

# PROGRAMME DE COLLE

## LIMITES DE FONCTIONS, CONTINUITÉ, DÉRIVATION

### § 1 DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

- (1) Rédaction d'une question de cours (**8 points • 20 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
- (2) Résolution d'exercices proposés par l'examineur (**12 points**) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

### § 2 PROGRAMME

#### Chapitre 15 • Limites, continuité et dérivabilité [PDF]

- Limite d'une fonction en un point.
- Quelques outils pour étudier une limite de fonction.
- Limite d'une fonction à droite (resp. à gauche).
- Continuité en un point.
- Continuité sur un intervalle.
- Continuité des fonctions à valeurs complexes.
- Nombre dérivé, fonction dérivée.
- Extremum local et point critique.

### § 3 À VENIR

Fin du Chapitre 15 « Limites, continuité et dérivabilité » et Chapitre 16 « Polynômes ».

### § 4 QUESTIONS DE COURS

**Q1** — Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{\text{sh}(t)}{2}(x-t)^2 dt$ , puis  $\frac{\text{ch}(x) - 1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$  [C15.62, démonstration].

**Q2** — Limite finie en un point réel à droite pour une fonction [C15.63, énoncé]. Limite  $+\infty$  en un point réel à droite pour une fonction [C15.65, énoncé]. Limite  $-\infty$  en un point réel à droite pour une fonction [C15.67, énoncé].  $\frac{1}{3-x} \xrightarrow{x \rightarrow 3^+} -\infty$  [C15.68, démonstration].

**Q3** — Définition de la continuité en un point [C15.77, énoncé]. Définition d'une fonction prolongeable par continuité en un point [C15.82, énoncé]. Prolongements par continuité éventuels des deux fonctions suivantes [C15.83, étude argumentée].

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

**Q4** — Définition de la continuité en un point à droite/gauche [C15.84, énoncé]. Continuité à gauche et à droite en 0 de la fonction suivante [C15.86, étude argumentée].

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \\ \sqrt{x} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1 - \cos(x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

**Q5** — Caractérisation séquentielle de la continuité [C15.87, énoncé]. La fonction suivante n'est continue en aucun point de  $\mathbb{R}$ . [C15.88, démonstration].

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

**Q6** — Théorème des valeurs intermédiaires [C15.93, énoncé et démonstration].

**Q7** — Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone [C15.99, énoncé intégral et démonstration du cas 1) ou 2) ou 3)].

**Q8** — Théorème des bornes atteintes [C15.101, énoncé intégral et démonstration de l'existence d'un maximum].

**Q9** — Image continue d'un intervalle [C15.94, énoncé et démonstration]. Image continue d'un segment [C15.104, énoncé et démonstration].

**Q10** — Fonction continue et injective sur un intervalle [C15.106, énoncé]. Théorème de la bijection enrichi [C15.107, énoncé].

**Q11** — Définition d'une fonction à valeurs complexes continue [C15.108, énoncé]. Caractérisation de la continuité d'une fonction à valeurs complexes [C15.109, énoncé et démonstration].

**Q12** — Définition d'une fonction dérivable en un point [C15.112, énoncé]. Dérivabilité et dérivée de la fonction suivante en un point  $a \in \mathbb{R}$  [C15.112, démonstration].

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \\ x \longmapsto \end{array} \right. \mathbb{R} \quad 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Définition d'une fonction possédant un DL1 en un point [C15.115, énoncé].

**Q13** — Dérivabilité en  $a$  versus DL1 en  $a$  [C15.116, énoncé et démonstration]. DL1 en 0 de  $x \mapsto \sqrt{1+x}$  [C15.117, énoncé].

**Q14** — Définition d'une fonction dérivable en un point à droite/gauche [C15.120, énoncé]. Lien entre dérivabilité et continuité [C15.118, C15.119, énoncés et démonstrations].

**Q15** — Opérations algébriques sur les dérivées [C15.125, énoncé intégral et démonstration pour le produit avec des DL1].

**Q16** — Composée de deux fonctions dérivables [C15.126, énoncé et démonstration avec des DL1].

**Q17** — Dérivabilité et dérivée d'une réciproque [C15.127, énoncé et démonstration].

**Q18** — Définition d'un point critique [C15.131, énoncé]. Définition d'un extremum local [C15.134, énoncé]. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur [C15.134, énoncé et démonstration].

## § 5 APRÈS LA COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examineur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.