

# PROGRAMME DE COLLE

## CALCUL MATRICIEL ET SYSTÈMES LINÉAIRES II

### LIMITES DE FONCTIONS

#### § 1 DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

- (1) Rédaction d'une question de cours (**8 points • 20 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
- (2) Résolution d'exercices proposés par l'examineur (**12 points**) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

#### § 2 PROGRAMME

##### Chapitre 14 • Calcul matriciel et systèmes linéaires [PDF]

- Opérations sur les matrices
- Opérations élémentaires
- Systèmes linéaires
- Anneau des matrices carrées
- Algorithme du pivot de Gauß et applications

##### Chapitre 15 • Limites, continuité et dérivabilité [PDF]

- Limite d'une fonction en un point.
- Quelques outils pour étudier une limite de fonction.

#### § 3 QUESTIONS DE COURS

**Q1** — Algorithme du pivot de Gauß [C14.103, énoncé]. Traduction matricielle de la correction de l'algorithme du du pivot de Gauß [C14.105, énoncé].

**Q2** — Définition d'une matrice de Jordan [C14.106, énoncé]. Traduction matricielle de la transformation d'une matrice non nulle en une matrice de Jordan, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes [C14.110, énoncé]. Application du résultat précédent à la matrice  $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ .

**Q3** — Définition du noyau d'une matrice [C14.112, énoncé]. Structure du noyau d'une matrice [C14.113, énoncé et démonstration].

**Q4** — Propriété fondamental du noyau d'une matrice [C14.114, énoncé et démonstration].

**Q5** — Inversibilité, inverse éventuelle et nombre de pivots après application de l'algorithme du pivot de Gauß [C14.115, énoncé intégral et démonstration de 1]).

- Q6** — Critère d'inversibilité d'une matrice via son noyau [C14.118, énoncé et démonstration].
- Q7** — Inversibilité à gauche, inversibilité à droite et inversibilité pour une matrice [C14.119, énoncé et démonstration].
- Q8** — Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , inversibilité et inverse éventuelle de  $A$  en fonction des systèmes linéaires à paramètre  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$$(S_Y) \quad AX = Y$$

d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  [C14.120, énoncé et démonstration].

- Q9** — Inversibilité et inverse éventuelle d'une matrice triangulaire [C14.121, énoncé intégral et démonstration à l'aide de systèmes linéaires].

Pour toutes les questions suivantes, des schémas illustrant le contexte devront être esquissés.

- Q10** — Limite finie en  $+\infty$  d'une fonction, Limite  $+\infty$  en  $+\infty$  d'une fonction, Limite  $-\infty$  en  $+\infty$  d'une fonction [C15.3, C15.5, C15.7, trois énoncés dans le même contexte].  $x^2 - x + \sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  [C15.6, démonstration en revenant à la définition].
- Q11** — Limite finie en  $-\infty$  d'une fonction, Limite  $+\infty$  en  $-\infty$  d'une fonction, Limite  $-\infty$  en  $-\infty$  d'une fonction [C15.9, C15.11, C15.13, trois énoncés dans le même contexte].  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$  [C15.12, démonstration en revenant à la définition].
- Q12** — Limite finie en un point réel d'une fonction, Limite  $+\infty$  en un point réel d'une fonction, Limite  $-\infty$  en un point réel d'une fonction [C15.15, C15.17, C15.19, trois énoncés dans le même contexte].  $\frac{x+1}{x^2-4} \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} +\infty$  [C15.17, démonstration en revenant à la définition].
- Q13** — Unicité de la limite [C15.21, énoncé et démonstration dans le cas  $b_1, b_2$  réels]. Fonction définie en  $a$  et possédant une limite en  $a$  [C15.23, énoncé et démonstration].
- Q14** — Définition d'une propriété vraie au voisinage d'un point de  $\overline{\mathbb{R}}$  [C15.24, énoncé]. Admettre une limite finie vs. être localement bornée [C15.28, énoncé et démonstration].
- Q15** — Caractérisation séquentielle de la limite [C15.30, énoncé et démonstration].
- Q16** — Composition de la limite [C15.33, énoncé intégral et preuve pour  $a = +\infty$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et  $c = -\infty$ ].
- Q17** — Passage à la limite dans une inégalité large [C15.37, énoncé]. Existence d'une limite finie par encadrement [C15.39, énoncé et démonstration en choisissant pour  $a$  une des extrémités de  $I$ ].
- Q18** — Critère pour avoir la limite  $+\infty$  par minoration [C15.41, énoncé et démonstration]. Critère pour avoir la limite  $-\infty$  par majoration [C15.43, énoncé].
- Q19** — Théorème de la limite monotone pour les fonctions [C15.44, énoncé intégral et démonstration dans la cas décroissant pour la borne gauche de l'intervalle].
- Q20** — Quelques outils pour étudier la limite d'une fonction [Partie 2 page 16, énoncé].

## § 4 APRÈS LA COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examineur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.