PROGRAMME DE COLLE
ESPACES DE DIMENSION FINIE ET APPLICATIONS LINÉAIRES

§ 1 DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

(1) Rédaction d'une question de cours **(8 points • 20 minutes maximum)** : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.

(2) Résolution d'exercices proposés par l'examinateur **(12 points)** : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2 PROGRAMME

Chapitre 19 • Espaces de dimension finie [PDF]

- Introduction : ensembles finis et cardinaux d'iceux
- Existence de bases
- Dimension d'un espace de dimension finie
- Équations différentielles linéaires homogènes et dimension
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 et dimension
- Sous-espaces et dimension

Chapitre 20 • Applications linéaires [PDF]

- Définition et exemples fondamentaux
- Opérations sur les applications linéaires
- Noyau, image et rang
- Endomorphismes
- Théorème du rang

§ 3 À VENIR

Fin du Chapitre 20 « Applications linéaires » : Détermination d'une application linéaire, Formes linéaires et hyperplan. Chapitre 21 « Intégration ».

§ 4 QUESTIONS DE COURS

Q1 — Définition d'un espace de dimension finie [C19.2]. Définition de la dimension d'un espace de dimension finie [C19.15]. Si $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. [C19.18, énoncé et démonstration].

Q2 — Lemme sur la diminution du nombre de vecteurs d'une famille génératrice [C19.5], énoncé et démonstration. Théorème de la base intermédiaire [C19.6], énoncé, heuristique algorithmique ou démonstration formalisée.

Q3 — Théorème de la base extraite [C19.7], énoncé et démonstration. Si

$$u_1 := (1,-3,2,-1) \qquad u_2 := (1,7,-2,9) \qquad u_3 := (2,-1,2,3) \qquad u_4 := (3,-14,8,-8)$$

extraction d'une base de la famille génératrice (u_1, u_2, u_3, u_4) de $F := \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ [C19.8], calcul avec esquisse d'algorithme.

Q4 — Théorème de la base incomplète [C19.10], énoncé et démonstration. Si

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+y+z+t=0\right\} \quad , \quad u_1 := (1,1,1,-3) \quad \text{et} \quad u_2 := (3,-1,-1,-1)$$

détermination d'un système linéaire homogène dont $\text{Vect}(u_1, u_2)$ est l'ensemble solution et complétion de la famille libre (u_1, u_2) de vecteurs de F en une base de F [C19.11], calcul avec esquisse d'algorithme.

Q5 — Propriété du noyau d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ lorsque $1 \leqslant n < p$ [C19.12], énoncé. Majoration du nombre de vecteurs d'une famille libre dans un espace de dimension finie [C19.13], énoncé et démonstration. Propriété remarquable de deux bases d'un espace de dimension finie [C19.14], énoncé et démonstration.

Q6 — Si

$$F := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \,:\, x+z = y-t = 0\right\}$$

détermination de la dimension de F [C19.17], calcul. Si $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ [C19.19], énoncé et justfication. Dimension d'un produit fini d'espaces de dimension finie [C19.25], énoncé général et démonstration pour un produit de deux espaces de dimension finie.

Q7 — Dimension et cardinal d'une famille libre [C19.20], énoncé et démonstration. Dimension et cardinal d'une famille génératrice [C19.21], énoncé. Si

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors (A,B,C,D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ [C19.24], démonstration.

Q8 — Définition du rang d'une famille finie de vecteurs [C19.27]. Majoration du rang d'une famille de vecteurs [C19.28], énoncé et démonstration. Si

$$u_1 := (1,2,-1,1) \quad , \quad u_2 := (-3,-2,3,2) \quad , \quad u_3 := (-1,0,1,1) \quad , \quad u_4 := (2,3,-2,1)$$

détermination de $\text{Rg}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ [C19.28], calcul.

Q9 — Structure, base et dimension de l'ensemble solution d'une EDLH1 [C19.31], énoncé. Structure, base et dimension de l'ensemble solution d'une EDLCCH2 dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ [C19.33], énoncé intégral et démonstration de la liberté de la base donnée dans le cas $\Delta < 0$.

Q10 — Structure, base et dimension de l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 donnée [C19.36], énoncé intégral et démonstration de la liberté de la base donnée dans le cas $\Delta = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille

$$\left(f_k \,\middle|\, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(kx) \end{array} \right)_{k \in [\![0,n]\!]}$$

est libre et conséquence pour $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ [C19.40], énoncé et démonstration.

