Programme de colle
Espaces vectoriels

§ 1 Déroulement de la colle

La colle comporte deux phases.

(1) Rédaction d'une question de cours **(8 points • 20 minutes maximum)** : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.

(2) Résolution d'exercices proposés par l'examinateur **(12 points)** : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2 Programme

Chapitre 18 • Espaces vectoriels [PDF]

- Espaces vectoriels
- Sous-espace vectoriel
- Sous-espace vectoriel engendré par une partie
- Familles remarquables de vecteurs
- Somme de deux sous-espaces vectoriels

§ 3 À venir

Chapitre 19 « Espaces vectoriels de dimension finie ».

§ 4 Questions de cours

Q1 — Définition d'un espace vectoriel [C18.2]. Conséquences des axiomes de structure d'espace vectoriel [C18.3, enoncé et démonstration].

Q2 — Propriété d'intégrité mixte dans un espace vectoriel [C18.4, énoncé et démonstration]. Définition d'une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs [C18.11]. La fonction $f\colon x \longmapsto \cos^5(x)$ est combinaison linéaire des fonctions

$$f_1\colon x \longmapsto \cos(x) \qquad f_2\colon x \longmapsto \cos(3x) \qquad f_3\colon x \longmapsto \cos(5x)$$

dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ [C18.18, démonstration].

Q3 — Si I est un ensemble non vide, définitions du support d'un élément de $\mathbb{K}^I$, d'une famille presque nulle de scalaires indexée par I, de l'ensemble $\mathbb{K}^{(I)}$ [C18.22]. Définition d'une combinaison linéaire d'une famille de vecteurs indexée par un ensemble I non vide [C18.23]. Si I est un ensemble non vide, structure de $\mathbb{K}^{(I)}$ [C18.41, énoncé et démonstration].

Q4 — Définition d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel [C18.26]. Critère pour qu'une partie d'un espace vectoriel soit un sous-espace vectoriel [C18.30, énoncé et démonstration].

Q5 — Si u est un vecteur non nul d'un espace vectoriel E, structure de $\mathrm{Vect}(u)$ [C18.31, énoncé et démonstration avec la caractérisation]. CNS sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $F_\lambda := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 3x - 2y = \lambda\right\}$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ [C18.32, résolution]. Structure du noyau d'une matrice (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ [C18.39, énoncé et démonstration avec la caractérisation].

Q6 — Structure de l'ensemble solution d'un système linéaire homogène d'inconnue $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ [C18.40, énoncé et démonstration avec la caractérisation]. Si $n \in \mathbb{N}$, structure de $\mathbb{K}_n[X] := \left\{P \in \mathbb{K}[X] \,:\, \deg(P) \leqslant n\right\}$ [C18.43, énoncé et démonstration avec la caractérisation]. L'ensemble $\mathscr{A}$ des suites arithmétiques de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ contrairement à l'ensemble $\mathscr{G}$ des suites géométriques [C18.45, démonstration et contre-exemple argumenté].

Q7 — Structure de l'intersection de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel [C18.49, énoncé et démonstration]. Une réunion de sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel E n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de E [C18.50, contre-exemple argumenté]. Définition et propriétés d'un sous-espace vectoriel engendré [C18.53, énoncé intégral incluant la propriété de minimalité et démonstration].

Q8 — Description du sous-espace vectoriel engendré par une partie finie d'un espace vectoriel [C18.55, énoncé et démonstration]. $\mathrm{Vect}((1,1,1),(2,1,-1)) = \mathrm{Vect}((0,1,3),(9,4,-6))$ [C18.56, démonstration avec la propriété de minimalité d'un sous-espace vectoriel engendré].

Q9 — Définition d'une famille génératrice d'un espace vectoriel [C18.62]. Propriété d'une sur-famille d'une famille génératrice [C18.67, énoncé et démonstration]. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x+y+z+t=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par trois vecteurs [C18.63, démonstration].

Q10 — Définitions d'une famille libre et d'une famille liée [C18.68]. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Donner une CNS sur $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pour que la famille

$$\left(u_k := \left(1, \alpha_k, \alpha_k^2, \ldots, \alpha_k^{n-1}, \alpha_k^n\right)\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$$

de vecteurs de $\mathbb{K}^{n+1}$ soit libre. [C18.76, résolution].

Q11 — Définition de deux vecteurs colinéaires [C18.72]. Critère de liberté pour une famille de deux vecteurs [C18.73, énoncé et démonstration]. Critère fondamental pour qu'une famille soit liée [C18.75, énoncé et démonstration].

Q12 — Propriété d'une sous-famille d'une famille libre [C18.77, énoncé]. Critère de liberté pour une famille de polynôme [C18.78, énoncé et démonstration]. Théorème des degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$ [C18.92, énoncé et démonstration].

Q13 — Définition d'une base d'un espace vectoriel [C18.80]. Définition des coordonnées d'un vecteur d'un espace vectoriel dans une base [C18.86, énoncé, justification de l'existence et de l'unicité]. Si $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n$ des éléments deux-à-deux distincts de $\mathbb{K}$, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$

$$L_i := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

alors $\mathscr{L} := (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et détermination des coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base $\mathscr{L}$ [C18.95, énoncé complété et démonstration].

Q14 — Définition et propriétés d'une somme de deux sous-espaces vectoriels [C18.97, énoncé intégral incluant la propriété de minimalité et démonstration]. Si

$$F_1 := \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1+x_2+x_3=0\right\} \qquad \text{et} \qquad F_2 := \left\{(a,a,a) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a \in \mathbb{R}\right\}$$

alors $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^3$ [C18.99, C18.104, résolution].

Q15 — Somme de deux sous-espaces vectoriels engendrés [C18.100, énoncé et démonstration]. Définition d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel [C18.101]. Critère pour que deux sous-espaces vectoriels soient en somme directe [C18.103, énoncé et démonstration].

Q16 — Définition de deux sous-espaces supplémentaires dans un espace vectoriel [C18.106]. Critère pour que deux sous-espaces soient supplémentaires dans un espace vectoriel [C18.109, énoncé]. Si $n \in \mathbb{N}^*$, les espaces

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,:\, A^\top = A\right\} \qquad \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) := \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,:\, A^\top = -A\right\}$$

sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ [C18.102, C18.108, résolution].

§ 5 Après la colle

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinateur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.