Programme de colle
Probabilités II et fonctions convexes

§ 1. Déroulement de la colle

La colle comporte deux phases.

(1) Rédaction d'une question de cours **(8 points • 20 minutes maximum)** : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.

(2) Résolution d'exercices proposés par l'examinateur **(12 points)** : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2. Programme

Chapitre 23 • Probabilités [PDF]

- Univers, événements, variables aléatoires
- Espaces probabilisés finis
- Probabilités conditionnelles
- Loi d'une variable aléatoire
- Loi uniforme sur un ensemble fini non vide
- Loi de Bernoulli
- Événements indépendants
- Loi binomiale
- Couples de variables aléatoires, loi conjointe et lois marginales
- Indépendance de variables aléatoires
- Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe
- Variance d'une variable aléatoire réelle, écart-type et covariance
- Inégalités probabilistes

Chapitre 25 • Fonctions convexes [PDF]

- Segments de $\mathbf{R}$
- Fonctions convexes
- Inégalité de Jensen
- Inégalité des trois pentes
- Des propriétés remarquables des fonctions convexes (HP)
- Fonctions dérivables convexes
- Quelques inégalités de convexité classiques (HP)

§ 3. À venir

Chapitre 24 « Matrices ».

§ 4. Questions de cours

Q1 — Définition de l'espérance d'une variable aléatoire complexe [C23.70]. Expression de l'espérance d'une variable aléatoire à l'aide de la probabilité de l'univers fini [C23.71, énoncé et démonstration]. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle [C23.74, énoncé et démonstration].

Q2 — Quatre propriétés de l'espérance d'une variable aléatoire [C23.77, énoncé et démonstration]. Si $X\colon (\Omega, P) \longrightarrow \mathbf{R}_+$ est une variable aléatoire d'espérance nulle, alors X est nulle presque sûrement [C23.78, démonstration].

Q3 — Formule de transfert [C23.79, énoncé et démonstration]. Expression de l'espérance d'un produit de deux variables aléatoires complexes X, Y à l'aide de la loi conjointe du couple (X, Y) et raffinement dans le cas où $X \perp\!\!\!\perp Y$ [C23.80, énoncé et démonstration].

Q4 — Expression de l'espérance de l'image d'un uplet de variables aléatoires à l'aide de la loi de l'uplet [C23.81, énoncé]. Espérance d'un produit d'un nombre fini de variables aléatoires indépendantes [C23.82, énoncé]. Exemple de deux variables aléatoires décorrélées mais non indépendantes [C23.83, énoncé et démonstration].

Q5 — Définitions de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire réelle [C23.85, énoncé]. Effet d'une transformation affine sur la variance [C23.89, énoncé et démonstration]. Si X est une variable aléatoire réelle d'espérance m et d'écart type $\sigma > 0$, alors $\dfrac{X-m}{\sigma}$ est centrée et réduite [C23.90, démonstration]. Formule de Koenig-Huygens pour la variance [C23.91, énoncé et démonstration].

Q6 — Variance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle [C23.92, énoncé et démonstration]. Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{[loi faible des grands nombres]}$$

où $m := E(X_1)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$ [C23.104, énoncé et démonstration].

Q7 — Définition de la covariance de deux variables aléatoires réelles [C23.93, énoncé]. Quatre propriétés de la covariance [C23.94, énoncé intégral et démonstration de 1]. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour la covariance [C23.95, énoncé et démonstration dans le cas où l'une des deux variables n'est pas constante presque sûrement].

Q8 — Formule de Koenig-Huygens pour la covariance [C23.97, énoncé et démonstration]. Indépendance versus décorrélation [C23.98, énoncé]. Variance d'une somme d'un nombre fini de variables aléatoires [C23.99, énoncé intégral et démonstration de 3].

Q9 — Inégalité de Markov [C23.101, énoncé et démonstration]. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev [C23.103, énoncé et démonstration].

Q10 — Description en extension d'un segment de $\mathbf{R}$ [C25.4, énoncé et démonstration]. Une propriété de stabilité des intervalles [C25.13, énoncé et démonstration]. Définition d'une fonction convexe/concave [C25.5 et C25.7, énoncé et interprétation graphique à l'aide d'une figure richement annotée].

Q11 — La fonction carrée est convexe sur $\mathbf{R}$ [C25.11, démonstration en revenant à la définition ou avec le critère différentiel]. Si $n \geqslant 2$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

[C25.15, démonstration]. La fonction inverse est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$ [C25.12, démonstration en revenant à la définition ou avec le critère différentiel]. Si $n \geqslant 2$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_{>0})^n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant n^2$$

[C25.16, démonstration en revenant à la définition ou avec le critère différentiel].

Q12 — Inégalité de Jensen [C25.14, énoncé et démonstration].

Q13 — Caractérisation de la convexité par l'inégalité des trois pentes [C25.17, énoncé et démonstration]. Caractérisation de la convexité par la croissance des fonctions pentes [C25.18, énoncé].

Q14 — Position d'une courbe de fonction convexe par rapport à ses sécantes [C25.19, énoncé, démonstration et illustration graphique à l'aide d'une figure richement annotée]. Une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, convexe et majorée est constante [C25.24, démonstration].

Q15 — Si I est un intervalle non vide et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction convexe alors f est dérivable à droite et à gauche en tout point $a \in \mathring{I}$, donc continue en tout point $a \in \mathring{I}$ [C25.26, démonstration]. Exemple d'une fonction définie sur un segment, convexe, mais non continue sur le segment [C25.27, figure]. Exemple d'une fonction définie sur $\mathbf{R}$, convexe, mais non dérivable sur $\mathbf{R}$ [C25.28, énoncé].

Q16 — Caractérisations des fonctions dérivables convexes et des fonctions deux fois dérivables convexes [C25.29, énoncé, démonstration et illustration graphique à l'aide d'une figure richement annotée].

Q17 — Position relative de la courbe représentative d'une fonction dérivable convexe et d'une de ses tangentes [C25.32, énoncé, démonstration et illustration graphique à l'aide d'une figure richement annotée]. Inégalité de convexité pour exp [C25.34, énoncé, démonstration et illustration graphique]. Inégalité de concavité pour ln [C25.35, énoncé, démonstration et illustration graphique]. Inégalités de concavité pour sin [C25.36, énoncé, démonstration et illustration graphique].

Q18 — Si $n \geqslant 2$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{R}_{>0})^n$, alors

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{[inégalité arithmético-géométrique]}$$

[C25.37, démonstration]. Si $p > 0$ et $q > 0$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$\forall\, (x, y) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2 \qquad x \cdot y \leqslant \frac{1}{p} \cdot x^p + \frac{1}{q} \cdot y^q \qquad \text{[inégalité de Young]}$$

[C25.40, démonstration]. Si $p > 0$ et $q > 0$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n \quad \forall (y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbf{R}_+)^n \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{[inégalité de Hölder]}$$

[C25.41, démonstration].

§ 5. Après la colle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinateur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.