

PROGRAMME DE COLLE

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

§ 1 DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

- (1) Rédaction d'une question de cours (**8 points • 20 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
- (2) Résolution d'exercices proposés par l'examineur (**12 points**) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2 PROGRAMME

Chapitre 17 • Analyse asymptotique [PDF]

- Relations de comparaison : le cas des fonctions
- Développements limités : fondements
- Formule de Taylor-Young
- Développements limités usuels
- Opérations sur les développements limités
- Quelques applications des développements limités
- Extrema locaux en un point intérieur et développements limités
- Relations de comparaison : le cas des suites
- Quelques problèmes d'études asymptotiques
- Formule de Stirling

§ 3 À VENIR

Chapitre 18 « Espaces vectoriels ».

§ 4 QUESTIONS DE COURS

Q1 — Définition d'un voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ [C17.1]. Propriétés des voisinages d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ [C17.2, [énoncé et démonstration](#)].

Q2 — Définition de l'ensemble \mathcal{G}_a des germes des fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ [C17.6]. Définition de l'addition et de la multiplication sur \mathcal{G}_a , où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ [C17.7]. Une intersection quelconque de voisinages d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ n'est pas nécessairement un voisinage de a . [C17.4, [énoncé et démonstration](#)].

Q3 — Définition de la relation de domination \mathcal{O} sur \mathcal{G}_a , où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ [C17.8]. Propriétés de la relation de domination \mathcal{O} sur \mathcal{G}_a , où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ [C17.16, [énoncé et démonstration des trois premières assertions](#)].

Q4 — Définition de la relation de négligeabilité \mathcal{o} sur \mathcal{G}_a , où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ [C17.9]. Propriétés de la relation de négligeabilité \mathcal{o} sur \mathcal{G}_a , où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ [C17.18, [énoncé et démonstration des quatre premières assertions](#)].

Q5 — Définition de la relation d'équivalence \sim sur \mathcal{G}_a , où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ [C17.11]. Propriétés de la relation d'équivalence \sim sur \mathcal{G}_a , où $a \in \overline{\mathbb{R}}$ [C17.20, [énoncé et démonstration des trois premières assertions](#)].

Q6 — Lien fondamental entre \mathcal{o} et \sim [C17.11, [énoncé et explication](#)]. Expressions des trois notations de Landau à l'aide de quotient [C17.13, [énoncé](#)]. Équivalents d'une fonction polynomiale non nulle en 0 et en $+\infty$ [C17.14, [énoncé et démonstration](#)]. Développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ [C17.15, [énoncé et démonstration](#)].

Q7 — Reformulation des résultats sur les croissances comparées à l'aide des relations de Landau [C17.26, énoncé]. Propriétés conservées par équivalence [C17.31, énoncé intégral et démonstration des deux premières].

Q8 — Définition d'un développement limité (DL) [C17.33]. Unicité d'un DL [C17.36, énoncé et démonstration]. Troncature d'un DL [C17.37, énoncé].

Q9 — Parité et DL [C17.38, énoncé et démonstration]. Translation de l'étude d'un DL en un point $a \in \mathbb{R}$ au point 0 [C17.39, énoncé et démonstration].

Q10 — DL et continuité [C17.41, énoncé]. DL et dérivabilité [C17.42, énoncé et démonstration]. Exemple d'une fonction admettant un $DL_2(0)$ sans être dérivable deux fois en 0 [C17.46, énoncé et démonstration].

Q11 — DL, équivalent et signe [C17.47, énoncé et démonstration]. Allure locale de la courbe représentative d'une fonction f définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ admettant un $DL_2(0)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

avec $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_2 \in \mathbb{R}^*$ [C17.48, explications nourries et tracé].

Q12 — Inégalité des accroissements finis généralisée [C17.49, énoncé et démonstration]. Primitivation d'un DL [C17.50, énoncé et démonstration].

Q13 — Formule de Taylor-Young [C17.54, énoncé et démonstration]. DL à tout ordre en 0 de la fonction Arctan et DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction tan [Partie 4, énoncés et démonstrations].

Q14 — Table des dix DL usuels [Partie 4, énoncé intégral et démonstrations de trois des résultats indiqués par l'interrogateur].

Q15 — Combinaison linéaire de deux DL [C17.59, énoncé et démonstration]. $DL_5(0)$ de $x \mapsto \cos^{\sin(x)}(x)$ [C17.71, calcul détaillé].

Q16 — Produit de deux DL [C17.65, énoncé et démonstration]. $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x) \cdot \operatorname{ch}(x)$ [C17.67, calcul détaillé].

Q17 — Composition de deux DL en 0 [C17.69, énoncé et démonstration]. $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x} - 2 \cdot \operatorname{Arctan}(x)$ [C17.61, calcul détaillé].

Q18 — $DL_2(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$ [C17.75, calcul détaillé]. Prolongement dérivable en 0 de $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$ et nombre dérivé en 0 d'icelui [C17.90, calcul détaillé et justification].

Q19 — Équivalent simple de $\sqrt{1+x} - \frac{2}{2-x}$ lorsque x tend vers 0 [C17.79, calcul détaillé]. Limite éventuelle de $\frac{\cos(x) - \sin(x)}{1 - \tan(x)}$ lorsque x tend vers 1.

Q20 — Allure locale au voisinage du point d'abscisse 0 de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ [C17.88, calcul détaillé, tangente, position relative et justification]. Allure locale au voisinage de $+\infty$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ [C17.92, calcul détaillé, asymptote, position relative et justification].

Q21 — Définition des trois notations de Landau O , o et \sim pour les suites [C17.99]. DA à deux termes de la suite $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ [C17.106, calcul détaillé]. Formule de Stirling [C17.119, énoncé].

Q22 — La fonction $f: x \mapsto \ln(1+x) - e^x$ admet-elle un extremum local en 0? [C17.96, calcul détaillé et étude]. La fonction $f: x \mapsto x \cdot \sqrt{1+x} - \ln(1+x) + 2 \cdot \cos(x) - 2$ admet-elle un extremum local en 0? [C17.98, calcul détaillé et étude].

§ 5 APRÈS LA COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinateur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.