PROGRAMME DE COLLE
INTÉGRATION

§ 1 DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

(1) Rédaction d'une question de cours **(8 points • 20 minutes maximum)** : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.

(2) Résolution d'exercices proposés par l'examinateur **(12 points)** : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2 PROGRAMME

Méthodes de primitivation [PDF]

- Reconnaissance d'une dérivée usuelle à une constante multiplicative près
- Reconnaissance d'une dérivée de composée
- Primitivation d'un cosinus-exponentielle ou d'un sinus-exponentielle
- Primitivation d'un inverse de polynôme du second degré
- Polynômes trigonométriques
- Primitivation à l'aide du théorème fondamental de l'analyse

Chapitre 21 • Intégration [PDF]

- Fonctions en escalier
- Intégration des fonctions en escalier sur un segment
- Continuité uniforme d'une fonction
- Intégration des fonctions continues sur un segment
- Sommes de Riemann
- Lien entre intégral et primitive
- Formules de Taylor globales
- Fonctions continues par morceaux sur un segment
- Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment
- Généralisation aux fonctions à valeurs complexes
- Synthèses des résultats sur l'intégrale

§ 3 À VENIR

Chapitre 22 « Dénombrement ». Chapitre 23 « Probabilités ».

§ 4 QUESTIONS DE COURS

Q1 — Définition d'une fonction en escalier sur un segment [C21.12]. Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier relativement à une subdivision [C21.21]. Si a, b sont des réels tels que $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, σ_1, σ_2 sont deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées à f telles que $\sigma_2 \prec \sigma_1$ et σ_2 possède un point de plus que σ_1 alors $I(f,\sigma_1) = I(f,\sigma_2)$ [C21.22, point (c) de la démonstration].

Q2 — Propriétés fondamentales de l'intégrale des fonctions en escalier sur un segment [C21.29, énoncé et démonstration de deux propriétés au choix].

Q3 — Définition de la continuité uniforme d'une fonction [C21.30]. Lien entre continuité uniforme et caractère lipschitzien [C21.35, énoncé et démonstration]. Deux propriétés remarquables de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ [C21.36, énoncé et démonstration].

Q4 — Théorème de Heine [C21.39, énoncé et démonstration].

Q5 — Définition de l'intégrale inférieure et de l'intégrale supérieure d'une fonction bornée sur un segment [C21.41, C21.42]. Définition d'une fonction Riemann-intégrable et de l'intégrale d'une telle [C21.43]. Justification de l'existence de $\displaystyle\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$, puis calcul à partir de la définition [C21.49].

Q6 — Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des fonctions en escaliers [C21.45, énoncé et démonstration].

Q7 — Riemann-intégrabilité d'une fonction continue sur un segment [C21.47, énoncé et démonstration].

Q8 — Propriétés fondamentales de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment [C21.50, énoncé]. Séparation de l'intégrale des fonctions continues [C21.51, énoncé et démonstration].

Q9 — Sommes de Riemann [C21.57, énoncé et démonstration dans le cas lipschitzien].

Q10 — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \, \mathrm{d}t > 0$ [C21.56, démonstration]. Limite éventuelle de $\displaystyle\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$ lorsque n tend vers $+\infty$ [C21.59, étude].

Q11 — Théorème fondamental de l'analyse [C21.61, énoncé et démonstration].

Q12 — Condition suffisante d'existence de primitives [C21.62, énoncé]. Valeur moyenne d'une fonction [C21.63, énoncé et démonstration].

Q13 — Lien entre primitive et intégrale [C21.65, énoncé et démonstration]. Intégration par parties [C21.67, énoncé]. Changement de variable [C21.68, énoncé et démonstration].

Q14 — Intégration et parité [C21.71, énoncé et démonstration]. Intégration et imparité [C21.72, énoncé et démonstration].

Q15 — Formule de Taylor avec reste intégral [C21.75, énoncé et démonstration].

Q16 — Pour tout $x \in [0,1]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$, puis limite éventuelle de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$ [C21.76, étude].

Q17 — Inégalité de Taylor-Lagrange [C21.77, énoncé et démonstration]. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(x)$ [C21.78, démonstration].

Q18 — Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment [C21.80. Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment [C21.91. Propriétés fondamentales des fonctions continues par morceaux sur un segment [C21.95, énoncé].

§ 5 Après la colle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinateur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.