

# PROGRAMME DE COLLE

## CONTINUITÉ, DÉRIVATION, POLYNÔMES

### § 1 DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

- (1) Rédaction d'une question de cours (**8 points • 20 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
- (2) Résolution d'exercices proposés par l'examineur (**12 points**) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

### § 2 PROGRAMME

#### Chapitre 15 • Limites, continuité et dérivabilité [PDF]

- Limite d'une fonction en un point.
- Quelques outils pour étudier une limite de fonction.
- Limite d'une fonction à droite (resp. à gauche).
- Continuité en un point.
- Continuité sur un intervalle.
- Continuité des fonctions à valeurs complexes.
- Nombre dérivé, fonction dérivée.
- Extremum local et point critique.
- Théorèmes de Rolle et des accroissements finis.
- Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ .

#### Chapitre 16 • Polynômes [PDF]

- Construction de l'algèbre  $\mathbb{K}[X]$ .
- Synthèse des opérations définies sur  $\mathbb{K}[X]$ .
- Synthèse sur la structure de  $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ .

### § 3 À VENIR

Suite du chapitre 16 « Polynômes » et chapitre 17 « Fractions rationnelles ».

### § 4 QUESTIONS DE COURS

**Q1** — Théorème de Rolle [C15.137, énoncé avec illustration géométrique, démonstration].

**Q2** — Théorème des accroissements finis [C15.138, énoncé avec illustration géométrique, démonstration].

Majoration de l'erreur commise dans l'approximation  $\cos(1) \approx \frac{1}{2}$  [C15.139, étude].

**Q3** — Si  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction bornée sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , telle que  $f'$  admette une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ , alors  $\ell = 0$  [C15.140, démonstration].

**Q4** — Définition d'une application lipschitzienne [C15.143]. Une propriété remarquable des applications lipschitziennes [C15.144, énoncé et démonstration].

**Q5** — Inégalité des accroissements finis [C15.146, énoncé et démonstration]. Caractérisation des fonctions dérivables constantes sur un intervalle [C15.148, énoncé et démonstration].

**Q6** — Caractérisation des fonctions dérivables monotones sur un intervalle [C15.149, énoncé intégral et démonstration de 1)]. Caractérisation des fonctions dérivables strictement monotones sur un intervalle [C15.150, énoncé intégral et démonstration de 1)].

**Q7** — Théorème de la limite de la dérivée [C15.152, énoncé et démonstration].

**Q8** — Définition d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un intervalle, où  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  [C15.152, énoncé et démonstration]. Exemple de fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  dont la dérivée n'est pas continue en 0 [C15.157, énoncé de la définition de  $f$ , démonstration de la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et démonstration de la discontinuité de  $f'$  en 0].

**Q9** — Combinaison linéaire de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  où  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  [C15.159, énoncé]. Formule de Leibniz [C15.160, énoncé et démonstration].

**Q10** — Composée de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  où  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  [C15.162, énoncé et démonstration]. Caractère  $\mathcal{C}^\infty$  de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}^*$  et dérivées itérées [conjecture et démonstration].

**Q11** — Quotient de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  où  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  [C15.163, énoncé et démonstration]. Réciproque d'une fonction bijective de classe  $\mathcal{C}^k$  où  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  [C15.164, énoncé et démonstration].

**Q12** — Définition de l'addition [C16.3, énoncé], de la multiplication par un scalaire [C16.5, énoncé], de la multiplication interne sur  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  [C16.7, énoncé]. Définition de  $X \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$  à l'aide de symboles de Kronecker et calcul des puissances de  $X$  à l'aide de symboles de Kronecker [C16.9, énoncé].

**Q13** — Écriture canonique d'un élément de  $\mathbb{K}[X]$  [C16.13, énoncé]. Expressions de l'addition, la multiplication par un scalaire, la multiplication interne dans à l'aide des écritures canoniques des éléments de  $\mathbb{K}[X]$  [Partie II, énoncé]. La multiplication interne de  $\mathbb{K}[X]$  est associative et commutative [C16.18, énoncés formels et démonstrations].

**Q14** — Formule du binôme de Newton dans  $\mathbb{K}[X]$  [C16.16, énoncé]. Factorisation d'une différence de deux puissances  $n$ -ièmes dans  $\mathbb{K}[X]$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$  [C16.17, énoncé]. Une formule de Vandermonde

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

[C16.19, une démonstration algébrique et une autre combinatoire].

## § 5 APRÈS LA COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examinateur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.