Fiche de révisions n°3

Inégalités, racine carrée et valeur absolue

Ce texte traite des thèmes suivants.

1. Compatibilité de la relation d'ordre $\leqslant$ avec $+$ et $\times$ dans $\mathbb{R}$
2. Signe du carré d'un nombre réel
3. Racine carrée et valeur absolue

Pour étudier ce document, vous suivrez strictement les deux consignes suivantes, qui figurent en en-tête de sujets de compositions écrites de Mathématiques de concours aux Grandes Écoles.

(a) *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

(b) *Les calculatrices sont interdites.*

Pour respecter la consigne (a), vous structurerez toutes nos démonstrations et justifierez avec soin toutes nos assertions. Quant à l'injonction (b), elle est claire : il faut effectuer tous les calculs demandés sans l'aide de machine.

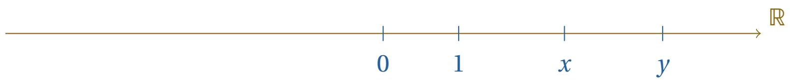
Les exercices proposés comportent des indications et des corrigés détaillés. Les portions de texte **Énoncé**, **Indication(s)** et **Un corrigé** sont cliquables, afin de naviguer aisément dans le document lors de l'étude d'un exercice.

Les références F3.?. à des énoncés de cette fiche sont également cliquables.

§ 1 Compatibilité de la relation d'ordre $\leqslant$ avec $+$ et $\times$ dans $\mathbb{R}$

F3.1. Relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ L'ensemble des nombres réels est représenté par une droite graduée et orientée.

Si x et y sont des réels, alors $x \leqslant y$ si x est situé à gauche de y sur la droite représentant l'ensemble $\mathbb{R}$.



F3.2. Propriétés fondamentales de la relation d'ordre $\leqslant$ avec les opérations sur $\mathbb{R}$ Les trois propriétés suivantes constituent la pierre angulaire de cette partie.

1. *Compatibilité de $\leqslant$ avec l'addition.* Nous pouvons additionner membre-à-membre des inégalités.

   Si a, b, c, d sont des réels tels que $\left\{\begin{array}{ccc} a & \leqslant & b \\ c & \leqslant & d \end{array}\right.$ alors $a + c \leqslant b + d$.

2. *Compatibilité de $\leqslant$ avec la multiplication par un réel positif ou nul.* Nous pouvons multiplier une inégalité par un réel positif ou nul, sans renverser le sens de l'inégalité.

   Si a, b, c sont des réels tels que $\left\{\begin{array}{ccc} a & \leqslant & b \\ c & \geqslant & 0 \end{array}\right.$ alors $ac \leqslant bc$.

3. *Compatibilité de $\leqslant$ avec la multiplication par un réel négatif ou nul.* Nous pouvons multiplier une inégalité par un réel négatif ou nul, mais alors le sens de l'inégalité est inversé.

   Si a, b, c sont des réels tels que $\left\{\begin{array}{ccc} a & \leqslant & b \\ c & \leqslant & 0 \end{array}\right.$ alors $ac \geqslant bc$.

F3.3. SIGNE DU PRODUIT DE DEUX NOMBRES Soient a et b des réels.

1. Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors $ab \geqslant 0$.
2. Si $a \geqslant 0$ et $b \leqslant 0$, alors $ab \leqslant 0$.
3. Si $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$, alors $ab \geqslant 0$.

Démonstration

Ces trois propriétés se déduisent de F3.2.

1. Supposons $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$. En multipliant chacun des membres de l'inégalité $0 \leqslant a$ par le nombre $b \geqslant 0$, nous obtenons :
$$0 = 0 \times b \leqslant ab\,.$$
2. Supposons $a \geqslant 0$ et $b \leqslant 0$. En multipliant chacun des membres de l'inégalité $0 \leqslant a$ par le nombre $b \leqslant 0$, nous obtenons :
$$0 = 0 \times b \geqslant ab\,.$$
3. Supposons $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$. En multipliant chacun des membres de l'inégalité $a \leqslant 0$ par le nombre $b \leqslant 0$, nous obtenons :
$$ab \geqslant 0 \times b = 0\,.$$

Q.E.D.

F3.4. SIGNE D'UN INVERSE Soit x un réel non nul.

1. Si $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$.
2. Si $x < 0$, alors $\frac{1}{x} < 0$.

Démonstration

1. Soit $x > 0$. Démontrons $\frac{1}{x} > 0$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc $\frac{1}{x} \leqslant 0$. D'après F3.3 :
$$1 = x \times \frac{1}{x} \leqslant 0$$
ce qui n'est pas.
2. Soit $x < 0$. Démontrons $\frac{1}{x} < 0$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc $\frac{1}{x} \geqslant 0$. D'après F3.3 :
$$1 = x \times \frac{1}{x} \leqslant 0$$
ce qui n'est pas.