Q11 — Un critère de liberté [C19.37], énoncé, illustration géométrique dans l'espace et démonstration. Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie [C19.48], énoncé et démonstration.

Q12 — Somme directe de deux sous-espaces de dimension finie et base adaptée [C19.41], énoncé et démonstration. Si E est un espace dimension finie $n \geqslant 2$, H_1 et H_2 sont deux sous-espaces distincts de dimension $n-1$, alors $\dim H_1 \cap H_2 = n-2$ [C19.43] démonstration.

Q13 — Formule de Grassmann [C19.42], énoncé et démonstration.

Q14 — Existence d'un supplémentaire d'un sous-espace dans un espace de dimension finie [C19.44], énoncé et démonstration.

Q15 — Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires [C19.46], énoncé et démonstration. Détermination d'un supplémentaire de

$$F := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x-2y+3z-4t = 4x+3y+2z+t = 0\right\}$$

dans $\mathbb{R}^4$ [C19.45], cacul avec justification des choix effectués.

Q16 — Définition d'une application linéaire [C20.2]. Image du vecteur nul de la source d'une application linéaire [C20.4, énoncé et démonstration]. L'application

$$f \,\left|\, \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-3y+3t, x+7t-8t) \end{array} \right.$$

est linéaire [C20.5, démonstration à l'aide d'une matrice que l'on fera apparaître].

Q17 — Application linéaire canoniquement associée à une matrice [C20.6, énoncé]. Combinaison linéaire d'applications linéaires [C20.14, énoncé et démonstration]. Composition d'applications linéaires [C20.16, énoncé et démonstration].

Q18 — Définition d'un isomorphisme [C20.19, énoncé]. Application réciproque d'un isomorphisme [C20.21, énoncé et démonstration]. L'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P+P' \end{array} \right.$$

est un isomorphisme et détermination de son application réciproque [C20.22, démonstration et expression de f^{-1}].

Q19 — Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire [C20.23, énoncé et démonstration]. Définitions et structures du noyau et de l'image d'une application linéaire [C20.24, énoncé].

Q20 — Critère d'injectivité (resp. de surjectivité) pour une application linéaire [C20.26, énoncé et démonstration]. Linéarité, noyau et image de l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$$

[C20.28, démonstration et calculs] où $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

Q21 — Famille génératrice de l'image d'une application linéaire [C20.30, énoncé et démonstration]. Définition d'une application linéaire de rang fini et du rang d'une telle [C20.32]. Caractère bien défini, linéarité, image et rang de l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & n\cdot P - XP' \end{array} \right.$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ [C20.31, démonstration et calculs].

Q22 — Rang d'une composée d'applications linéaires [C20.35, énoncé et démonstration].

Q23 — Définition d'un endomorphisme [C20.36, énoncé]. Définition d'une homothétie vectorielle [C20.39, énoncé]. Les espaces

$$F := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x+y=0\right\} \quad \text{et} \quad G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x-2y=0\right\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ et calcul de la projection p de $\mathbb{R}^2$ sur F parallèlement à G [C20.43, résolution].

Q24 — Projection (géométrique) sur un sous-espace parallèlement à un supplémentaire [C20.42, énoncé et démonstration]. Interprétation géométrique et éléments caractéristiques d'un projecteur (abstrait) [C20.48, énoncé et démonstration].

Q25 — Symétrie (géométrique) par rapport à un sous-espace parallèlement à un supplémentaire [C20.44, énoncé et démonstration]. Interprétation géométrique et éléments caractéristiques d'une symétrie (abstraite) [C20.50, énoncé et démonstration].

Q26 — Définition d'un automorphisme [C20.51]. Groupe linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel [C20.54, énoncé et démonstration]. Les espaces

$$F := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z=0\right\} \quad \text{et} \quad G := \{(a,2a,3a) \,:\, a \in \mathbb{R}\}$$

sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et calcul de la symétrie s de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F parallèlement à G [C20.46, résolution].

Q27 — Théorème du rang (version géométrique) [C20.55, énoncé et démonstration]. Isomorphie et dimension [C20.56, énoncé et démonstration].

Q28 — Théorème du rang (version où la source est supposée de dimension finie) [C20.57, énoncé et démonstration]. Il n'existe aucune injection linéaire de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$ et aucune surjection linéaire de $\mathbb{K}^5$ sur $\mathbb{K}^6$ [C20.58, démonstrations]. Linéarité, noyau et surjectivité de l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y,z+t) \end{array} \right.$$

[C20.59, résolution].

§ 5 Après la colle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinateur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.