

# PROGRAMME DE COLLE

## MATRICES

### § 1. DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

- (1) Rédaction d'une question de cours (**8 points • 20 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
- (2) Résolution d'exercices proposés par l'examineur (**12 points**) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

### § 2. PROGRAMME

#### Chapitre 24 • Matrices [PDF]

- Matrice d'une application linéaire dans des bases
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice
- Systèmes linéaires
- Changement de bases
- Matrices équivalentes et rang
- Matrices semblables et trace

### § 3. À VENIR

Chapitre 26 « Groupe symétrique et déterminant » [PDF].

### § 4. QUESTIONS DE COURS

**Q1** — Définition de la matrice d'un vecteur dans une base [C24.2]. Définition de la matrice d'une application linéaire dans un couple de bases [C24.6]. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire [C24.11, énoncé et démonstration].

**Q2** — Définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base [C24.8]. Isomorphisme fondamental de  $\mathcal{L}(E, F)$  sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  [C24.12, énoncé et démonstration].

**Q3** — Composée d'applications linéaires versus multiplication de matrices [C24.14, énoncé et démonstration]. Isomorphisme fondamental de  $\mathcal{L}(E)$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  [C24.15, énoncé et démonstration].

**Q4** — Lien entre matrices inversibles et isomorphismes [C24.18, énoncé et démonstration]. Matrice de

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ P & \longrightarrow & P + P' \end{array} \right.$$

dans la base canonique et deux démonstration de la bijectivité de  $f$  [C24.19, résolution].

**Q5** — Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice [C24.21]. Définition du noyau d'une matrice [C24.22]. Définition et système générateur canonique de l'image d'une matrice [C24.23, énoncé]. Rang d'une matrice [C24.24, énoncé et démonstration]. Calcul du rang d'une matrice [C24.27, énoncé et démonstration].

**Q6** — Critères d'inversibilité d'une matrice [C24.30, énoncé et démonstration]. Inversibilité à gauche, inversibilité à droite et inversibilité d'une matrice carrée [C24.34, énoncé et démonstration].

**Q7** — Définition d'une matrice de passage d'une base à une autre [C24.39]. Propriétés d'une matrice de passage d'une base à une autre [C24.41]. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur [C24.43, énoncé et démonstration].

- Q8** — Théorème de changement de base pour une application linéaire [C24.44, énoncé et démonstration]. Théorème de changement de base pour un endomorphisme [C24.45, énoncé et démonstration].
- Q9** — Représentation d'une application linéaire par une matrice de Jordan [C24.51, énoncé et démonstration].
- Q10** — Définition de deux matrices équivalentes [C24.53]. Propriétés de la relation  $\equiv$  sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  [C24.54, énoncé]. Interprétation géométrique de la relation  $\equiv$  sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$  [C24.55, énoncé et démonstration].
- Q11** — Matrices de rang  $r$  et matrices équivalentes à  $J_{n,p}(r)$  [C24.56, énoncé et démonstration]. Caractérisation des matrices équivalentes par le rang [C24.57, énoncé et démonstration]. Rang d'une matrice versus rang de sa transposée [C24.60, énoncé et démonstration].
- Q12** — Rang et suppression de lignes/colonnes [C24.64, énoncé et démonstration]. Définition d'une matrice extraite [C24.61]. Rang d'une matrice extraite [C24.64, énoncé et démonstration].
- Q13** — Caractérisation d'une matrice de rang plus petit que  $r$  par ses matrices extraites [C24.67, énoncé et démonstration]. Caractérisation du rang d'une matrice par ses matrices extraites [C24.68, énoncé].
- Q14** — Définition de deux matrices semblables [C24.70]. Propriétés de la relation  $\sim$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  [C24.72, énoncé]. Interprétation géométrique de la relation  $\sim$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  [C24.73, énoncé et démonstration].
- Q15** — Définition de la trace d'une matrice carrée [C24.76]. Propriétés de la trace d'une matrice carrée [C24.77, énoncé et démonstration].
- Q16** — Trace d'un endomorphisme d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie [C24.81, énoncé et justification du caractère bien défini]. Propriétés de la trace d'un endomorphisme d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie [C24.82, énoncé et démonstration].
- Q17** — Réduction d'une symétrie vectorielle [C24.74, énoncé et démonstration]. Trace versus rang pour un projecteur d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie [C24.83, énoncé et démonstration].

## § 5. APRÈS LA COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examineur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.