Q.E.D.

F3.5. SIGNE D'UN QUOTIENT Soient a un réel et b un réel non nul.

1. Si $a \geqslant 0$ et $b > 0$, alors $\frac{a}{b} \geqslant 0$.
2. Si $a \geqslant 0$ et $b < 0$, alors $\frac{a}{b} \leqslant 0$.
3. Si $a \leqslant 0$ et $b > 0$, alors $\frac{a}{b} \leqslant 0$.
4. Si $a \leqslant 0$ et $b < 0$, alors $\frac{a}{b} \geqslant 0$.

Démonstration

Ces quatre propriétés se déduisent de F3.3 et F3.4, en remarquant que :
$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}\,.$$

Q.E.D.

F3.6. Sens de variation de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ La fontion f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

est décroissante sur $]0,+\infty[$, i.e. :

$$\boxed{\text{Pour tout } x>0, \text{ pour tout } y>0 \text{ tels que } x \leqslant y,\ \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}.}$$

Démonstration

Soient deux réels $x>0$ et $y>0$ tels que $x \leqslant y$.

- Nous calculons :
$$(\star) \qquad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy} = (y-x) \times \frac{1}{xy}.$$
- En ajoutant $-x$ à chacun des membres de l'inégalité $x \leqslant y$, il vient :
$$(\star\star) \qquad 0 \leqslant y-x.$$
- Comme $x>0$ et $y>0$, $xy>0$ et donc :
$$(\star\star\star) \qquad \frac{1}{xy} \geqslant 0.$$
- De $(\star)$, $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$, nous déduisons :
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geqslant 0.$$
En ajoutant $\dfrac{1}{y}$ à chacun des membres de cette dernière inégalité, il vient :
$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}.$$

Q.E.D.

F3.7. Exercice ★☆☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé** Soit f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x-7. \end{array} \right.$$

1. Soient x et y des nombres réels tels que $x \leqslant y$. Démontrer que :
$$f(x) \leqslant f(y)$$
à l'aide de F3.2, F3.3, F3.4 et F3.5. La rédaction devra mettre en évidence les applications de ces propriétés.
2. Quelle propriété de la fonction f a-t-on établi en 1 ?

F3.8. Exercice ★☆☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé** Soit g la fonction définie par :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \left]\dfrac{1}{5},+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{5x-1}. \end{array} \right.$$

1. Soient x et y des nombres réels tels que $\dfrac{1}{5} < x \leqslant y$. Démontrer que :
$$g(x) \geqslant g(y)$$
à l'aide de F3.2, F3.3, F3.4 et F3.5. La rédaction devra mettre en évidence les applications de ces propriétés.
2. Quelle propriété de la fonction g a-t-on établi en 1 ?

§ 2 Signe du carré d'un nombre réel

F3.9. Un carré de nombre réel est positif ou nul

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad x^2 \geqslant 0.}$$

Démonstration

Nous raisonnons par disjonction de cas, suivant le signe de x.
- *Cas où* $x \geqslant 0$ D'après la propriété 1 de F3.3, $x^2 \geqslant 0$.
- *Cas où* $x \leqslant 0$ D'après la propriété 3 de F3.3, $x^2 \geqslant 0$.

Q.E.D.

F3.10. Exercice ★★☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé** Soit $x > -1$. Démontrer que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \qquad (1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

Cette inégalité est appelée *inégalité de Bernoulli*.

F3.11. Exercice ★★☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé**

1. Soient a et b des réels. Démontrer :
$$2\,a\,b \leqslant a^2 + b^2\,.$$
2. Soit $x > 0$. Démontrer :
$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2\,.$$
3. Soient a et b des réels non nuls. Démontrer :
$$\frac{a^6}{b^6} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^6}{a^6} \geqslant 6\,.$$

§ 3 Racine carrée et valeur absolue

F3.12. Définition (racine carrée d'un nombre réel positif ou nul) Soit x un nombre réel tel que $x \geqslant 0$. La valeur absolue de x, notée $\sqrt{x}$, est définie par :

$$\boxed{\sqrt{x} \text{ est l'unique nombre réel positif ou nul dont le carré est } x.}$$

F3.13. Exemple $\sqrt{289} = 17$ car $17 \geqslant 0$ et $17^2 = 289$.

F3.14. Propriété (multiplicativité de la racine carrée) Pour tout $a \geqslant 0$ et pour tout $b \geqslant 0$:

$$\boxed{\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}.}$$

Démonstration

- Rappelons que $\sqrt{ab}$ est l'unique réel positif ou nul dont le carré est ab.
- Comme $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{b} \geqslant 0$, $\sqrt{a}\,\sqrt{b} \geqslant 0$ d'après F3.3.
- Nous calculons :
$$\left(\sqrt{a}\,\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2\,\sqrt{b}^2 = ab\,.$$
- Des deux points précédent, nous déduisons que $\sqrt{a}\,\sqrt{b}$ est un réel positif ou nul dont le carré est ab. Par unicité, $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Q.E.D.

