Formulaire de dérivation

§ 1 Dérivabilité et dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Nombre dérivé $f'(x)$ de f en $x \in \mathscr{D}'_f$	$\mathscr{D}'_f$
$f\colon x \longmapsto a \qquad (a \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f\colon x \longmapsto x^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$
$f\colon x \longmapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)} \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_{>0}$
$f\colon x \longmapsto \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_{>0}$
$f\colon x \longmapsto \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_{>0}$
$f\colon x \longmapsto e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f\colon x \longmapsto \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f\colon x \longmapsto \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f\colon x \longmapsto \tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$f\colon x \longmapsto \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$f'(x) = \mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$f\colon x \longmapsto \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$f'(x) = \mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$f\colon x \longmapsto \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$	$\mathbb{R}$
Arcsin	$\mathrm{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
Arccos	$\mathrm{Arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
Arctan	$\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

§ 2 Opérations sur les fonctions dérivables

Les lettres I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

Nombre dérivé en $x \in I$	Contexte et hypothèse
$(ku)'(x) = k\,u'(x)$	$u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I
$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$	$u, v\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur I
$(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	$u, v\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur I
$\left(\dfrac{1}{u}\right)'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^*$ dérivable sur I
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $v\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^*$ dérivables sur I
$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$	$u\colon I \longrightarrow J$ dérivable sur I, $v\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur J

§ 3 Cas particuliers de la dérivation d'une composée

Les lettres I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$

Nombre dérivé en $x \in I$	Contexte et hypothèse
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(ax+b)) = a \times u'(ax+b) \qquad ((a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})$	$x \in I \longmapsto ax+b \in J$, $u\colon J \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ dérivable sur I
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u^\alpha(x)) = \alpha \times u'(x) \times u^{\alpha-1}(x) \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$	$u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ dérivable sur I
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{u(x)}\right) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ dérivable sur I
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(u(x))) = u'(x) \times \cos(u(x))$	$u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(u(x))) = -u'(x) \times \sin(u(x))$	$u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{u(x)}\right) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(u(x))) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ dérivable sur I
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{Arcsin}(u(x))) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$	$u\colon I \longrightarrow]-1,1[$ dérivable sur I
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{Arctan}(u(x))) = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I