [C26.23, énoncé intégral et démonstration de l'existence].

Q5 — Décomposition d'un cycle en produit de transpositions [C26.29, énoncé et démonstration]. Les transpositions engendrent le groupe (S_n, \circ) [C26.31, énoncé et démonstration]. Décomposition en produit de transpositions de

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 10 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 12 & 8 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Q6 — Définition de la signature [C26.36, énoncé et démonstration en admettant C26.34 et C26.35]. Signature d'un cycle [C26.37, énoncé et démonstration]. Calcul de la signature de

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Q7 — Définition d'une forme n -linéaire alternée [C26.44]. Propriétés d'une forme n -linéaire alternée [C26.46].

Q8 — Si E est \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , $f: E^n \rightarrow \mathbf{K}$ est une forme n -linéaire alternée, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, expression de $f(x_1, \dots, x_n)$ en fonction des coordonnées de x_1, \dots, x_n dans la base \mathcal{B} et de $f(e_1, \dots, e_n)$. [C26.48, calcul]. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base [C26.51, énoncé et démonstration].

Q9 — Lien entre une forme n -linéaire alternée et le déterminant dans une base [C26.52, énoncé et démonstration]. Comparaison des déterminants associés à deux bases [C26.54, énoncé et démonstration]. Caractérisation des bases via le déterminant [C26.57, énoncé et démonstration].

Q10 — Lemme clé pour la définition du déterminant d'un endomorphisme [C26.55, énoncé et démonstration]. Définition du déterminant d'un endomorphisme [C26.61]. Caractérisation des automorphisme via le déterminant [C26.63, énoncé et démonstration].

Q11 — Déterminant d'une composée d'endomorphismes [C26.64, énoncé et démonstration]. Déterminant de la réciproque d'un automorphisme [C26.65, énoncé et démonstration]. Calcul du déterminant d'une matrice $(3,3)$ proposée par l'interrogateur.

Q12 — Déterminant d'une matrice carrée [C26.63, énoncé]. Déterminant d'une matrice carrée vs. déterminant de l'application linéaire canoniquement associée [C26.74, énoncé et démonstration]. Déterminant d'un produit de matrices carrées [C26.75, énoncé et démonstration]. Calcul du déterminant d'une matrice $(4,4)$ proposée par l'interrogateur.

Q13 — Caractérisation des matrices inversibles via le déterminant [C26.76, énoncé et démonstration]. Propriété remarquable de l'application

$$\begin{array}{l|l} \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K}^* \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$$

[C26.77, énoncé]. Déterminant d'une transposée [C26.79, énoncé et démonstration]. Conséquence du résultat précédent pour le déterminant d'une matrice carrée [C26.80, énoncé].

Q14 — Effet d'une opération élémentaire sur le déterminant [C26.82, énoncé et démonstration]. Définition d'un mineur et d'un cofacteur [C26.85, énoncé]. CNS sur $\lambda \in \mathbf{K}$ pour que la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

soit inversible.

Q15 — Lemme clé pour le développement d'un déterminant suivant une ligne/colonne [C26.87, énoncé et démonstration]. Développement d'un déterminant suivant une ligne/colonne [C26.88, énoncé et démonstration].

Q16 — Déterminant d'une matrice triangulaire [C26.90, énoncé et démonstration]. Déterminant de Vandermonde [C26.93, énoncé et démonstration].

Q17 — Définition de la comatrice [C26.95, énoncé]. Relation fondamentale entre une matrice et sa comatrice [C26.96, énoncé et démonstration]. Expression de l'inverse d'une matrice inversible [C26.97, énoncé].

§ 5. APRÈS LA COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinateur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.