F3.15. Attention (la racine carrée n'est pas additive) Il n'est pas vrai que $\sqrt{a+b}$ égale $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ quels que soient les réels positifs ou nuls a et b. Nous aurons par exemple en tête le contre-exemple suivant.

$$7 = \sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\,.$$

F3.16. Fonction racine carrée

Soit $\sqrt{\cdot}$ la fonction (appelée fonction racine carrée) définie par :

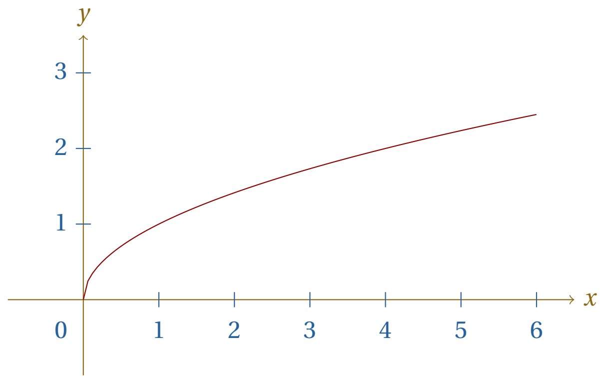
$$\sqrt{\cdot}\ \left|\ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x}\,. \end{array}\right.$$

La fonction $\sqrt{\cdot}$ est :

(a) positive ou nulle sur $\mathbb{R}$;

(b) croissante sur $[0,+\infty[$.

Ci-contre est tracé le graphe de la fonction racine carrée.



F3.17. Exercice ★☆☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé** Démontrer que la fonction $\sqrt{\cdot}$ est croissante sur $[0,+\infty[$, i.e. que :

$$\text{pour tout couple de réels } (x,y) \text{ tels que } 0 \leqslant x < y, \qquad \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}.$$

F3.18. Définition (valeur absolue d'un nombre réel) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue de x, notée $|x|$ par :

$$|x| = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0\,. \end{array}\right.$$

F3.19. Exemple La valeur absolue de -17 est 17 (car $-17 \leqslant 0$ et $-(-17) = 17$) et la valeur abolue de 225 est 225 (car $225 \geqslant 0$).

F3.20. Signe d'une valeur absolue Il résulte de la définition F3.18 que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$.

F3.21. Fonction valeur absolue

Soit $|\cdot|$ la fonction (appelée fonction valeur absolue) définie par :

$$|\cdot|\ \left|\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x|\,. \end{array}\right.$$

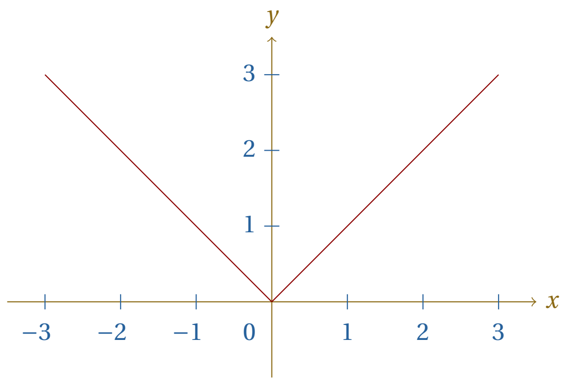
La fonction $|\cdot|$ est :

(a) positive ou nulle sur $\mathbb{R}$;

(b) décroissante sur $]-\infty,0]$;

(c) croissante sur $[0,+\infty[$.

Ci-contre est tracé le graphe de la fonction valeur absolue.



F3.22. Proposition (autre expression de la valeur absolue) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{|x| = \sqrt{x^2}}$$

Démonstration

Nous rappelons que $\sqrt{x^2}$ est l'unique réel positif ou nul dont le carré est x^2. Nous raisonnons par disjonction de cas, suivant le signe de x.

- *Cas où $x \geqslant 0$* On observe que $x \geqslant 0$ et que son carré est x^2. Ainsi $\sqrt{x^2} = x$. Or $x = |x|$, puisque $x \geqslant 0$. Nous avons établi que $|x| = \sqrt{x^2}$.
- *Cas où $x < 0$* On observe que $-x \geqslant 0$ et que son carré est x^2. Ainsi $\sqrt{x^2} = -x$. Or $-x = |x|$, puisque $x < 0$. Nous avons établi que $|x| = \sqrt{x^2}$.

Q.E.D.

F3.23. PROPOSITION (MULTIPLICATIVITÉ DE LA VALEUR ABSOLUE) Soient x et y des nombres réels.

