

PROGRAMME DE COLLE

DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉS I

§ 1 DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

- (1) Rédaction d'une question de cours (**8 points • 20 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
- (2) Résolution d'exercices proposés par l'examinateur (**12 points**) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2 PROGRAMME

Chapitre 22 • Dénombrement [PDF]

- Cardinal d'un ensemble fini
- Uplets/listes et combinaisons

Chapitre 23 • Probabilités [PDF]

- Univers, événements, variables aléatoires
- Espaces probabilisés finis
- Probabilités conditionnelles
- Loi d'une variable aléatoire
- Loi uniforme sur un ensemble fini non vide
- Loi de Bernoulli
- Événements indépendants
- Loi binomiale
- Couples de variables aléatoires, loi conjointe et lois marginales
- Indépendance de variables aléatoires

§ 3 À VENIR

Fin du chapitre 23 « Probabilités » : espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe, variance d'une variable aléatoire réelle, écart-type et covariance, inégalités probabilistes. Chapitre 24 « Matrices ».

§ 4 QUESTIONS DE COURS

Q1 — Existence d'applications injectives (resp. surjectives, bijectives) de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers $\llbracket 1, m \rrbracket$, où $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ [C21.1, énoncé et démonstration]. Définition d'un ensemble fini et du cardinal d'un tel [C21.3].

Q2 — Définition de deux ensembles équipotents [C21.6]. Finitude et cardinal de deux ensembles équipotents [C21.8, énoncé]. Existence d'applications injectives (resp. surjectives, bijectives) entre deux ensembles finis [C22.9, énoncé et démonstration].

Q3 — Finitude et cardinal d'une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$, où $n \in \mathbb{N}^*$ [C22.11, énoncé et démonstration]. Finitude et cardinal d'une partie d'un ensemble fini [C21.13, énoncé].

Q4 — Caractérisation des bijections entre deux ensembles finis [C22.14, énoncé et démonstration]. Cardinal d'une réunion disjointe de parties d'un ensemble fini [C22.16, énoncé et démonstration dans le cas de deux parties disjointes].

Q5 — Cardinal du complémentaire d'une partie d'un ensemble fini [C22.19, énoncé, diagramme de Venn et démonstration]. Cardinal d'une différence de deux parties d'un ensemble fini [C22.20, énoncé]. Cardinal d'une réunion de deux parties d'un ensemble fini [C22.21, énoncé, diagramme de Venn et démonstration].

Q6 — Finitude et cardinal du produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles finis [C22.23, énoncé et démonstration pour l'ensemble $\llbracket 0, n-1 \rrbracket \times \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, où n et m sont des entiers naturels non nuls]. Détermination du nombre de surjections de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, où $n \in \mathbb{N}^*$ [C22.29, solution avec un produit de termes dont le rôle de chacun est justifié].

Q7 — Finitude et cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre [C22.24, énoncé et démonstration]. Finitude et cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini [C22.25, énoncé et démonstration].

Q8 — Nombre de p -uplets sans répétition d'un ensemble fini, où $p \in \mathbb{N}^*$ [C22.26, énoncé et démonstration]. Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un autre [C22.27, énoncé et démonstration].

Q9 — Nombre de permutations d'un ensemble fini [C22.28 énoncé]. Définition d'une p -combinaison d'un ensemble [C22.30]. Nombre de p -combinaisons d'un ensemble fini [C22.31, énoncé et démonstration].

Q10 — Calcul de la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, où $n \in \mathbb{N}^*$ [C22.32, résolution par voie combinatoire]. Formule du binôme de Newton [C22.33, énoncé et démonstration combinatoire].

Q11 — Formule du capitaine [TD22.15, énoncé et deux démonstrations, l'une algébrique et l'autre combinatoire]. Formule des comités ou de Vandermonde

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad \forall n \in \llbracket 0, p+q \rrbracket \quad \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \cdot \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

[TD22.12, deux démonstrations, l'une algébrique et l'autre combinatoire].

Q12 — Définition d'une probabilité sur un ensemble fini non vide [C23.3]. Définition de la probabilité uniforme sur un ensemble fini [C23.4]. Propriétés d'une probabilité [C23.10, énoncé et démonstration].

Q13 — Propriétés immédiates d'un espace probabilisé fini [C23.5, énoncé intégral et démonstration de 1) et 3)]. Définition d'une distribution de probabilité sur un ensemble fini non vide [C23.6]. Probabilité versus distribution de probabilité sur un ensemble fini non vide [C23.8, énoncé et démonstration].

Q14 — Définition d'une probabilité conditionnelle [C23.13]. Une probabilité conditionnelle est une probabilité [C23.15, énoncé et démonstration]. Formule des probabilités composées [C23.17, énoncé et démonstration].

Q15 — Définition d'un système complet d'événements pour un univers fini Ω [C23.1]. Formule des probabilités totales [C23.19, énoncé et démonstration en prenant appui sur un diagramme de Venn]. Formules de Bayes [C23.22, énoncé et démonstration].

Q16 — Définition de la loi d'une variable aléatoire et caractérisation d'une telle par sa distribution de probabilité [C23.22, énoncé intégral et démonstration de 1 et 2]. Définition de l'égalité en loi de deux variables aléatoires [C23.27]. Exemple de deux variables aléatoires distinctes mais égales en loi [C23.28].

Q17 — Propriété de la loi d'une variable aléatoire image [C23.29, énoncé, schéma et démonstration]. Propriété des images de deux variables aléatoires égales en loi par une même application [C23.30, énoncé et démonstration].

Q18 — Définition de la loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement [C23.31]. Si $(n, p, q) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1[\times]0, 1[$, X, Y sont des variables aléatoires telles que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Y/(X=i) \sim \mathcal{B}(i, q)$, alors $Y \sim \mathcal{B}(n, pq)$. [C23.56, démonstration].

Q19 — Définition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme [C23.32]. Définition d'une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ [C23.35]. Si (Ω, P) est un espace probabilisé fini et A est un événement, définition et loi de l'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de A . [C23.41, résolution].

Q20 — Définition de l'indépendance de deux événements [C23.42]. Indépendance de deux événements et événements contraires [C23.44, énoncé et démonstration]. Définition d'une famille finie d'événements indépendants [C23.45]. Exemple d'une famille de 3 événements deux-à-deux indépendants, mais non indépendants [C23.46].

Q21 — Si $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1[$, détermination de la loi de la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès dans la réalisation de n expériences de Bernoulli, toutes de probabilité de succès p , et indépendantes [C23.50, résolution]. Définition d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1[$ [C23.51].

Q22 — Définition de la loi conjointe et des lois marginales d'un couple de variable aléatoire [C23.57]. La loi conjointe détermine les lois marginales [C23.60, énoncé et démonstration].

Q23 — Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires [C23.63]. Critère pour que deux variables aléatoires soient indépendantes [C23.64, énoncé et démonstration]. Indépendance et image de deux variables aléatoires [C23.65, énoncé et démonstration].

Q24 — Définition de l'indépendance d'une famille finie de variables aléatoires [C23.66]. Loi d'une somme d'un nombre fini de variables aléatoires indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ [C23.68, énoncé et démonstration].

Q25 — Critère pour l'indépendance d'une famille finie de variables aléatoires [C23.67, énoncé et démonstration]. Lemme des coalitions [C23.69, énoncé et démonstration].

§ 5 APRÈS LA COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examineur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.