

PROGRAMME DE COLLE

STRUCTURES ALGÈBRIQUES USUELLES

CALCUL MATRICIEL ET SYSTÈMES LINÉAIRES

§ 1 DÉROULEMENT DE LA COLLE

La colle comporte deux phases.

- (1) Rédaction d'une question de cours (**8 points • 20 minutes maximum**) : la colle débute par une des questions de cours listées dessous.
- (2) Résolution d'exercices proposés par l'examineur (**12 points**) : la colle se poursuit avec des exercices que vous ne connaissez pas à l'avance et que vous résoudrez au tableau, sans temps de préparation sur feuille.

§ 2 PROGRAMME

Chapitre 13 • Structures algébriques usuelles [PDF]

- Loi de composition interne
- Groupes
- Sous-groupes
- Morphismes de groupes
- Anneaux et corps

Chapitre 14 • Calcul matriciel et systèmes linéaires [PDF]

- Opérations sur les matrices
- Opérations élémentaires
- Systèmes linéaires
- Anneau des matrices carrées

§ 3 À VENIR

Chapitre 15 • Limites, continuité, dérivabilité et convexité

§ 4 QUESTIONS DE COURS

Q1 — Définition d'une loi de composition associative [C13.5, énoncé]. Définition d'une loi de composition commutative [C13.10, énoncé]. Définition de l'existence d'un élément neutre pour une loi de composition interne [C13.15, énoncé]. De l'unicité de l'élément neutre [C13.10, énoncé et démonstration].

Q2 — Définition d'un élément inversible [C13.21, énoncé]. De l'unicité d'un inverse d'un élément inversible [C13.23, énoncé et démonstration]. Propriétés des éléments inversibles [C13.32, énoncé et démonstration].

- Q3** — Définition d'un groupe [C13.44, énoncé]. Groupe des permutations d'un ensemble [C13.54, énoncé]. Table du groupe (S_3, \circ) [C13.58, description de S_3 puis calcul de la table].
- Q4** — Définition d'un sous-groupe [C13.63, énoncé]. Caractérisation des sous-groupes [C13.69, énoncé et démonstration].
- Q5** — Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ [C13.71, démonstration]. Si H est un sous-groupe non trivial de $(\mathbb{Z}, +)$ alors il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $H = a\mathbb{Z}$ [C13.72, démonstration].
- Q6** — Intersection d'une famille de sous-groupes [C13.75, énoncé démonstration]. CNS pour que la réunion de deux sous-groupes soit un sous-groupe [C13.76, énoncé démonstration].
- Q7** — Définition d'un morphisme de groupes [C13.77, énoncé]. Propriété d'un morphisme de groupes [C13.83, énoncé démonstration].
- Q8** — Image et image réciproque d'un sous-groupe [C13.88, énoncé démonstration].
- Q9** — Noyau et image d'un morphisme de groupes [C13.89, énoncé]. Critère d'injectivité pour un morphisme de groupes [C13.92, énoncé et démonstration].
- Q10** — Définition d'un isomorphisme de groupes [C13.93, énoncé]. Application réciproque d'un isomorphisme de groupes [C13.98, énoncé et démonstration].
- Q11** — Distributivité d'un loi de composition interne par rapport à une autre [C13.99, énoncé]. Définition d'un anneau [C13.100, énoncé]. Multiplication par 0 et par -1 dans un anneau [C13.102, énoncé et démonstration].
- Q12** — Une formule de factorisation dans un anneau [C13.104, énoncé et démonstration]. Formule du binôme de Newton dans un anneau [C13.105, énoncé].
- Q13** — Définition d'un élément inversible (ou d'une unité) dans un anneau [C13.106, énoncé]. Le groupe des unités d'un anneau [C13.108, énoncé et démonstration].
- Q14** — Définition d'un anneau intègre [C13.110, énoncé]. Simplification dans un anneau intègre [C13.112, énoncé et démonstration]. Intégrité d'un corps [C13.119, énoncé et démonstration].
- Q15** — Définition d'un sous-anneau [C13.114, énoncé]. Définition d'un corps [C13.114, énoncé]. $\mathbb{Q}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$ qui est un corps [C13.114, démonstration].
- Q16** — Définition d'un morphisme d'anneaux [C13.118, énoncé]. Morphismes d'anneaux de $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ dans lui-même.
- Q17** — Définition d'une combinaison linéaire d'une famille finie de matrices [C14.11, énoncé]. Structure de l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de matrices [C14.13, énoncé et démonstration].
- Q18** — Définition d'une matrice élémentaire [C14.15, énoncé]. Définition du produit matriciel [C14.20, énoncé]. Produit de deux matrices élémentaires [C14.25, énoncé et démonstration].
- Q19** — Définition du produit matriciel [C14.20, énoncé]. Propriétés du produit matriciel [C14.25, énoncé formel intégral et démonstration de l'associativité].
- Q20** — Décomposition canonique d'une matrice [C14.17, énoncé]. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires deux-à-deux distincts, alors une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si et seulement si $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ [C14.27, démonstration].

Q21 — Définition du produit matriciel [C14.20, énoncé]. Pierre angulaire du cours : produit par une matrice élémentaire à droite [C14.28, énoncé et démonstration].

Q22 — Produit par un vecteur colonne [C14.32, énoncé et démonstration]. Produit de deux matrices diagonales [C14.83, énoncé et démonstration].

Q23 — Définition de la transposée d'une matrice [C14.34, énoncé]. Propriétés de la transposition [C14.37, énoncé intégral et démonstration de la propriété pour le produit].

Q24 — Définition d'une matrice de transposition [C14.39, énoncé]. Multiplication par une matrice de transposition [C14.41, énoncé et démonstration].

Q25 — Définition d'une matrice de dilatation [C14.44, énoncé]. Multiplication par une matrice de dilatation [C14.46, énoncé et démonstration].

Q26 — Définition d'une matrice de transvection [C14.49, énoncé]. Multiplication par une matrice de transvection [C14.51, énoncé et démonstration].

Q27 — Critère pour qu'un système linéaire soit compatible [C14.58, énoncé et démonstration]. Structure de l'ensemble solution d'un système linéaire [C14.60, énoncé et démonstration].

Q28 — Définitions d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique [C14.67, énoncé]. Stabilité de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ par combinaison linéaire [C14.71, énoncé intégral et démonstration pour $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$]. Si $n \geq 2$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas stables par produit [C14.72, contre-exemples].

Q29 — Formule du binôme de Newton dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ [C14.75, énoncé]. Calcul des puissances de $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
 puis de $A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ [C14.76, variante].

Q30 — Définitions d'une matrice diagonale et d'une matrice triangulaire supérieure [C14.78, énoncé]. Structure de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ [C14.85, énoncé]. Structure de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ [C14.87, énoncé et preuve].

Q31 — Définition d'une matrice inversible [C14.90, énoncé]. Inversibilité et inverse de $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant l'algorithme du pivot de Gauß sur une matrice augmentée et en expliquant le résultat à l'aide de matrices de transposition/dilatation/transvection [C14.91, variante].

Q32 — CNS pour qu'une matrice diagonale soit inversible [C14.92, énoncé et preuve]. Inversibilité et transposition [C14.97, énoncé et preuve].

§ 5 APRÈS LA COLLE

Vous repartirez avec les énoncés des exercices que vous a proposés l'examineur. Vous collerez cet énoncé sur une feuille simple et vous en rédigerez une solution soignée que vous me remettrez sans faute à la fin du TD du lundi suivant votre colle.