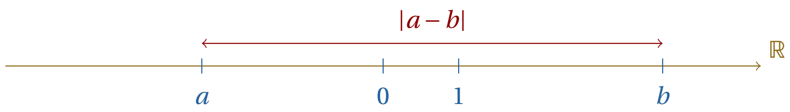
$$\boxed{|xy| = |x|\,|y|}$$

Démonstration

Nous calculons :

$$|xy| \underset{\text{F3.22}}{=} \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} \underset{\text{F3.14}}{=} \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} \underset{\text{F3.22}}{=} |x|\,|y|\,.$$

F3.24. DISTANCE ENTRE DEUX RÉELS La distance entre deux réels a et b est $|a-b|$, quel que soit l'ordre entre a et b.



Cette interprétation géométrique de la valeur absolue jouera un grand rôle dans le cours d'analyse de MP2I.

F3.25. EXERCICE ★★☆☆☆ **INDICATION(S)** **UN CORRIGÉ**

1. Soit x un nombre réel et ε un nombre réel strictement positif.
   (a) On suppose que $|x| \leqslant \varepsilon$. Démontrer que $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.
   (b) On suppose que $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$. Démontrer que $|x| \leqslant \varepsilon$.
   (c) Comment exprimer les deux résultats établis en 1.(a) et 1.(b) à l'aide de la locution « si et seulement si ».
2. Résoudre l'inéquation :
$$|3x-7| \leqslant 5$$
   d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

F3.26. EXERCICE ★★★★☆ **INDICATION(S)** **UN CORRIGÉ** Soient a et b des nombres réels.

1. Démontrer :
$$|a+b| \leqslant |a| + |b|\,.$$
   Cette propriété est appelée *première inégalité triangulaire*.
2. En déduire :
$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a+b|\,.$$
   Cette propriété est appelée *deuxième inégalité triangulaire*.

F3.27. EXERCICE ★★★★★ **INDICATION(S)** **UN CORRIGÉ** Soit f la fonction définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-1| + |x| + |2x+1|\,. \end{array} \right.$$

1. Déterminer trois réels $-\frac{3}{2} < a < b < c < \frac{3}{2}$ tels que la fonction f est affine sur chacun des quatre intervalles :
$$\left[-\frac{3}{2}, a\right] \quad ; \quad [a,b] \quad ; \quad [b,c] \quad ; \quad \left[c, \frac{3}{2}\right].$$
2. Tracer la représentation graphique de la fonction f.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F3.7. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

1. Étudier le signe de la différence $f(y) - f(x)$ en factorisant la quantité $f(y) - f(x)$ par $y - x$.
2. Penser au sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Q.E.D.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F3.8. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

1. Étudier le signe de la différence $g(y)-g(x)$ en factorisant la quantité $g(y)-g(x)$ par $y-x$.
2. Penser au sens de variation de la fonction g sur $\left]\frac{1}{5},+\infty\right[$.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F3.10. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

Raisonner par récurrence.

- Poser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{P}(n)\ :\ (1+x)^n \geqslant 1+nx\,.$$

- Vérifier que l'assertion $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- Pour l'hérédité, fixer un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, i.e. tel que :

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx\,.$$

  Multiplier chacun des membres de l'inégalité précédente par $1+x$, après avoir discuté le signe de $1+x$ ...

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F3.11. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

1. Étudier le signe de la différence Étudier le signe de la différence $a^2 + b^2 - 2ab$.
2. Appliquer l'inégalité obtenue en 1 en assignant à a et b des valeurs bien choisies.
3. Poser :

$$A = \frac{a^6}{b^6} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^6}{a^6}.$$

   et observer que A peut se réécrire sous la forme :

$$A = \frac{a^6}{b^6} + \frac{b^6}{a^6} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}.$$

   Appliquer alors trois fois l'inégalité obtenue en 2, en assignant à x trois valeurs bien choisies.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F3.17. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

Soient x et y des réels tels que $0 \leqslant x < y$.

- Justifier que la quantité conjuguée $\sqrt{y} + \sqrt{x}$ est strictement positive et donc non nulle.
- Étudier le signe de la différence $\sqrt{y} - \sqrt{x}$ en multipliant « haut et bas » par la quantité conjuguée $\sqrt{y} + \sqrt{x} \neq 0$ de $\sqrt{y} - \sqrt{x}$.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F3.25. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

1. (a) Raisonner par disjonction de cas, suivant le signe de x.
   (b) Raisonner de nouveau par disjonction de cas, suivant le signe de x.
   (c) En 1.(a), on a établi que si $|x| \leqslant \varepsilon$ alors $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$. En 1.(b), on a démontré que si $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$ alors $|x| \leqslant \varepsilon$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Le point de départ est livré par 1.c :
   $$|3x-7| \leqslant 5 \text{ si et seulement si } -5 \leqslant 3x-7 \leqslant 5\,.$$
   - Déterminer alors deux réels a et b tels que :
   $$-5 \leqslant 3x-7 \leqslant 5 \text{ si et seulement si } a \leqslant x \leqslant b$$
   en justifiant soigneusement l'équivalence.
   - Assembler les résultats des deux points précédents pour écrire l'ensemble solution de de l'inéquation $|3x-7| \leqslant 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F3.26. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

