Méthodes de primitivation

§ 1 Reconnaissance d'une dérivée usuelle à une constante multiplicative près

Fonction	Une primitive	Intervalle de validité
$x \longmapsto a \qquad (a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n \qquad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$ $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n \leqslant -2$
$x \longmapsto x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(\|x\|)$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$x \longmapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
$x \longmapsto e^{\lambda x} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}^*)$	$x \longmapsto \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \ln(x)$	$x \longmapsto x\ln(x) - x$	$]0, +\infty[$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$x \longmapsto \tan(x)$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (par exemple)
$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$	$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$	$x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$	$x \longmapsto \mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \longmapsto \arcsin(x)$	$]-1, 1[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \longmapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$

§ 2 Reconnaissance d'une dérivée de composée

Soient $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I et $u\colon J \longrightarrow I$ est une fonction dérivable sur J, alors :

$$\boxed{x \longmapsto f(u(x)) \text{ est une primitive de } x \longmapsto u'(x) \times f'(u(x)) \text{ sur } J.}$$

La reconnaissance d'une dérivée de composée est un outil puissant dans le calcul de primitives. En voici quelques exemple ci-dessous.

$$\begin{array}{c} u' \times u^{\alpha} \\ \alpha \neq -1 \end{array} \xrightarrow{\text{une primitive}} \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad u' \times u \xrightarrow{\text{une primitive}} \frac{u^2}{2} \qquad \frac{u'}{\sqrt{u}} \xrightarrow{\text{une primitive}} 2\sqrt{u}$$

$$u' \times \sqrt{u} \xrightarrow{\text{une primitive}} \frac{2}{3}u^{3/2} \qquad \frac{u'}{u^2} \xrightarrow{\text{une primitive}} \frac{-1}{u} \qquad \frac{u'}{u} \xrightarrow{\text{une primitive}} \ln(|u|)$$

$$u' \times e^{u} \xrightarrow{\text{une primitive}} e^{u} \qquad u' \times \mathrm{ch}(u) \xrightarrow{\text{une primitive}} \mathrm{sh}(u) \qquad u' \times \mathrm{sh}(u) \xrightarrow{\text{une primitive}} \mathrm{ch}(u)$$

$$\frac{u'}{\mathrm{ch}^2(u)} \xrightarrow{\text{une primitive}} \mathrm{th}(u) \qquad u' \times \left(1-\mathrm{th}^2(u)\right) \xrightarrow{\text{une primitive}} \mathrm{th}(u) \qquad u' \times \cos(u) \xrightarrow{\text{une primitive}} \sin(u)$$

$$u' \times \sin(u) \xrightarrow{\text{une primitive}} -\cos(u) \qquad \frac{u'}{\cos^2(u)} \xrightarrow{\text{une primitive}} \tan(u) \qquad u' \times \left(1+\tan^2(u)\right) \xrightarrow{\text{une primitive}} \tan(u)$$

$$\frac{u'}{1+u^2} \xrightarrow{\text{une primitive}} \mathrm{Arctan}(u) \qquad \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \xrightarrow{\text{une primitive}} \mathrm{Arcsin}(u)$$

§ 3 Primitivation d'un cosinus-exponentielle ou sinus-exponentielle

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour calculer une primitive de :

$$\boxed{f\colon x \longmapsto e^{ax}\cos(bx) \qquad \text{et} \qquad g\colon x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)}$$

on peut passer au champ complexe. Comme une primitive de la fonction $h\colon x \longmapsto e^{(a+ib)x}$ est :

$$H\colon x \longmapsto \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} = \underbrace{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}}_{\in\mathbb{R}} \times (a-ib) \times (\cos(bx) + i\sin(bx))$$

des primitives de f et g sont données par :

$$\boxed{F\colon x \longmapsto \mathrm{Re}\,(H(x)) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right) \qquad \text{et} \qquad G\colon x \longmapsto \mathrm{Im}\,(H(x)) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}\right).}$$

§ 4 Primitivation d'un inverse d'un polynôme du second degré

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $P := aX^2 + bX + c$, et $\Delta := b^2 - 4ac$. On peut déterminer une primitive la fonction :

$$\boxed{f\colon x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}}$$

à l'aide de la forme canonique de P :

$$P = a\left(\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right).$$

Une primitive de f est :

$$\boxed{F : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{x_1 - x_2} \times \ln\left(\left|\dfrac{x - x_1}{x - x_2}\right|\right) & \text{si } \Delta > 0 \text{ et } \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(P) = \{x_1, x_2\} \\ -\dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{x - x_0} & \text{si } \Delta = 0 \text{ et } \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(P) = \{x_0\} \\ \dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}} \times \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}\right) & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}}$$

§ 5 Polynômes trigonométriques

(A) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Pour primitiver la fonction :

$$\boxed{f : x \longmapsto \cos^p(x) \sin^q(x)}$$

il convient d'abord d'analyser les exposants de p et q.

(1) Cas où $p = 0$ ou $q = 0$ Alors $f = \cos^p$ ou $f = \sin^q$. Dans ce cas on linéarise l'expression $f(x)$ à l'aide des formules d'Euler :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

et de la formule du binôme de Newton :

$$\forall (n, a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(2) Cas où p et q sont pairs Alors au moyen de la relation de Pythagore :

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

et de la formule du binôme de Newton, on se ramène à primitiver une combinaison linéaire de puissances de cos ou de puissances de sin. On suit alors la démarche exposée en (1).

(3) Cas (le plus simple) où p ou q est pair Avec la relation de Pythagore et la formule du binôme de Newton, on se ramène à primitiver une combinaison linéaire de fonctions de la forme :

$$\cos \times \sin^r \text{ ou } \sin \times \cos^r \qquad (r \in \mathbb{N})$$

ce qui est aisé puisque nous savons primitiver sans peine $u' \times u^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

(B) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Pour primitiver une des fonctions :

$$\boxed{x \longmapsto \cos(px)\sin(qx) \qquad x \longmapsto \cos(px)\cos(qx) \qquad x \longmapsto \sin(px)\sin(qx)}$$

on linéarise grâce aux formule de trigonométrie :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \qquad \sin(a)\sin(b) = \frac{-\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \qquad \sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$

valables pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, qui se déduisent toutes des formules d'addition pour cos et sin.

§ 6 Primitivation à l'aide du théorème fondamental de l'analyse

Pour primitiver une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème fondamental de l'analyse qui stipule que la fonction :

$$F : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur I (x_0 est un point de I préalablement fixé). On peut alors tenter de calculer les intégrales $F(x)$ avec des intégrations par parties, des changements de variables tels les classiques suivants.

$t = au + b$ (a, b réels) $\qquad t = 1/u \qquad t = u^2 \qquad t = \sqrt{u} \qquad t = \ln(u) \qquad t = e^u \qquad t = \tan(u/2)$.