1. - L'observation clé est : $\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$.
   - Développer $(a+b)^2$.
   - Construire une inégalité du type :

   $$(a+b)^2 \leqslant \text{« expression avec des termes mettant en jeu } |a| \text{ et } |b| \text{ »}$$

   et reconnaître une identité remarquable dans l'expression obtenue à droite...
2. - Appliquer la première inégalité triangulaire en spécialisant a à $a+b$ et b à $-b$:

   $$|(a+b)+(-b)| \leqslant \dots$$

   pour obtenir une majoration de la quantité $|a|-|b|$.
   - Faire de même pour obtenir une majoration de la quantité $|b|-|a|$.
   - Conclure alors en observant que le nombre $||a|-|b||$ égale $|a|-|b|$ ou $-(|a|-|b|)$ suivant le signe de $|a|-|b|$.

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F3.27. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

1. - Il faut simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, en découpant l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ en quatre sous-intervalles.
   - Pour ce faire, il nous faut chasser les valeurs absolues. Pour ôter les valeurs absolues de l'expression $|A|$, où $A \in \mathbb{R}$, il faut déterminer le signe de A. En effet, si $A \leqslant 0$ alors $|A| = -A$ et si $A \geqslant 0$ alors $|A| = A$.
   - Dresser un tableau de signes conjoints des expressions affines $x-1$, x et $2x+1$ pour $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$. On pourra compléter le tableau ci-dessous.

x	$-\frac{3}{2}$		?		?		?		$\frac{3}{2}$
Signe de $x-1$		?		?		$-$	0	?	
Expression de $\lvert x-1\rvert$		?		?		?		?	
Signe de x		?		?	0	?		?	
Expression de $\lvert x\rvert$		?		?		?		?	
Signe de $2x+1$		?	0	?		?		?	
Expression de $\lvert 2x+1\rvert$		?		?		?		?	
Expression de $f(x)$		?		?		?		?	

2. A l'issue de la question 1, des constantes réelles $-\frac{3}{2} < a < b < c < \frac{3}{2}$ et $\alpha_1, \alpha 2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ telles que :
   — pour tout $x \in \left[-\frac{3}{2}, a\right]$, $f(x) = \alpha_1 x + \beta_1$;
   — pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = \alpha_2 x + \beta_2$;
   — pour tout $x \in [b, c]$, $f(x) = \alpha_3 x + \beta_3$;
   — pour tout $x \in \left[c, \frac{3}{2}\right]$, $f(x) = \alpha_4 x + \beta_4$
   ont été déterminées. Grâce à ces résultats, on peut tracer quatre segments qui formeront la courbe représentative de f.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F3.7. ÉNONCÉ INDICATION(S)

1. Nous étudions le signe de la différence $f(y) - f(x)$.
   - Nous calculons :
   $$f(y) - f(x) = 3y - 7 - (3x - 7) = 3(y - x) .$$
   - En ajoutant $-x$ à chacun des membres de l'inégalité $x \leqslant y$, nous obtenons $y - x \geqslant 0$. Nous en déduisons que :
   $$(\star) \qquad \underbrace{f(y) - f(x)}_{3(y-x)} \geqslant 0 .$$
   - En ajoutant $f(x)$ à chacun des membres de l'inégalité $(\star)$, il vient :
   $$f(y) \geqslant f(x) .$$
2. Nous avons établi en 1 la croissance de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Analyse de cette solution

Pour démontrer une inégalité de la forme :
$$A \leqslant B$$
où A et B sont des nombres réels, on peut plutôt étudier le signe de la quantité :
$$B - A$$
en factorisant afin d'appliquer les propriétés F3.3, F3.4 et F3.5.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F3.8. ÉNONCÉ INDICATION(S)

1. Nous étudions le signe de la différence $g(y)-g(x)$.
   - Nous calculons :
$$\begin{aligned} g(y)-g(x) &= \frac{2y+1}{5y-1}-\frac{2x+1}{5x-1} \\ &= \frac{(2y+1)(5x-1)-(2x+1)(5y-1)}{(5y-1)(5x-1)} \\ &= \frac{10xy-2y+5x-1-(10xy-2x+5y-1)}{(5y-1)(5x-1)} \\ &= \frac{-7\,(y-x)}{(5y-1)(5x-1)}\,. \end{aligned}$$
   - En ajoutant $-x$ à chacun des membres de l'inégalité $x \leqslant y$, nous obtenons $y-x \geqslant 0$. Nous en déduisons que :
$$(\star) \qquad -7\,(y-x) \leqslant 0\,.$$
   - En multipliant chacun des membre de l'inégalité $x > \frac{1}{5}$ par $5>0$, nous obtenons :
$$5x > 1\,.$$
     En ajoutant -1 à chacun des membres de la précédente inégalité, il vient :
$$(\star\star) \qquad 5x-1 > 0\,.$$
   - De manière analogue, nous établissons :
$$(\star\star\star) \qquad 5y-1 > 0\,.$$
   - De $(\star)$, $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$ nous déduisons :
$$\underbrace{g(y)-g(x)}_{\frac{-7\,(y-x)}{(5y-1)(5x-1)}} \leqslant 0\,.$$
     En ajoutant $g(x)$ à chacun des membres de la précédente inégalité, il vient :
$$g(y) \leqslant g(x)\,.$$
2. Nous avons établi en 1 la décroissance de la fonction g sur $\left]\frac{1}{5},+\infty\right[$.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F3.10. ÉNONCÉ INDICATION(S)

Nous raisonnons par récurrence.

- *Définition du prédicat* Nous posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathscr{P}(n) \;:\; (1+x)^n \geqslant 1+nx\,.$$

- *Initialisation à $n=1$* Nous remarquons que :

$$(1+x)^1 = (1+x) = (1+1\times x)\,.$$

Puisque $(1+x)^1$ est égal à $(1+1\times x)$, on a *a fortiori* $(1+x)^1 \geqslant (1+1\times x)$. L'assertion $\mathscr{P}(1)$ est donc vraie.

- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, i.e. tel que $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.
  — En ajoutant 1 à chacun des membres de l'inégalité $x > -1$, il vient $1+x \geqslant 0$.
  — En multipliant chacun des membres de l'inégalité $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ par $1+x \geqslant 0$, nous obtenons :

$$(\star) \qquad (1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x) \geqslant (1+nx)\times(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2\,.$$

  — Comme $n \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 0$:

$$nx^2 \geqslant 0\,.$$

  En ajoutant $1+(n+1)x$ à chacun des membres de la précédente inégalité, il vient :

$$(\star\star) \qquad 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x\,.$$

  — De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons :

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x\,.$$

  L'assertion $\mathscr{P}(n+1)$ est donc établie.

Analyse de cette solution

Nous aurons toujours le soin de structurer nos raisonnements par récurrence en trois parties :
- *Définition du prédicat $\mathscr{P}(n)$* ;
- *Initialisation* ;
- *Hérédité.*

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F3.11. ÉNONCÉ INDICATION(S)

1. Nous étudions le signe de a^2+b^2-2ab.
   - Nous calculons, au moyen d'une identité remarquable :
   $$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\,.$$
   - Nous avons :
   $$(\star)\qquad \underbrace{a^2+b^2-2ab}_{(a-b)^2}\geqslant 0$$
   car le carré d'un nombre réel est positif ou nul.
   - En ajoutant $2ab$ à chacun des membres de $(\star)$, il vient :
   $$2\,a\,b\leqslant a^2+b^2\,.$$
2. En appliquant l'inégalité obtenue en 1 spécialisée à $a=\sqrt{x}$ et $b=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, nous obtenons :
$$2=2\times\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{x}}\leqslant\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\frac{1}{x}\,.$$
3. Posons :
$$A=\frac{a^6}{b^6}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^6}{a^6}\,.$$
   - En réorganisant les termes de la somme définissant A, nous obtenons :
   $$A=\underbrace{\frac{a^6}{b^6}+\frac{b^6}{a^6}}_{x_1+\frac{1}{x_1}}+\underbrace{\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}}_{x_2+\frac{1}{x_2}}+\underbrace{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}}_{x_3+\frac{1}{x_3}}\,.$$
   Posons :
   $$x_1=\frac{a^6}{b^6}=\left(\frac{a^3}{b^3}\right)^2>0\qquad;\qquad x_2=\frac{a^4}{b^4}=\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^2>0\qquad;\qquad x_3=\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2>0$$
   de sorte que :
   $$A=x_1+\frac{1}{x_1}+x_2+\frac{1}{x_2}+x_3+\frac{1}{x_3}\,.$$
   - D'après l'inégalité obtenue en 2 spécialisée à $x=x_1>0$, $x=x_2>0$ et $x=x_3>0$:
   $$x_1+\frac{1}{x_1}\geqslant 2\qquad;\qquad x_2+\frac{1}{x_2}\geqslant 2\qquad;\qquad x_3+\frac{1}{x_3}\geqslant 2\,.$$
   En ajoutant membre-à-membre ces trois inégalités, il vient :
   $$\underbrace{x_1+\frac{1}{x_1}+x_2+\frac{1}{x_2}+x_3+\frac{1}{x_3}}_{A}\geqslant 2+2+2=6$$

Analyse de cette solution

Nous avons :
- tout d'abord démontré la première inégalité ;
- puis en avons déduit la seconde par spécialisation ;
- avant d'établir la troisième à partir de la seconde, toujours par spécialisation.

Ce type de raisonnement « en cascade » est une stratégie à garder à l'esprit lorsqu'on résout une exercice comportant plusieurs questions ou un problème.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F3.17. ÉNONCÉ INDICATION(S)

Soient x et y des réels tels que $0 \leqslant x < y$. Nous étudions le signe de la différence $\sqrt{y} - \sqrt{x}$.

- Comme $\sqrt{x} \geqslant 0$ et $\sqrt{y} > 0$ (si $\sqrt{y} = 0$ alors $y = 0$ ce qui n'est pas), nous obtenons :

$$(\star) \qquad \sqrt{y} + \sqrt{x} > 0\,.$$

- En multipliant « haut et bas » par la quantité conjuguée $\sqrt{y} + \sqrt{x} \neq 0$ de $\sqrt{y} - \sqrt{x}$, il vient :

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{y} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{y} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}\,.$$

  En appliquant une identité remarquable :

$$(\star\star) \qquad \sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}\,.$$

- En ajoutant $-x$ à l'inégalité $x \leqslant y$, nous obtenons :

$$(\star\star\star) \qquad y - x \geqslant 0\,.$$

- De $(\star\star)$, $(\star)$ et $(\star\star\star)$, nous déduisons :

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} \geqslant 0\,.$$

  En ajoutant $\sqrt{x}$ à chacun des membres de cette dernière inégalité, il vient :

$$\sqrt{y} \geqslant \sqrt{x}\,.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F3.25. ÉNONCÉ INDICATION(S)

1. (a) Nous raisonnons par disjonction de cas, suivant le signe de x.
   - *Cas où* $x \geqslant 0$ Dans ce cas $|x| \leqslant \varepsilon$ s'écrit $x \leqslant \varepsilon$. Comme par ailleurs $x \geqslant 0$, il vient :
   $$(\star) \qquad 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon\,.$$
   En multipliant chaque membre de l'inégalité $\varepsilon \geqslant 0$ par $-1 < 0$, nous obtenons :
   $$(\star\star) \qquad -\varepsilon \leqslant 0\,.$$
   De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons :
   $$-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon\,.$$
   - *Cas où* $x < 0$ Dans ce cas $|x| \leqslant \varepsilon$ s'écrit $-x \leqslant \varepsilon$. En multipliant chacun des membres de cette inégalité par $-1 < 0$, il vient :
   $$-\varepsilon \leqslant x\,.$$
   Comme par ailleurs $x \leqslant 0$, il vient :
   $$(\star\star\star) \qquad -\varepsilon \leqslant x \leqslant 0\,.$$
   Par hypothèse :
   $$(\star\star\star\star) \qquad 0 \leqslant \varepsilon\,.$$
   De $(\star\star\star)$ et $(\star\star\star\star)$ nous déduisons :
   $$-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon\,.$$

   Dans les deux cas, nous avons démontré que $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

   (b) Nous raisonnons de nouveau par disjonction de cas, suivant le signe de x.
   - *Cas où* $x \geqslant 0$ Alors $|x| = x$ et comme $x \leqslant \varepsilon$, il vient :
   $$|x| \leqslant \varepsilon\,.$$
   - *Cas où* $x < 0$ Alors $|x| = -x$ et en multipliant chaque membre de l'inégalité $-\varepsilon \leqslant x$ par -1, il vient :
   $$|x| = -x \leqslant \varepsilon\,.$$

   Dans les deux cas, nous avons établi $|x| \leqslant \varepsilon$.

   (c) Grâce à 1.(a) et 1.(b), nous savons :
   $$|x| \leqslant \varepsilon \text{ si et seulement si } -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - D'après 1.(c) :
   $$\boxed{|3x-7| \leqslant 5 \text{ si et seulement si } -5 \leqslant 3x-7 \leqslant 5\,.}$$
   - Supposons $-5 \leqslant 3x-7 \leqslant 5$. En ajoutant 7 à chaque membre de cette inégalité, il vient :
   $$2 \leqslant 3x \leqslant 12\,.$$
   En multipliant à présent chaque membre de cette dernière inégalité par $\frac{1}{3} > 0$, nous obtenons :
   $$\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 4\,.$$
   - Réciproquement, supposons que $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 4$. En multipliant cette inégalité par $3 > 0$, il vient :
   $$2 \leqslant 3x \leqslant 12\,.$$
   En ajoutant -7 à chacun des membres de cette inégalité, nous obtenons :
   $$-5 \leqslant 3x-7 \leqslant 5\,.$$
   - Des deux points précédents, nous déduisons :
   $$\boxed{-5 \leqslant 3x-7 \leqslant 5 \text{ si et seulement si } \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 4\,.}$$

   D'après cette étude, l'ensemble solution de l'inéquation $|3x-7| \leqslant 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est $\left[\frac{2}{3}, 4\right]$.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F3.26. ÉNONCÉ INDICATION(S)

1. • Nous développons tout d'abord $(a+b)^2$:

$$(\star) \qquad (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab\,.$$

Comme $|a| = \sqrt{a^2}$, $|a|^2 = a^2$. De même $|b|^2 = b^2$. Ainsi $(\star)$ peut se réécrire :

$$(a+b)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2ab\,.$$

• Si $ab \geqslant 0$, alors $ab = |ab|$. Si $ab \leqslant 0$, alors $ab \leqslant 0 \leqslant |ab|$. Dans tous les cas $ab \leqslant |ab|$, d'où :

$$2ab \leqslant 2\,|ab|\ .$$

En ajoutant $|a|^2 + |b|^2$ à chacun des membres de la précédente inégalité, nous obtenons, grâce à la multiplicativité de la valeur absolue :

$$(\star\star) \qquad \underbrace{|a|^2 + |b|^2 + 2ab}_{(a+b)^2} \leqslant |a|^2 + |b|^2 + 2\,|ab| = |a|^2 + |b|^2 + 2\,|a|\,|b| = (|a| + |b|)^2\ .$$

• La croissance de la fonction racine carrée nous permet de déduire :

$$\sqrt{(a+b)^2} \leqslant \sqrt{(|a|+|b|)^2}$$

de $(\star\star)$. Cette dernière inégalité se réécrit :

$$|a+b| \leqslant |\underbrace{|a|+|b|}_{\geqslant 0}| = |a| + |b|\ .$$

2. • D'après la première inégalité triangulaire :

$$(\star) \qquad |a| = |a+b-b| = |(a+b) + (-b)| \leqslant |a+b| + |-b|\ .$$

Comme la valeur absolue est multiplicative :

$$|-b| = |(-1)\times b| = |-1| \times |b| = |b|\ .$$

Ainsi $(\star)$ peut se réécrire :

$$|a| \leqslant |a+b| + |b|\ .$$

En ajoutant $-|b|$ à chacun des membres de cette inégalité, il vient :

$$(\star\star) \qquad |a| - |b| \leqslant |a+b|\ .$$

• En échangeant les rôles joués par a et b, nous déduisons de $(\star\star)$:

$$|b| - |a| \leqslant |b+a|$$

que nous pouvons réécrire :

$$(\star\star\star) \qquad -(|a| - |b|) \leqslant |a+b|\ .$$

• Le nombre $||a| - |b||$ égale $|a| - |b|$ ou $-(|a| - |b|)$ suivant le signe de $|a| - |b|$. Grâce à cette observation, nous pouvons déduire de $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$ que :

$$||a| - |b|| \leqslant |a+b|\ .$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F3.27. ÉNONCÉ INDICATION(S)

1. • Il nous faut simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, en découpant l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ en quatre sous-intervalles. Pour ce faire, il nous faut chasser les valeurs absolues. Pour ôter les valeurs absolues de l'expression $|A|$, où $A \in \mathbb{R}$, il faut déterminer le signe de A. En effet, si $A \leqslant 0$ alors $|A| = -A$ et si $A \geqslant 0$ alors $|A| = A$.
   • C'est pourquoi nous dressons un tableau de signes conjoints des expressions affines $x-1$, x et $2x+1$ pour $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

x	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$\frac{3}{2}$
Signe de $x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Expression de $\|x-1\|$		$1-x$		$1-x$		$1-x$		$x-1$	
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Expression de $\|x\|$		$-x$		$-x$		x		x	
Signe de $2x+1$		$-$	0	$-$		$+$		$+$	
Expression de $\|2x+1\|$		$-2x-1$		$2x+1$		$2x+1$		$2x+1$	

   • Comme, pour tout $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$:
$$f(x) = |x-1| + |x| + |2x+1|$$
   nous déduisons du tableau précédent le tableau suivant.

x	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$\frac{3}{2}$
Expression de $f(x)$		$-4x$		2		$2x+2$		$4x$	

   • Ainsi :
   — pour tout $x \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, $f(x) = -4x$ (expression affine) ;
   — pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $f(x) = 2$ (expression affine) ;
   — pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 2x+2$ (expression affine) ;
   — pour tout $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$, $f(x) = 4x$ (expression affine).
   • Nous pouvons donc choisir $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$ et $c = 1$ pour répondre à la question posée.
2. De 1, nous déduisons la représentation graphique suivante de la fonction f.